MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

A. CLEBSCH UND **C. NEUMANN,**
PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

ZWEITER BAND.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1870.

Inhalt des zweiten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Ueber die Plückerschen Complexe.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Bezeichnen wir durch $u_1, u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$ die Coordinaten zweier Ebenen, durch $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ Coordinaten zweier Punkte, welche auf der Durchschnittslinie der Ebenen liegen, so kann man die Coordinaten der Schnittlinie beider Ebenen oder, was dasselbe ist, der Verbindungslinien beider Punkte bekanntlich durch die Grössen:

$$p_{ik} = u_i v_k - v_i u_k \tag{1}$$

oder durch die Grössen

$$q_{ik} = x_i y_k - y_i x_k \tag{2}$$

darstellen. Man hat dann zwischen den p oder den q beziehungsweise die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} P = p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0 \\ Q = q_{12}\,q_{34} + q_{13}\,q_{42} + q_{14}\,q_{23} = 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

und die p, q hängen mit einander zusammen durch die Gleichungen

$$\varrho p_{ik} = \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}}, \qquad \sigma q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}}, \tag{4}$$

wobei ϱ, σ willkürliche Grössen bedeuten, welche gleich 1 gesetzt werden können, wie im Folgenden geschehen soll.

Die Gleichung eines Complexes n^{ter} Ordnung kann man dann in doppelter Weise schreiben, indem man die Variabeln einmal durch p, das andere Mal durch q bezeichnet, und man erhält also für die Gleichung $F = 0$ eines solchen Complexes die beiden Formen:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = F(p) = \Sigma\, a_{ih,\,kl,\,mn,\,\ldots}\; p_{ih}\,p_{kl}\,p_{mn} \cdots \\ 0 = \Phi(q) = \Sigma\, \alpha_{ih,\,kl,\,mn,\,\ldots}\; q_{ih}\,q_{kl}\,q_{mn} \cdots . \end{array}\right. \tag{5}$$

Ueber die Coefficienten dieser Ausdrücke ist Folgendes zu bemerken:

1) Der Werth eines Coefficienten bleibt ungeändert, wenn man unter den Indicespaaren ih, kl, etc. irgend zwei mit einander vertauscht.

2) Ein Coefficient ändert (wie das entsprechende p, q) sein Zeichen, wenn zwei Indices eines Paares vertauscht werden.

3) Bei der Ausführung der Summen rechts erhält jeder Coefficient einen Polynomialfactor, welcher die Anzahl der verschiedenen Formen angiebt, welche er durch Vertauschung der Indicespaare annimmt.

Setzt man symbolisch

$$(6)\qquad \begin{cases} a_{ih,\,kl,\,mn,\,\ldots} = a_{ih}\,a_{kl}\,a_{mn}\,\ldots \\ \alpha_{ih,\,kl,\,mn,\,\ldots} = \alpha_{ih}\,\alpha_{kl}\,\alpha_{mn}\,\ldots, \end{cases}$$

so erscheint $F(p)$ oder $\Phi(q)$ als n^{te} Potenz eines linearen Complexes:

$$(7)\qquad \begin{aligned} F(p) &= \{\Sigma\, a_{ih}\, p_{ih}\}^n \\ = \Phi(q) &= \{\Sigma\, \alpha_{ih}\, q_{ih}\}^n. \end{aligned}$$

Die Symbole a_{ih}, α_{ih} haben dann nur noch die Eigenschaft, das Zeichen zu wechseln, wenn man die beiden Indices vertaucht. Zugleich hängen sie sehr einfach mit einander zusammen; denn setzt man

$$(8)\qquad \begin{aligned} A &= a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23} \\ \mathsf{A} &= \alpha_{12}\,\alpha_{34} + \alpha_{13}\,\alpha_{42} + \alpha_{14}\,\alpha_{23}, \end{aligned}$$

so ist

$$(9)\qquad \alpha_{ih} = \frac{\partial A}{\partial a_{ih}}, \quad a_{ih} = \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \alpha_{ih}},$$

und die Gleichungen (6) können daher auch geschrieben werden:

$$(10)\qquad \begin{cases} a_{ih,\,kl,\,mn\,\ldots} = \dfrac{\partial \mathsf{A}}{\partial \alpha_{ih}}\,\dfrac{\partial \mathsf{A}}{\partial \alpha_{kl}}\,\dfrac{\partial \mathsf{A}}{\partial \alpha_{mn}}\,\ldots \\ \alpha_{ih,\,kl,\,mn\,\ldots} = \dfrac{\partial A}{\partial a_{ih}}\,\dfrac{\partial A}{\partial a_{kl}}\,\dfrac{\partial A}{\partial a_{mn}}\,\ldots, \end{cases}$$

wodurch die Verbindung der beiden realen Bezeichnungsweisen mit den beiden symbolischen vollkommen hergestellt ist.

Aber zu einer Vereinfachung der symbolischen Bezeichnung, welche zugleich auf deren Benutzung den wesentlichsten Einfluss hat, führt folgende Bemerkung.

Wenn $n > 1$, so sind die Coefficienten eines Complexes keineswegs völlig bestimmt, sondern können modificirt werden, indem man beziehungsweise $P = 0$ oder $Q = 0$ zu Hülfe ruft. In der That, statt $F(p) = 0$ kann man immer setzen:

$$(11)\qquad F + MP = 0,$$

wo M eine Function $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der p, also eine Function ist, welche

$$\frac{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4 \cdot n+5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

willkürliche Coefficienten mit sich führt. Ich werde nun folgenden Satz beweisen:

Die Gleichung $F(p) = 0$ lässt sich immer, und nur auf

eine Weise durch Anwendung von $P=0$ so modificiren, dass man sie als symbolische Potenz eines speciellen linearen Complexes, d. h. eines solchen betrachten darf, dessen Gerade sämmtlich eine feste Gerade schneiden. Die Form, welche $F(p)$ dadurch annimmt, soll die Normalform der Complexgleichung heissen.

Untersuchen wir, welche Bedingungen die Forderungen des Theorems mit sich führen. Wenn die symbolischen Coefficienten a_{ih} (von den α gilt das Entsprechende) Coefficienten eines speciellen Complexes sein sollen, so kann man solche Grössen

$$a_1\,, a_2\,, a_3\,, a_4\quad, \quad b_1\,, b_2\,, b_3\,, b_4$$

einführen, dass

$$a_{ih} = a_i\, b_h - b_i\, a_h\,. \tag{12}$$

In diesem Falle geht also die erste Gleichung (6) über in:

$$a_{ih,\,kl,\,mn\,\ldots} = (a_i b_h - b_i a_h)\,(a_k b_l - b_k a_l)\,(a_m b_n - b_m a_n)\,\ldots\,. \tag{13}$$

Es ist die Frage, ob und unter welchen Umständen es erlaubt ist, für die Coefficienten des Complexes die symbolischen Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichung zu setzen. Die allgemeinen oben erwähnten Eigenschaften der Unveränderlichkeit, beziehungsweise des Zeichenwechsels, haben beide Seiten der Gleichung (13) mit einander gemein. Die einzige Frage, von deren Beantwortung die Möglichkeit jener Symbolik abhängt, ist also: ob zwischen den rechten Theilen der Gleichungen (13) lineare Beziehungen stattfinden, welche auf der rechten Seite im Allgemeinen nicht erfüllt sind. Und dies ist in der That der Fall. Denn die Symbole $a_i b_h - b_i a_h$ sind Coordinaten einer Geraden; zwischen solchen aber besteht die Identität:

$$\begin{aligned} 0 = {} & (a_1 b_2 - b_1 a_2)\,(a_3 b_4 - b_3 a_4) \\ & + (a_1 b_3 - b_1 a_3)\,(a_4 b_2 - b_4 a_2) + (a_1 b_4 - b_1 a_4)\,(a_2 b_3 - b_2 a_3), \end{aligned} \tag{14}$$

und keine andere. Alle denkbaren linearen Relationen also, welche zwischen den rechten Theilen der Gleichungen (13) bestehen, müssen aus dieser durch Multiplication mit $n-2$ Ausdrücken der Form

$$a_i\, b_k - b_i\, a_k$$

entstehen. Und so sieht man also sofort, dass die symbolischen Gleichungen (13) zwischen den Coefficienten des Complexes die folgenden Gleichungen voraussetzen, welche im Allgemeinen nicht erfüllt sind:

$$a_{12\,,\,34\,,\,ik\,\ldots} + a_{13\,,\,42\,,\,ik\,\ldots} + a_{14\,,\,23\,,\,ik\,\ldots} = 0. \tag{15}$$

Da alle auf die ersten beiden folgenden Indicespaare ganz beliebig sind, so ist die Anzahl dieser Relationen genau so gross, als die Zahl der Combinationen von $n-2$ Indicespaaren, welche möglich sind,

oder gleich der Zahl von Coefficienten, welche ein Complex M der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung enthält.

Setzt man nun in (15) an Stelle der Coefficienten von F, welche diesen Gleichungen im Allgemeinen keineswegs genügen, die Coefficienten des mit $F=0$ identischen Complexes $F+MP=0$ (11), so erhält man ein System von Gleichungen ersten Grades, in welchem die Coefficienten von M die Unbekannten sind, und in welchem also genau so viele Unbekannte als Gleichungen auftreten. Hieraus folgt, dass aus diesen Gleichungen entweder diese Unbekannten völlig bestimmt werden können, oder dass (wenn die Determinante des Systems verschwinden sollte), die Unbekannten unbestimmt bleiben müssten. Die Determinante des Systems braucht also nicht untersucht zu werden, wenn man zeigen kann, dass auf irgend eine Weise die Unbekannten völlig bestimmbar sind. Dies aber geschieht auf folgende Weise:

Bezeichnen wir durch ΔF den Process

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial p_{12}\,\partial p_{34}} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{13}\,\partial p_{42}} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{14}\,\partial p_{23}}\,. \tag{16}$$

Durch diesen Process erhält man aus einem Complex n^{ter} Ordnung $F=0$ einen Complex $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Delta F=0$; und indem man dieselbe Operation auf diesen wieder anwendet u. s. w., erhält man eine Reihe von Complexen $(n-4)^{\text{ter}}$, $(n-6)^{\text{ter}}$ etc. Ordnung, welche beziehungsweise durch

$$\Delta^2 F = 0 \quad , \quad \Delta^3 F = 0 \quad , \quad \ldots$$

bezeichnet werden sollen. Soll nun aber die modificirte Complexgleichung $F+MP=0$ in der symbolischen Form

$$F+MP = \{\Sigma\,(a_i b_k - b_i a_k)\; p_{ik}\}^n$$

darstellbar sein, so erhält man durch Anwendung des Processes Δ rechts der Gleichung (14) wegen identisch Null, und die Function M muss also die Eigenschaft besitzen, dass für $F+MP$ die identischen Gleichungen bestehen:

$$\begin{array}{ll} & \Delta\;(F+MP) = 0 \\ (17) & \Delta^2\,(F+MP) = 0 \\ & \Delta^3\,(F+MP) = 0 \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

Um diese Gleichungen zu entwickeln, bemerke ich, dass

$$\begin{array}{rl} & \Delta(MP) = P\Delta M + M\Delta P + \left\{ \frac{\partial M}{\partial p_{12}}\frac{\partial P}{\partial p_{34}} + \frac{\partial M}{\partial p_{13}}\frac{\partial P}{\partial p_{42}} \cdots + \frac{\partial M}{\partial p_{34}}\frac{\partial P}{\partial p_{12}} \right\} \\ (18) & \qquad = P\Delta M + \;3\;M + \left\{ p_{12}\frac{\partial M}{\partial p_{12}} + p_{13}\frac{\partial M}{\partial p_{13}} + \cdots \right\} \\ & \qquad = P\Delta M + (n+1)\;M. \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich sofort das Resultat der wiederholten Anwendung dieser Operation, indem man zunächst $\Delta\,(P\Delta M)$, $\Delta\,(P\Delta^2 M)$ u. s. w.

bildet. Diese Ausdrücke erhält man sogleich, indem man in (18) ΔM, $\Delta^2 M$ etc. an Stelle von M, und $n-2$, $n-4$, ... an Stelle von n setzt. Man hat also zunächst:

$$\begin{aligned}
\Delta(PM) &= P\Delta M + (n+1)\, M \\
\Delta(P\Delta M) &= P\Delta^2 M + (n-1)\, \Delta M \\
\Delta(P\Delta^2 M) &= P\Delta^3 M + (n-3)\, \Delta M \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und um $\Delta^k(PM)$ zu bestimmen, braucht man nur die ersten $k-1$ dieser Gleichungen beziehungsweise den Operationen Δ^{k-1}, Δ^{k-2}, ... Δ zu unterwerfen und ihre Summe mit der k^{ten} zu nehmen. Man erhält auf diese Weise folgendes System:

$$\begin{aligned}
\Delta\,(PM) &= P\Delta M + (n+1)\, M \\
\Delta^2 (PM) &= P\Delta^2 M + 2n\,.\,\Delta M \\
\Delta^3 (PM) &= P\Delta^3 M + 3\,(n-1)\, \Delta^2 M \\
\Delta^4 (PM) &= P\Delta^4 M + 4\,(n-2)\, \Delta^3 M, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

dessen Bildungsgesetz ersichtlich ist. Die Gleichungen (17) aber verwandeln sich durch Einführung dieser Werthe in folgende:

$$(19)\quad \begin{aligned}
\Delta F + P\Delta M + (n+1)\, M &= 0 \\
\Delta^2 F + P\Delta^2 M + 2\,.\,n\,.\,\Delta M &= 0 \\
\Delta^3 F + P\Delta^3 M + 3\,(n-1)\, \Delta^2 M &= 0 \\
\Delta^4 F + P\Delta^4 M + 4\,(n-2)\, \Delta^3 M &= 0\,. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen kann man die M, ΔM etc. successive berechnen, indem man bei der letzten anfängt, welche nur noch ein $\Delta^k M$ enthält, während $\Delta^{k+1} M$ identisch verschwindet. Da es aber nicht sowohl auf die Bestimmung dieser Functionen als auf den Ausdruck des modificirten Complexes

$$(20)\qquad F + PM = F_1$$

ankommt, so kann man diese Gleichung den Gleichungen (19) hinzufügen, und dann die Summe aller nehmen, nachdem man die Gleichungen (19) der Reihe nach mit

$$-\frac{P}{1\,.\,n+1}\,,\quad \frac{P^2}{1\,.\,2\,.\,n+1\,.\,n}\,,\quad -\frac{P^3}{1.2.3.n+1.n.n-1}\ \text{etc.}$$

multiplicirt hat. Bei der Addition heben sich dann alle mit M, ΔM etc. behafteten Terme auf, und es bleibt die Normalform des Complexes übrig:

$$(21)\quad F_1 = F - \frac{P}{1.n+1}\,\Delta F + \frac{P^2}{1.2.n+1.n}\,\Delta^2 F - \frac{P^3}{1.2.3.n+1.n.n-1}\,\Delta^3 F - \cdots,$$

welche hierdurch völlig und eindeutig bestimmt ist. —

Die Normalform des Complexes gestattet es, seiner Gleichung die symbolische Form

$$(22)\qquad F_1 = \left\{\Sigma\,(a_i\,b_k - b_i\,a_k)\;p_{ik}\right\}^n = 0$$

zu geben. Die Symbole $a_i\,b_k - b_i\,a_k$ erscheinen dabei als Coordinaten einer Geraden, welche durch zwei Punkte a, b gegeben ist. Denkt man dieselbe sich statt dessen durch zwei Ebenen α, β ausgedrückt, und führt zugleich statt der p die q ein, so erhält man die zweite, der obigen gleichberechtigte symbolische Form:

$$(23)\qquad F_1 = \left\{\Sigma\,(\alpha_i\,\beta_k - \beta_i\,\alpha_k)\;q_{ik}\right\}^n = 0\,.$$

Als Anwendung dieser Symbolik werde ich die Gleichung der Fläche vierter Ordnung und vierter Classe aufstellen, welche bei einem Complexe zweiter Ordnung von der Spitze zerfallender Complexkegel beschrieben und von den Ebenen zerfallender Complexcurven berührt wird. (Plücker's Neue Geometrie des Raumes p. 307 folgg.) Bei den Complexen zweiten Grades führt die Normalform eine Bestimmung für die Coefficienten mit sich; ist $F = 0$ die Gleichung des Complexes in beliebiger Form, so hat man

$$F_1 = F - \frac{Q}{3}\,(a_{12\,,\,34} + a_{13\,,\,42} + a_{14\,,\,23}).$$

Setzt man also nun symbolisch

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{\,\Sigma\,(a_i\,b_k - b_i\,a_k)\;p_{ik}\,\right\}^2 \\ &= \left\{\,\Sigma\,(\alpha_i\,\beta_k - \beta_i\,\alpha_k)\;q_{ik}\,\right\}^2, \end{aligned}$$

so erhält man zunächst die Gleichung eines vom Punkte y ausgehenden Complexkegels, indem man die p oder die q durch die Grössen $x_i\,y_k - y_i\,x_k$ ausdrückt, und die y dabei als gegeben betrachtet. Die Gleichung dieses Complexkegels wird also:

$$(24)\qquad (a\,b\,x\,y)^2 = 0, \qquad \text{oder } (\alpha_x\,\beta_y - \beta_x\,\alpha_y)^2 = 0.$$

Ebenso hat man die Gleichung der in der Ebene v enthaltenen Complexcurve, indem man die p oder die q durch die Grössen $u_i\,v_k - v_i\,u_k$ ausdrückt, und dabei die v als constant betrachtet. Daher ist die Gleichung der Complexcurve

$$(25)\qquad (u_a\,v_b - v_a\,u_b)^2 = 0, \qquad \text{oder } (\alpha\,\beta\,u\,v)^2 = 0.$$

Die Complexfläche, welche der Verbindungslinie zweier Punkte y, z entspricht, erhält man, indem man für die y die Coordinaten eines variabeln Punktes $y + \lambda z$ in (24) einsetzt, also die Schaar von Complexkegeln, deren Spitzen auf dieser Geraden liegen, und dann den Ort der Durchschnitte aufeinanderfolgender Complexkegel bildet, d. h. die Discriminante der entstehenden quadratischen Gleichung in λ verschwinden lässt. Man hat nun für diese quadratische Gleichung mit Benutzung der zweiten Formel (24) den Ausdruck:

$$(\alpha_x\beta_y - \beta_x\,\alpha_y)^2 + 2\lambda\,(\alpha_x\,\beta_y - \beta_x\,\alpha_y)(\alpha_x\,\beta_z - \beta_x\,\alpha_z) + \lambda^2(\alpha_x\,\beta_z - \beta_x\,\alpha_z)^2 = 0;$$

bildet man also die Discriminante, und unterscheidet die verschiedenen symbolischen Reihen durch oben beigesetzte Striche, so hat man für die Gleichung der Complexfläche:

$$(26)\quad 0=\left\{(\alpha_x\beta_y-\beta_x\alpha_y)(\alpha'_x\beta'_z-\beta'_x\alpha'_z)-(\alpha_x\beta_z-\beta_x\alpha_z)(\alpha'_x\beta'_y-\beta'_x\alpha'_y)\right\}^2.$$

Ebenso wird die Gleichung der Complexfläche in Ebenencoordinaten erhalten, indem man die Gerade y, z sich als den Schnitt zweier Ebenen v, w denkt, sodann in (25) $v+\lambda w$ für v setzt und wieder die Discriminante nach λ bildet. Die erste Form (25) giebt dann für die Gleichung der Complexfläche in Ebenencoordinaten die Form:

$$(27)\quad 0=\left\{(u_a v_b-v_a u_b)(u_{a'}w_{b'}-w_{a'}u_{b'})-(u_a w_b-w_a u_b)(u_{a'}v_{b'}-v_{a'}u_{b'})\right\}^2.$$

Noch einfacher lassen die Gleichungen dieser Complexflächen sich schreiben, wenn man jetzt in (26) die Grössen $y_i z_k - z_i y_k$ durch die entsprechenden der $v_i w_k - w_i v_k$ ersetzt, und in (27) umgekehrt. Dann nehmen diese beiden Gleichungen die Formen an:

$$(28)\quad \begin{cases}(\alpha_x\beta-\beta_x\alpha\,,\ \alpha'_x\beta'-\beta'_x\alpha'\,,\ v\,,\ w)^2=0\\ (u_a b-u_b a\,,\ u_{a'}b'-u_{b'}a'\,,\ y\,,\ z)^2=0\,.\end{cases}$$

Diese Gleichungsformen kann man auch unmittelbar gewinnen. Die erste sagt aus, dass die Complexfläche einer Geraden v, w der Ort der Punkte ist, deren Complexkegel die Gerade berühren; die zweite, dass die Tangentenebenen der Complexfläche Complexcurven enthalten, welche die Gerade zur gemeinschaftlichen Secante haben.

Betrachtet man die zweite Gleichung (24):

$$(\alpha_x\beta_y-\beta_x\alpha_y)^2=0$$

als Gleichung des Complexkegels für den Punkt x, und bezeichnet ihn demnach durch

$$(29)\quad \gamma_y^2=0\qquad(\gamma_i=\alpha_x\beta_i-\beta_x\alpha_i\,,\ \text{also}\ \gamma_x=0),$$

so ist nach der Theorie der Flächen zweiter Ordnung

$$(\gamma\,\gamma'\,\gamma''\,u)^2=0$$

die Gleichung der Fläche (29) in Ebenencoordinaten, d. h., da (29) ein Kegel ist, das Quadrat der Gleichung seiner Spitze. Man muss daher identisch haben:

$$(30)\quad (\gamma\,\gamma'\,\gamma''\,u)^2=M\,.\,u_x^2,$$

wo M nur noch von den x, nicht mehr von den u abhängt. Die Bedingung nun, dass der Kegel zerfällt, also seine Spitze unbestimmt wird, ist $M=0$. Daher ist $M=0$ die Gleichung einer Fläche, welche der geometrische Ort aller Punkte ist, deren Complexkegel sich in Ebenenpaare auflösen.

Um nun M zu bilden, braucht man nur auf der linken Seite von (30) statt der einen Reihe von γ ihre Werthe einzuführen. Man hat dann:

$$(\gamma\gamma'\gamma''u)^2 = (\alpha_x\beta - \beta_x\alpha\ ,\ \gamma', \gamma'', u)^2 = \{\alpha_x(\beta\gamma'\gamma''u) - \beta_x(\alpha\gamma'\gamma''u)\}^2,$$

oder, wenn man die bekannte Identität anwendet, und berücksichtigt, dass $\gamma'_x = \gamma''_x = 0$:

$$= (\alpha\beta\gamma'\gamma'')^2\, u_x^2.$$

Hierdurch ist der Factor u_x^2 abgesondert, und man hat also

$$\begin{aligned} M &= (\alpha\beta\gamma'\gamma'')^2 \\ &= (\alpha, \beta\ ,\ \alpha'_x\beta' - \beta'_x\gamma'\ ,\ \alpha''_x\gamma'' - \beta''_x\gamma'')^2. \end{aligned}$$

Die Fläche $M = 0$ ist also von der vierten Ordnung, und ihre Gleichung entsteht aus der Gleichung der Complexfläche (28), indem man die Coordinaten der Leitlinie symbolische Coefficienten des gegebenen Complexes bedeuten lässt.

Ebenso erhält man die (bekanntlich mit der vorigen identische) Fläche vierter Classe, deren Tangentenebenen zerfallende Complexcurven enthalten, indem man die Gleichung

$$N = 0 = (a, b\ ,\ u_{a'}b' - u_{b'}a'\ ,\ u_{a''}b'' - u_{b''}a'')^2$$

bildet, oder indem man in der Gleichung der Complexfläche in Ebenencoordinaten die Coordinaten der Leitlinie symbolische Coefficienten des gegebenen Complexes bedeuten lässt.

Andere Anwendungen der oben auseinandergesetzten Methode der Bezeichnung werde ich bei einer andern Gelegenheit geben.

Göttingen, den 5. April 1869.

Notiz über das Gleichgewicht eines schweren Drahtes, dessen Axe eine Schraubenlinie bildet.

Von

Michail Okatow in St. Petersburg.

Es sei ein Draht gegeben von kreisförmigem Querschnitt und nach allen Richtungen gleicher Elasticität, dessen Axe im natürlichen Zustande eine Schraubenlinie bildet; die Axe des fingirten Cylinders Z, auf dessen Mantelfläche die Schraubenlinie liegt, sei vertical, und die beiden Grundkreise des Cylinders, welche die beiden Endpunkte der Schraubenlinie enthalten, sollen mit diesen Enden so verbunden sein, dass der Draht die Wirkung der beiden Kräftepaare auf sich nehmen kann, die in jenen Kreisen liegen und mit zwei gleichen, aber entgegengesetzten Drehmomenten M auf den Draht wirken sollen; der Mittelpunkt des unteren und der des oberen Grundkreises dienen ausserdem als Angriffspunkte für zwei entgegengesetzte verticale Kräfte A, resp. $(A + pl)$: dabei bezeichnet l die ganze Länge der Schraubenlinie und p das Gewicht der Längeneinheit des Drahtes, mithin das Product pl das Gewicht des ganzen Drahtes.

Die Schraubenlinie erfährt beim Uebergange aus dem Zustande des natürlichen Gleichgewichts in den des elastischen dreierlei Aenderungen: 1tens der Durchmesser des fingirten Cylinders, auf dem die Schraubenlinie lag, ändert sich um eine Grösse C; 2tens jeder Punkt der Schraubenlinie verschiebt sich parallel der Axe des Cylinders um eine Grösse Y und dabei 3tens dreht er sich um diese Axe um einen Kreisbogen B; die Grössen C, Y und B sind nicht constant, sondern für verschiedene Punkte der Schraubenlinie verschieden.

Beim natürlichen Zustande des Drahtes bezeichnen wir:

durch s — den längs der Schraubenlinie gemessenen Abstand eines Punktes s derselben von ihrem oberen Ende;

durch Θ' — den constanten Winkel, den jede Tangente der Schraubenlinie mit der Axe des Cylinders bildet, und

durch n' — den constanten Kreisbogen vom Radius 1, welcher als Maass des körperlichen Winkels zwischen zwei Ebenen dient, die

durch die Axe des Cylinders Z und durch irgend zwei längs der Schraubenlinie um die Längeneinheit von einander entfernte Punkte s und $s+1$ derselben gelegt worden sind; $\frac{2 \sin \Theta'}{n'}$ stellt somit den Durchmesser des Cylinders Z dar.

Es seien ferner:

E — der Elasticitätsmodul und

α — das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation des Stoffes des Drahtes, im gewöhnlichen Sinne dieser Worte;

m — die Dicke des Drahtes und

$J = \frac{\pi m^4}{64}$ — das Trägheitsmoment seines kreisförmigen Querschnittes.

Die gesuchten Grössen C, Y und B lassen sich für einen laufenden Punkt s der Axe des Drahtes durch die folgenden Formeln darstellen:

1) Die Zusammenziehung des fingirten Cylinders Z auf dem Niveau des Punktes s:

$$C = 2\left(\frac{\sin \Theta'}{n'} - \frac{\sin \Theta}{n}\right); \tag{1}$$

2) Die Senkung des Punktes s:

$$Y = (\cos \Theta - \cos \Theta').s - \int_0^s s.d(\cos \Theta); \tag{2}$$

3) Die die Anzahl der Windungen der Schraubenlinie vergrössernde Drehung des Punktes s um die Axe des Cylinders Z:

$$B = (n - n').s - \int_0^s s dn. \tag{3}$$

Die Gleichungen:

$$n(n \cos \Theta - n' \cos \Theta') \sin \Theta - (1+\alpha)\, n(n \sin \Theta - n' \sin \Theta') \cos \Theta = \frac{(1+\alpha)\,(A + pl - ps)}{EJ} \sin \Theta \tag{4}$$

und

$$(n \cos \Theta - n' \cos \Theta') \cos \Theta + (1+\alpha)(n \sin \Theta - n' \sin \Theta') \sin \Theta = \frac{(1+\alpha)\, M}{EJ} \tag{5}$$

sollen dabei zur Definition der in den Formeln (1), (2) und (3) auftretenden Grössen Θ und n dienen. Die Grösse A ist dann als positiv zu rechnen, wenn die beiden entgegengesetzten Kräfte A die Axe des Cylinders Z zu verlängern suchen; die Grösse M ist als positiv zu rechnen, wenn die beiden entgegengesetzten Kräftepaare M die Anzahl der Windungen der Schraubenlinie zu vergrössern bestrebt sind.

Die in (2) und (3) unter den Integralzeichen stehenden Differentialausdrücke lassen sich als rationale Functionen von $tg\, \frac{1}{2}\Theta$ darstel-

len; man bekommt alsdann z. B. für die Verschiebung Y eines Punktes s den Ausdruck:

$$(6)\quad Y = (\cos\Theta - \cos\Theta')\, s - \left(l + \frac{A}{p}\right)(\cos\Theta - \cos\Theta_0) + \frac{M}{p}(n - n_0) + \frac{a - b\sin 2\Theta}{1 + \alpha\sin^2\Theta} - \frac{a - b\sin 2\Theta_0}{1 + \alpha\sin^2\Theta_0},$$

worin Θ_0 und n_0 die Werthe von Θ und n für das obere Ende $s = 0$ der Schraubenlinie bedeuten, und die Constanten a und b sind:

$$a = \frac{(1+\alpha)\, M^2}{2EJp} - \frac{EJn'^2}{2\alpha p}\left(\cos^2\Theta' - (1+\alpha)\sin^2\Theta'\right);$$

$$b = \frac{EJn'^2 \sin 2\Theta'}{4p}.$$

Die angeführten Formeln genügen einer strengeren Theorie des Gleichgewichts elastischer Stäbe, wie sie von Kirchhoff gegeben wurde, nur für diejenigen Punkte der Schraubenlinie, welche beim elastischen Gleichgewichte des Drahtes um eine ganze Anzahl von Umgängen von dem unteren Ende desselben entfernt sind. Man darf jedoch dieselben Ausdrücke von C, Y und B auf der ganzen Ausdehnung der Schraubenlinie benutzen, mit einer desto grösseren Genauigkeit, je grösser die Anzahl der Windungen des Drahtes ist. In der That, die Formänderung der Schraubenlinie in den nahe zum unteren Ende des Drahtes liegenden Punkten hängt wesentlich bloss von der angehängten Last A und dem Drehmomente M ab, und nicht vom Gewichte des übrig bleibenden Theils des Drahtes; bei einem Punkte aber, der um mehrere Windungen vom unteren Ende absteht, kann man die störende Wirkung eines Theils einer Windung gegen die gesammte Wirkung aller dieser Windungen vernachlässigen und die Grössen C, Y und B so bestimmen, als ob sie durch die von einer ganzen Anzahl der Windungen herrührende Last $(pl - ps)$ hervorgebracht würden.

Die Formeln (1) — (3) bestimmen nach der Formänderung die Lage eines Molecüls o des Drahtes, welches sich vor der Formänderung auf der Axe des Drahtes in einer Entfernung s vom oberen Ende desselben befand; es bleibt jetzt übrig zu zeigen, wie man nach der Formänderung die Lage aller Molecüle des zum Molecül o zugehörigen Querschnittes S findet. Zu diesem Zwecke denken wir uns vor der Formänderung in einem Punkte s' der Schraubenlinie stehend, dessen Abstand s' vom oberen Ende ein wenig grösser ist, als der Abstand s des Molecüls o, unser Gesicht dem Kreise S zugekehrt, und wir wollen das Molecül o zum Anfangspunkte eines Systems von Polarcoordinaten wählen, zu deren Axe derjenige materielle Radius $o1$ des Kreises S dienen soll, welcher im Punkte o des fingirten, die Schraubenlinie enthaltenden Cylinders Z die nach aussen gerichtete Normale

dieses letzteren bildet. Ein Molecül a des Kreises S wird dann durch seinen Abstand ϱ vom Molecül o und durch den Winkel φ zwischen den beiden Strahlen $o1$ und oa definirt; den Winkel φ, der alle Werthe zwischen o und 2π annehmen kann, wollen wir dabei vom Strahle $o1$ ausgehend in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers bis zu dem Strahle oa ablesen. Die strenge Theorie zeigt, dass die Molecüle a des Kreises S auch nach der Formänderung keine windschiefe Fläche, sondern eine Ebene bilden, die auf der Axe des veränderten Drahtes senkrecht steht, und wenn wir auf diese Theorie das nämliche Näherungsverfahren, wie früher, anwenden, so folgt, dass der materielle Strahl $o1$ nach der Formänderung wiederum geradlinig und horizontal bleibt. Durch diese Bemerkungen wird die Lage des betrachteten materiellen Querschnittes S und des Strahles $o1$ im Raume nach der Formänderung vollständig bestimmt; die einzelnen Molecüle a lassen sich jetzt durch ihre Polarcoordinaten $(\varrho - c)$ und $(\varphi + \Delta\varphi)$ in Beziehung auf das Molecül o und den Strahl $o1$ bestimmen; man findet nämlich für die Verkürzung c des Abstandes ϱ zwischen den Molecülen a und o den Ausdruck:

$$(7) \qquad c = \frac{\alpha\,(A + pl - ps)}{E\lambda}\,\varrho + \frac{\alpha\,(n \sin \Theta - n' \sin \Theta')}{2}\,\varrho^2 \cos \varphi\,,$$

worin $\lambda = \frac{1}{4}\,\pi m^2$ den Inhalt des kreisförmigen Querschnittes S des Drahtes bezeichnet, und für den Bogen $\beta = \varrho \cdot \Delta\varphi$, um welchen sich das Molecül a um das Molecül o in der Richtung des Uhrzeigers gedreht hat, den Ausdruck

$$(8) \qquad \beta = -\,\frac{\alpha\,(n \sin \Theta - n' \sin \Theta')}{2}\,\varrho^2 \sin \varphi.$$

Man sieht aus der Formel (8), dass der materielle Strahl $o1$, wie bereits erwähnt, und sein entgegengesetzter, für welche $\varphi = 0$, resp. $= \pi$ ist, gradlinig bleiben, und dass alle übrigen Durchmesser eines Querschnittes S sich bei der Formänderung des Drahtes in flache Parabeln umformen.

Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel.

Par A. Korkine de St. Petersburg.

Les questions sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique se rapportent essentiellement à la théorie des équations simultanées aux dérivées partielles. M. Bertrand a pour la première fois résolu une question générale de ce genre, en donnant une méthode simple et très-élegante pour traiter les problèmes de Mécanique dans lesquelles les forces motrices ne dépendent que des coordonnées des points mobiles. L'application de cette méthode au mouvement d'un seul point a été l'objet des recherches remarquables de M. Bertrand et de celles de M. Rouché. Je reprends ici les équations du mouvement d'un point sur une surface pour faire étude du cas plus général dans lequel les forces appliquées au mobile sont des fonctions quelconques de ses coordonnées et des composantes de sa vitesse. Or, si une seule intégrale est commune à plusieurs problèmes, sa forme est arbitraire par rapport à ces quantités. C'est pourquoi je me suis borné au cas dans lequel les problèmes admettent deux intégrales communes.

La question se réduit à la recherche des expressions générales des fonctions X, Y de quatre variables $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, telles que les équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

puissent avoir deux intégrales communes avec des équations de même forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X_1, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y_1 .$$

La méthode de M. Bertrand n'étant point appliquable à cette question, je fais usage d'une autre, qui est fondée sur un théorème bien connue relatif aux équations simultanées aux dérivées partielles. Ce théorème peut être énoncé comme il suit:

Soient

$$q_1, q_2, \dots q_n$$

les variables indépendantes, V leur fonction,

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n}$$

ses dérivées partielles du premier ordre,

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\mu$$

des fonctions de $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ linéaires et homogènes par rapport à $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Supposons, que des équations

$$(1) \qquad \varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_\mu = 0$$

on ne puisse déduire par l'élimination de $p_1, p_2, \ldots p_n$ aucune relation de la forme

$$\Pi(q_1, q_2, \ldots q_n) = 0,$$

et que parmi ces équations il n'y en ait aucune, qui soit la conséquence des autres. Alors le système d'équations (1), en y regardant V comme inconnue, sera satisfait par $n - \mu$ fonctions de $q_1, q_2, \ldots q_n$ indépendantes entre elles, si les conditions

$$(2) \ \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1}\frac{\partial \varphi_j}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2}\frac{\partial \varphi_j}{\partial p_2} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_n}\frac{\partial \varphi_j}{\partial p_n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_n}\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_n} = 0$$

sont remplies soit identiquement soit en vertu des équations (1) pour toutes les valeurs de i et j contenues dans la suite $1, 2, 3 \ldots n$.

L'expression qui se trouve dans le premier terme de l'équation (2) est celle de Poisson. On la désigne ordinairement par le symbole (φ_i, φ_j).

Il importe de distinguer le cas où les équations (2) sont identiques de celui où elles n'ont lieu qu'en vertu du système (1). Dans le premier cas je nommerai l'ensemble des équations (1) le système normal et dans le second le système fermé.

Soient maintenant ξ, η, ζ les coordonnées rectangulaires du point mobile, dont nous supposons la masse égale à l'unité; t le temps; ξ', η', ζ' les dérivées

$$\frac{d\xi}{dt}, \ \frac{d\eta}{dt}, \ \frac{d\zeta}{dt};$$

$$(3) \qquad f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

l'équation de la surface sur laquelle le point est assujeti à rester, et H, K, L les composantes de la force qui agit sur le mobile. Nous supposons que H, K, L sont des fonctions quelconques de $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$.

On peut regarder ξ, η, ζ, comme trois fonctions de deux variables x et y telles que leurs valeurs satisfassent à l'équation $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$, quelsque soient x et y. D'après cette supposition les quantités ξ', η', ζ', H, K, L seront des fonctions de $x, y, \frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$. Pour abréger faisons

$$\frac{dx}{dt} = x' \quad , \quad \frac{dy}{dt} = y'.$$

Le carré de l'élement linéaire sur la surface (3)

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

prendra la forme

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx\, dy + G dy^2,$$

et on aura pour l'expression de la force vive

$$\frac{1}{2}\,\frac{ds^2}{dt^2} = T = \tfrac{1}{2}\,(E x'^2 + 2F x' y' + G y'^2).$$

Parmi les divers systèmes x, y de coordonnées sur la surface un des plus remarquables est celui pour lequel les coëfficients E et G sont égaux à zéro. C'est le système que Bour a nommé le système de coordonnées symmétriques. Nous en fairons usage dans la suite.

Faisons

$$M = H\frac{\partial \xi}{\partial x} + K\frac{\partial \eta}{\partial x} + L\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$N = H\frac{\partial \xi}{\partial y} + K\frac{\partial \eta}{\partial y} + L\frac{\partial \zeta}{\partial y};$$

les quantités M et N seront, dans nos suppositions des fonctions quelconques de x, y, x' et y'.

Les équations du mouvement prennent maintenant la forme bien connue

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = M, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = N. \tag{4}$$

Dans la suite nous fairons constamment usage du signe d pour exprimer la différentiation complête et du signe ∂ pour désigner des différentiations partielles.

Les équations (4) étant développées et résolues par rapport à

$$\frac{d^2x}{dt^2} \text{ et } \frac{d^2y}{dt^2}$$

deviennent

$$(5)\left\{\begin{aligned}
(EG-F^2)\frac{d^2x}{dt^2} &= GM - FN + \left(F\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial y} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial x}\right)x'^2 \\
&+ \left(F\frac{\partial G}{\partial x} - G\frac{\partial E}{\partial y}\right)x'y' + \left(\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial x} - G\frac{\partial F}{\partial y}\right)y'^2, \\
(EG-F^2)\frac{d^2y}{dt^2} &= EN - FM + \left(\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial y} - E\frac{\partial F}{\partial x}\right)x'^2 \\
&+ \left(F\frac{\partial E}{\partial y} - E\frac{\partial G}{\partial x}\right)x'y' + \left(F\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial y}\right)y'^2.
\end{aligned}\right.$$

Nous les écrirons plus simplement ainsi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

en désignant par X et Y des fonctions de x, y, x', y' dont les expressions dépendent de celles de M, N, E, F, G. Si x et y sont des coordonnées symmétriques, les valeurs de X et Y sont

(6) $$X = \frac{N}{F} - \frac{\partial \log F}{\partial x} \cdot x'^2 \,, \quad Y = \frac{M}{F} - \frac{\partial \log F}{\partial y} \cdot y'^2 .$$

Nous désignerons le problème défini par X et Y simplement comme problème (X, Y) et les quantités X et Y comme forces de ce problème. Nous désignerons également x' et y' comme vitesses du mobile.

1. Les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

du problème (X, Y) ont les mêmes intégrales que le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{dt} = x' \,, \quad \frac{dy}{dt} = y' \,, \quad \frac{dx'}{dt} = X \,, \quad \frac{dy'}{dt} = Y \,,$$

ou l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial t} + x' \frac{\partial V}{\partial x} + y' \frac{\partial V}{dy} + X \frac{\partial V}{\partial x'} + Y \frac{\partial V}{\partial y'} = 0.$$

C'est cette dernière équation qui nous servira pour définir les intégrales du problème (X, Y).

Supposons que V soit une intégrale commune à deux problèmes (X, Y) et (X_1, Y_1). Elle doit satisfaire simultanément à deux équations

$$\frac{\partial V}{\partial t} + x' \frac{\partial V}{\partial x} + y' \frac{\partial V}{\partial y} + X \frac{\partial V}{\partial x'} + Y \frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + x' \frac{\partial V}{\partial x} + y' \frac{\partial V}{\partial y} + X_1 \frac{\partial V}{\partial x'} + Y_1 \frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

ou, ce qui est le même, à ces deux autres

(7) $$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} + x' \frac{\partial V}{\partial x} + y' \frac{\partial V}{\partial y} + X \frac{\partial V}{\partial x'} + Y \frac{\partial V}{\partial y'} = 0, \\ &\qquad (X - X_1) \frac{\partial V}{\partial x'} + (Y - Y_1) \frac{\partial V}{\partial y'} = 0, \end{aligned} \right.$$

L'intégrale V dépend nécessairement au moins d'une seule des vitesses x', y'. En effet, dans le cas contraire, en supposant

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

le système (7) se réduira à une seule équation

$$\frac{\partial V}{\partial t} + x' \frac{\partial V}{\partial x} + y' \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

qui étant differentiée par rapport à x' et y' donne

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

et par conséquent $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. De là il résulte que V est une constante.

Chaque problème (X, Y) a quatre intégrales, savoir, trois qui sont des fonctions de x, y, x', y' et une seule de la forme

$$- t + F(x, y, x', y').$$

Il est évident que les problèmes (X, Y) et (X_1, Y_1) ne peuvent point avoir trois intégrales communes sans devenir identiques, c'est-à-dire, sans qu'on ait $X = X_1$, $Y = Y_1$. Nous allons nous occuper des problèmes qui ont deux intégrales communes.

2. Le premier cas et le plus simple est celui où l'une des vitesses x', y' ne figure pas dans les intégrales en question.

Soient V et W ces intégrales, et supposons par exemple,

$$\frac{\partial V}{\partial y'} = 0;$$

alors le système (7) donne

$$(X - X_1)\frac{\partial V}{\partial x'} = 0,$$

et comme on ne peut pas avoir en même temps

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = 0 \text{ et } \frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

il faut que l'on ait

$$X = X_1.$$

L'intégrale W qui doit satisfaire à l'équation

$$(X - X_1)\frac{\partial W}{\partial x'} + (Y - Y_1)\frac{\partial W}{\partial y'} = 0,$$

ou, ce qui est le même, à l'équation

$$(Y - Y_1)\frac{\partial W}{\partial y'} = 0,$$

ne peut pas dépendre de y', car autrement on aurait $Y = Y_1$, et les deux problèmes (X, Y) et (X_1, Y_1) seraient identiques. Ainsi V et W ne contiennent pas y'.

Il est très-facile de démontrer que l'une de ces intégrales dépend de t, et que ni l'une ni l'autre ne dépendent de y. En effet, soit

$$V = f(x, y, x') = \alpha, \qquad W = F(x, y, x') - \gamma t = \beta,$$

α et β étant des constantes arbitraires et γ désignant zéro ou un.

Résolvons l'équation

$$f(x, y, x') = \alpha$$

par rapport à x', et soit

$$x' = \lambda\,(x, y, \alpha)$$

sa valeur.

Substituons-la dans l'équation

$$F(x, y, x') = \gamma t + \beta$$

et désignons la fonction

$$F[x, y, \lambda(x, y, \alpha)]$$

par $\mu(x, y, \alpha)$; il viendra

$$\mu(x, y, \alpha) = \gamma t + \beta.$$

En différentiant cette équation par rapport à t, on a

$$x'\frac{\partial\mu}{\partial x}+y'\frac{\partial\mu}{\partial y}=\gamma. \tag{8}$$

L'équation (8) doit devenir identique, si l'on substitue au lieu de α sa valeur $f(x, y, x')$, car alors elle sera le résultat de la différentiation complète de l'intégrale

$$F(x, y, x')=\gamma t+\beta.$$

Par conséquent la valeur $\alpha=f(x, y, x')$ satisfait à l'équation (8); or $f(x, y, x')$ ne contenant pas y' on doit avoir

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$$

et par suite

$$x'\frac{\partial\mu}{\partial x}=\gamma.$$

Il est évident maintenant que γ n'est point zéro, car dans le cas contraire on aurait $\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$ et l'intégrale W serait une fonction de V; par conséquent on a $\gamma=1$ et

$$x'\frac{\partial\mu}{\partial x}=1.$$

La fonction $\alpha=f(x, y, x')$ satisfaisant à cette équation ne saurait contenir y, car μ est indépendant de y. Ainsi les deux intégrales dont nous nous occupons sont de la forme

$$V=f(x, x')=\alpha, \qquad W=F(x, x')-t=\beta.$$

Il est évident que l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X,$$

est équivalente à celle-ci

$$x'\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

qui s'obtient en différentiant l'intégrale

$$f(x, x')=\alpha,$$

et que X est une fonction de x et x' seuls.

Les deux intégrales V et W sont les intégrales premières de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X.$$

Nous aurons le cas absolument semblable à celui que nous venons de considérer, si les deux intégrales communes V et W ne dépendent pas de x'.

Dans la suite nous ferons abstraction de ces cas et nous supposerons qu'aucune des dérivées

$$\frac{\partial V}{\partial x'}, \quad \frac{\partial V}{\partial y'}$$

ne soit égale à zéro, V étant toujours une intégrale commune à deux problèmes.

Cela posé il est facile de voir que les problèmes (X, Y) et $(X_1 Y_1)$ n'étant point identiques X est différent de X_1 et Y de Y_1. En effet l'équation

$$(X - X_1)\frac{\partial V}{\partial x'} + (Y - Y_1)\frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

se reduit à

$$(Y - Y_1)\frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

si nous supposons $X = X_1$, et à

$$(X - X_1)\frac{\partial V}{\partial x'} = 0,$$

si l'on a $Y = Y_1$. Or $\frac{\partial V}{\partial y'}$ et $\frac{\partial V}{\partial x'}$ différant de zéro, on doit avoir $Y = Y_1$ dans le premier cas et $X = X_1$ dans le second. Par conséquent dans tous les cas les problèmes (X, Y) et (X_1, Y_1) seront identiques, contrairement à la supposition.

3. Les équations (7) peuvent être transformées en les deux suivantes

$$\frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{Y - Y_1}{X - X_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + x'\frac{\partial V}{\partial x} + y'\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{XY_1 - X_1 Y}{X - X_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial y'} = 0.$$

Désignons pour abréger par k la quantité

$$\frac{Y - Y_1}{X - X_1}$$

et par l la quantité

$$\frac{XY_1 - X_1 Y}{X - X_1} = Y - kX = Y_1 - kX_1;$$

alors les deux équations ci-dessus deviennent

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x'} + k\,\frac{\partial V}{\partial y'} = 0,\\ &\frac{\partial V}{\partial t} + x'\cdot\frac{\partial V}{\partial x} + y'\cdot\frac{\partial V}{\partial y} + l\,\frac{\partial V}{\partial y'} = 0.\end{aligned}\right.$$

Notre recherche se réduira à assigner aux quantités k et l les valeurs nécessaires et suffisantes pour que le problème (X, Y) puisse avoir deux intégrales communes avec d'autres problèmes. Ces valeurs nous donneront sur-le-champ les conditions pour les forces X et Y; car si nous avons

$$k = \varphi\quad,\quad l = \psi,$$

nous aurons en vertu des expressions de k et l en X, Y, X_1, Y_1,

$$Y - \varphi X = \psi;$$

c'est la condition cherchée.

Les valeurs de k et l ne sont jamais infinies d'après les suppositions sur les forces X, Y, X_1, Y_1, que nous avons faites au n° 2.

Composons la fonction de Poisson avec les deux expressions

$$\frac{\partial V}{\partial x'} + k\frac{\partial V}{\partial y'}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + x'\frac{\partial V}{\partial x} + y'\frac{\partial V}{\partial y} + l\frac{\partial V}{\partial y'};$$

nous formerons l'équation

$$(10) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + k\frac{\partial V}{\partial y} + \left(\frac{\partial l}{\partial x'} + k\frac{\partial l}{\partial y'} - l\frac{\partial k}{\partial y'} - x'\frac{\partial k}{\partial x} - y'\frac{\partial k}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

qui est satisfaite par toutes les valeurs de k, l et V qui satisfont au système (9). Composons la fonction de Poisson avec les premiers termes des équations (10) et (9), et nous aurons deux nouvelles équations qui seront satisfaites par les mêmes valeurs de k, l et V. Or, d'après notre supposition, le nombre des intégrales communes à toutes ces équations étant deux, il faut que quelques-unes d'entre elles soient identiques ou des conséquences des autres. Ainsi nous aurons des équations de condition pour k et l, qui nous permettront de trouver les valeurs générales de ces quantités.

Nous distinguerons le cas où les deux intégrales communes ne dépendent pas du temps de celui où l'une d'elles contient le temps.

4. Le premier de ces cas est très-simple. Les deux intégrales en question ne dépendant pas de t, le système (9) se réduit au suivant

$$\frac{\partial V}{\partial x'} + k\frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

$$x'\frac{\partial V}{\partial x} + y'\frac{\partial V}{\partial y} + l\frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

ou, ce qui est le même,

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x'} + k\dfrac{\partial V}{\partial y'} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{y'}{x'}\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{l}{x'}\dfrac{\partial V}{\partial y'} = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations étant combinées pour former la fonction de Poisson, donnent

$$(12) \quad \left(\frac{k}{x'} - \frac{y'}{x'^2}\right)\frac{\partial V}{\partial y} + \left(\frac{1}{x'}\frac{\partial l}{\partial x'} + \frac{k}{x'}\frac{\partial l}{\partial y'} - \frac{l}{x'^2} - \frac{l}{x'}\frac{\partial k}{\partial y'} - \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{y'}{x'}\frac{\partial k}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial y'} = 0.$$

Or l'existence de deux intégrales communes, fonctions de quatre variables x, y, x', y', exige, d'après le théorème énoncé plus haut, que le système (11) soit fermé ou normal. Il ne saurait être fermé, car l'équation (12) n'a pas lieu en vertu des équations (11); il doit donc être normal et l'équation (12) identique; par conséquent on a

$$\frac{k}{x'} - \frac{y'}{x'^2} = 0, \quad \frac{1}{x'}\frac{\partial l}{\partial x'} + \frac{k}{x'}\frac{\partial l}{\partial y'} - \frac{l}{x'^2} - \frac{l}{x'}\frac{\partial k}{\partial y'} - \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{y'}{x'}\frac{\partial k}{\partial y} = 0,$$

et il en résulte

$$k = \frac{y'}{x'}, \quad x'\frac{\partial l}{\partial x'} + y'\frac{\partial l}{\partial y'} = 2l.$$

La dernière équation a pour intégrale générale

$$l = x'^2 \,.\, \Pi\left(x,\, y,\, \frac{y'}{x'}\right),$$

Π désignant une fonction arbitraire.

Les valeurs trouvées de k et l donnent pour les forces X et Y la condition suivante

$$x'\, Y - y'\, X = x'^3\, \Pi\left(x,\, y,\, \frac{y'}{x'}\right), \tag{13}$$

qui est nécessaire et suffisante.

Pour avoir les intégrales cherchées substituons au lieu de X et Y respectivement

$$\frac{d^2x}{dt^2} \text{ et } \frac{d^2y}{dt^2}$$

dans l'équation (13). En prenant alors x pour variable indépendante, il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\left(x\,,\, y\,,\, \frac{dy}{dx}\right).$$

Les deux intégrales premières de cette équation sont aussi les intégrales communes, que nous cherchons. La fonction Π étant arbitraire, elles n'ont pas de forme déterminée comme fonctions de $x, y, \frac{y'}{x'}$.

5. Il nous reste à étudier le cas dans lequel une des deux intégrales communes dépend de t. Reprenons les équations (9) et (10), qui ont lieu pour toute intégrale commune V. En désignant, pour abréger, par m l'expression

$$\frac{\partial l}{\partial x'} + k\,\frac{\partial l}{\partial y'} - l\,\frac{\partial k}{\partial y'} - x'\,\frac{\partial k}{\partial x} - y'\,\frac{\partial k}{\partial y}$$

ces équations formeront le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x'} + k\,\frac{\partial V}{\partial y'} &= 0,\\ \frac{\partial V}{\partial t} + x'\,\frac{\partial V}{\partial x} + y'\,\frac{\partial V}{\partial y} + l\,\frac{\partial V}{\partial y'} &= 0,\\ \frac{\partial V}{\partial x} + k\,\frac{\partial V}{\partial y} + m\,\frac{\partial V}{\partial y'} &= 0, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

qui dans le cas dont nous nous occupons doit être fermé ou normal. Faisons pour abréger

$$A\,(V) = \frac{\partial V}{\partial x'} + k\,\frac{\partial V}{\partial y'},$$

$$B\,(V) = \frac{\partial V}{\partial t} + x'\,\frac{\partial V}{\partial x} + y'\,\frac{\partial V}{\partial y} + l\,\frac{\partial V}{\partial y'},$$

$$C\,(V) = \frac{\partial V}{\partial x} + k\,\frac{\partial V}{\partial y} + m\,\frac{\partial V}{\partial y'},$$

$A(V)$, $B(V)$, $C(V)$ désignant des opérations différentielles complé-

tement déterminées, executées sur la fonction V dont la dernière peut être représentée ainsi

$$C(V) = A[B(V)] - B[A(V)]. \tag{15}$$

Combinons $A(V)$ et $C(V)$ pour former la fonction de Poisson, faisons le même avec $B(V)$ et $C(V)$ et nous aurons les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} A(k)\frac{\partial V}{\partial y} + [A(m) - C(k)]\frac{\partial V}{\partial y'} &= 0, \\ [B(k) - m]\frac{\partial V}{\partial y} + [B(m) - C(l)]\frac{\partial V}{\partial y'} &= 0, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

qui doivent être identiques. En effet, le système (14) étant fermé ou normal et les équations (16) n'ayant point lieu en vertu de ce système, il faut qu'elles aient lieu identiquement. Ainsi il vient

$$A(k)=0, \quad A(m)-C(k)=0, \quad B(k)-m=0, \quad B(m)-C(l)=0. \tag{17}$$

Or il est facile de faire voir que l'équation

$$A(m) - C(k) = 0$$

est la conséquence des deux autres

$$A(k) = 0, \qquad B(k) - m = 0.$$

En effet, de l'équation

$$m = B(k)$$

on déduit

$$A(m) = A[B(k)],$$

et, comme on a $A(k) = 0$, il vient

$$A(m) = A[B(k)] - B[A(k)],$$

ou, d'après (15),

$$A(m) = C(k).$$

Les équations (17) se réduiront donc aux suivantes

$$A(k) = 0, \quad m = B(k), \quad B(m) - C(l) = 0. \tag{18}$$

Elles représentent les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (14) ait deux intégrales communes, et déterminent les valeurs générales de k et l.

6. L'intégrale générale de l'équation

$$A(k) = \frac{\partial k}{\partial x'} + k\frac{\partial k}{\partial y'} = 0,$$

est donnée par la formule

$$\psi(x, y, y' - kx', k) = 0, \tag{19}$$

ψ étant une fonction arbitraire.

De là on peut déduire

$$k = \varphi(x, y, y' - kx') \tag{20}$$

dans tous les cas excepté celui, où la dernière des quatre quantités

$$x, y, y' - kx', k$$

ne figure pas dans l'équation (19).

Dans ce cas on obtient

$$y' - kx' = f(x, y)$$

et, par conséquent,

$$k = \frac{y' - f(x, y)}{x'}. \tag{21}$$

La fonction ψ étant arbitraire, les fonctions φ et f le sont également. Nous supposerons que f ne soit pas zéro, car en faisant $f(x, y) = 0$, on aurait $k = \frac{y'}{x'}$ et l'on obtiendrait le cas considéré au n° 4.

Les deux valeurs (20) et (21) de k conduisent à deux formes des intégrales.

Considérons d'abord la valeur (20) de k et prenons $y' - kx'$ pour une des variables indépendantes au lieu de y', ce qui est possible, k étant défini par l'équation (20).

Introduisons la nouvelle variable dans l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial x'} + k \frac{\partial V}{\partial y'} = 0.$$

En désignant par z la quantité $y' - kx'$ et par Λ la fonction V exprimée en t, x, y, z et x' on aura

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'} + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y'}.$$

Or de l'équation

$$z = y' - kx'$$

on déduit

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = -\left(k + x' \frac{\partial k}{\partial x'}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y'} = 1 - x' \frac{\partial k}{\partial y'};$$

et par conséquent il vient

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'} - \left(k + x' \frac{\partial k}{\partial x'}\right) \frac{\partial \Lambda}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y'} = \left(1 - x' \frac{\partial k}{\partial y'}\right) \frac{\partial \Lambda}{\partial z}.$$

De là on obtient

$$\frac{\partial V}{\partial x'} + k \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'} - x' \left(\frac{\partial k}{\partial x'} + k \frac{\partial k}{\partial y'}\right) \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0,$$

et, en vertu de l'équation

$$\frac{\partial k}{\partial x'} + k \frac{\partial k}{\partial y'} = 0,$$

on déduit

$$\frac{\partial \mathsf{\Lambda}}{\partial x'} = 0.$$

Il résulte de là que l'intégrale indépendante de t, que nous désignerons dorénavant par V, est de la forme

(22) $$V = \mathsf{\Lambda}\,(x\,,y\,,z)$$

et l'intégrale dans laquelle figure t, a la forme

$$-\,t + \mathsf{M}\,(x\,,y\,,z).$$

Adoptant maintenant la valeur

$$k = \frac{y' - f(x\,,y)}{x'}$$

on aura

$$\frac{\partial V}{\partial x'} + k\,\frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{y' - f(x\,,y)}{x'}\,\frac{\partial V}{\partial y'} = 0\,.$$

De cette équation on obtient

(23) $$V = \mathsf{\Lambda}\left(x\,,y\,,\frac{y' - f(x\,,y)}{x'}\right)$$

$\mathsf{\Lambda}$ étant une fonction arbitraire.

L'intégrale avec le temps est de la forme

$$-\,t + \mathsf{M}\left(x,\,y,\,\frac{y' - f(x\,,y)}{x'}\right).$$

7. Nous allons maintenant chercher la dépendance mutuelle des deux intégrales communes, et pour embrasser ensemble les deux cas considérés dans le n° précédent désignons par ξ la quantité z, si V est de la forme (22) et la quantité

$$\frac{y' - f(x\,,y)}{x'}$$

si la forme de V est donnée par la formule (23). Soient

$$\mathsf{\Lambda}\,(x\,,y\,,\xi) = \alpha \quad , \quad -\,t + \mathsf{M}\,(x\,,\,y,\,\xi) = \beta,$$

les deux intégrales en question, α et β étant des constantes arbitraires, et

$$\xi = \lambda\ (x\,,y\,,\alpha)$$

la valeur de ξ, déduite de l'équation

$$\mathsf{\Lambda}\,(x\,,y\,,\xi) = \alpha.$$

Substituons-la dans l'équation

$$\mathsf{M}\,(x\,,y\,,\xi) = t + \beta$$

et supposons que celle-ci, après la substitution, devienne

$$\mu\,(x\,,y\,,\alpha) = t + \beta.$$

Différentions cette équation par rapport à t, il viendra

(24) $$\frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot y' = 1.$$

Ce résultat devient une identité, si l'on y remplace α par la fonc-

tion $\Lambda(x, y, \xi)$, car alors il sera le résultat de la différentiation complète de l'intégrale

$$M(x, y, \xi) = t + \beta,$$

dans lequel on a substitué au lieu de

$$\frac{d^2x}{dt^2} \text{ et } \frac{d^2y}{dt^2}$$

respectivement X et Y ou X_1 et Y_1.

La valeur $\Lambda(x, y, \xi)$ de α satisfaisant à l'équation (24) ou, ce qui est le même, à celle-ci

$$dt = \frac{\partial\mu}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\mu}{\partial y}\, dy, \tag{25}$$

il est facile de démontrer que l'équation (25) donne pour dt la même valeur qu'on obtiendrait de l'intégrale

$$\Lambda(x, y, \xi) = \alpha$$

en la résolvant par rapport à dt. Soit cette dernière

$$dt = A\,dx + B\,dy \tag{26}$$

A et B étant des fonctions de x, y, α, savoir

$$A = -\frac{\varphi(x, y, \lambda)}{\lambda}, \quad B = \frac{1}{\lambda},$$

si l'on fait $\xi = z$, et

$$A = -\frac{\lambda}{f(x, y)} \qquad , \qquad B = \frac{1}{f(x, y)}$$

si l'on suppose

$$\xi = \frac{y' - f(x, y)}{x'},$$

λ dans tous les cas désignant $\lambda(x, y, \alpha)$.

La valeur $\alpha = \Lambda(x, y, \xi)$ satisfaisant aux équations (25) et (26) satisfaira aussi à l'équation

$$\left(A - \frac{\partial\mu}{\partial x}\right) dx + \left(B - \frac{\partial\mu}{\partial y}\right) dy = 0,$$

ou à cette autre

$$A - \frac{\partial\mu}{\partial x} + \left(B - \frac{\partial\mu}{\partial y}\right) \frac{y'}{x'} = 0.$$

Or celle-ci ne peut être satisfaite par la valeur mentionnée qu'en faisant

$$A - \frac{\partial\mu}{\partial x} = 0 \quad , \quad B - \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0;$$

car, dans le cas contraire, $\Lambda(x, y, \xi)$ serait une fonction de x, y $\frac{y'}{x'}$, ce qui n'a pas lieu.

Ainsi on a

$$A = \frac{\partial\mu}{\partial x} \qquad , \qquad B = \frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

De là il résulte que l'équation

$$\Lambda(x, y, \xi) = \alpha,$$

étant résolue par rapport à dt, devient

$$dt = \frac{\partial \mu}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu}{\partial y} dy$$

intégrable par quadrature. Son intégrale

$$t + \beta = \mu(x, y, \alpha)$$

n'est autre que l'intégrale commune avec le temps.

Ainsi la recherche des intégrales communes se réduit à celle de l'intégrale indépendante du temps.

8. Considérons d'abord la forme

$$V = \Lambda(x, y, z),$$

z désignant la quantité $y' - kx'$ et k étant défini par l'équation

$$k = \varphi(x, y, z). \tag{27}$$

La première des conditions (18)

$$A(k) = 0$$

est satisfaite par la valeur (27) de k ; quant à la seconde

$$m - B(k) = 0,$$

qui étant développée devient

$$\frac{\partial l}{\partial x'} + k\frac{\partial l}{\partial y'} - 2\left(x'\frac{\partial k}{\partial x} + y'\frac{\partial k}{\partial y} + l\frac{\partial k}{\partial y'}\right) = 0, \tag{28}$$

elle nous donnera la valeur de l.

Prenons x, y, x', z pour variables indépendantes et composons d'abord les dérivées partielles de k au moyen de l'équation (27), ensuite celles d'une fonction quelconque V_1 de x, y, x', y'. En désignant par Λ_1 la fonction V_1 exprimée en x, y, x' et z, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{1 + x'\frac{\partial \varphi}{\partial z}}, &&\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{1 + x'\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\\
&\frac{\partial k}{\partial x'} = -\frac{\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{1 + x'\frac{\partial \varphi}{\partial z}}, &&\frac{\partial k}{\partial y'} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{1 + x'\frac{\partial \varphi}{\partial z}},\\
&\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} - \frac{x'\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{1 + x'\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\frac{\partial \Lambda_1}{\partial z}, &&\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} - \frac{x'\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{1 + x'\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\frac{\partial \Lambda_1}{\partial z}\\
&\frac{\partial V_1}{\partial x'} = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} - \frac{\varphi}{1 + x'\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\frac{\partial \Lambda_1}{\partial z}, &&\frac{\partial V_1}{\partial y'} = \frac{1}{1 + x'\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\frac{\partial \Lambda_1}{\partial z}.
\end{aligned}\right. \tag{29}$$

En faisant $V_1 = l$ on aura les dérivées de l. Substituons-les dans l'équation (28); il viendra

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial l}{\partial x'} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,l + z\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{1 + x'\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

On peut regarder cette équation comme ordinaire à une seule variable x'. Elle est linéaire et du premier ordre. Son intégrale générale se trouve facilement et peut être représentée ainsi

$$(30) \qquad \begin{aligned} l = z\,\Phi &+ 2z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\Phi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) x' \\ &+ \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 z\,\Phi + \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] x'^2, \end{aligned}$$

Φ étant une fonction arbitraire de x, y, z.

La valeur

$$V = \Lambda\,(x\,,\,y\,,\,z)$$

de l'intégrale cherchée satisfait à la première équation

$$\frac{\partial V}{\partial x'} + k\,\frac{\partial V}{\partial y'} = 0$$

du système (14); il nous faut encore satisfaire à la seconde

$$(31) \qquad x'\,\frac{\partial V}{\partial x} + y'\,\frac{\partial V}{\partial y} + l\,\frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

le terme $\frac{\partial V}{\partial t}$ étant maintenant égal à zéro. Quant à la troisième, elle aura lieu en vertu des deux premières.

Pour satisfaire à l'équation (31) transformons-la au moyen des formules (29) en y faisant $V_1 = V$, $\Lambda_1 = \Lambda$; elle se réduit alors à la suivante

$$\begin{aligned} z\,\frac{\partial\Lambda}{\partial y} + l\,\frac{\partial\Lambda}{\partial z} + x'\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial x} + \left(\varphi + z\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial\Lambda}{\partial y} - z\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right] + \\ + x'^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right) - \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

Substituons ici la valeur (30) de l; il viendra

$$\left.\begin{aligned} z\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial y} + \Phi\,\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right) + x'\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial x} + \left(\varphi + z\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial\Lambda}{\partial y} + z\left(2\,\Phi\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right] \\ + x'^2\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial\Lambda}{\partial y} + z\left(\Phi\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right] \end{aligned}\right\} = 0.$$

Les fonctions φ, Φ et Λ sont indépendantes de x'; par conséquent le coëfficient de x', celui de x'^2 et la somme des termes dans lesquels x' ne figure pas, sont séparement égaux à zéro. Ainsi nous aurons trois équations qui se réduisent à deux indépendantes entre elles

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \Phi \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + z\left(\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0.$$

Étant résolues par rapport à

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \Lambda}{\partial y}$$

elles deviennent

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \Phi \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \left[z\left(\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \varphi \Phi\right]\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour satisfaire à l'équation (31) il faut que Λ satisfasse simultanément aux équations (32). Le nombre des variables du système (32) étant trois, et ce système n'étant point fermé, il faut qu'il soit normal. Combinant donc les expressions

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \Phi \frac{\partial \Lambda}{\partial z}\ ,\quad \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \left[z\left(\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \varphi \Phi\right]\frac{\partial \Lambda}{\partial z}$$

pour en former la fonction de Poisson et égalant le résultat à zéro, on aura

$$(33)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left[z\left(\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \varphi \Phi\right]\frac{\partial \Phi}{\partial z} =\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left[z\left(\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \varphi \Phi\right] + \Phi \frac{\partial}{\partial z}\left[z\left(\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \varphi \Phi\right] \end{aligned}$$

ou en développant

$$(34)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(\varphi - z\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} = z\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\Phi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que le système (32) ait une solution.

Maintenant les valeurs (27) de k, (30) de l et $\Lambda(x, y, z)$ de V satisfont au système (14), les fonctions φ et Φ étant assujeties à la condition (34).

9. Nous allons maintenant chercher les conditions nécessaires et suffisantes qu'il faut imposer aux forces X et Y. Elles sont exprimées par l'équation

$$Y - kX = l,$$

qui dans le cas dont nous nous occupons devient

$$(35)\qquad \begin{aligned} Y - \varphi X = z\Phi + 2z\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Phi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)x' +\\ + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} + z\Phi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]x'^2, \end{aligned}$$

φ et Φ étant des fonctions de x, y, z liées entre elles par l'équation

$$(36)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\left(\varphi-z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z}=z\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2\Phi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}+\Phi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$$

et la variable z s'exprimant en x, y, x', y' à l'aide des équations

$$(37)\qquad z=y'-kx' \quad , \quad k=\varphi\,(x,\,y,\,z).$$

Pour avoir l'expression la plus générale des forces X, Y, il nous faut avoir recours à l'intégrale générale de l'équation (36) qui peut être exprimée, comme il est très-facile de le vérifier, de la manière suivante:

Soit u une variable auxiliaire et $F(x, y, u)$ une fonction quelconque de x, y, u. Substituons $F(x, y, u)$ dans les formules

$$(38)\qquad \Phi=\frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad \varphi=F\left[\psi\,(x,\,u)-\int\frac{\partial\left(\frac{1}{F}\right)}{\partial x}\,dy\right],$$

$\psi(x, u)$ étant une fonction arbitraire, et après avoir fait les différentiations et l'intégration, indiquées dans ces formules, remplaçons u par sa valeur en fonction de x, y, z, qui suit de l'équation

$$z=F\,(x,\,y,\,u);$$

alors les formules (38) donneront pour Φ et φ les valeurs les plus générales que ces fonctions puissent avoir, et qui satisfont à l'équation (36).

Si nous substituons ces valeurs dans l'équation (35), nous aurons l'expression la plus générale des forces X, Y en supposant l'une d'elles arbitraire et l'autre définie par cette équation.

Les fonctions arbitraires $F(x, y, u)$ et $\psi(x, u)$ qui y entrent ne dépendent point l'une de l'autre.

Supposons maintenant que l'on donne une des fonctions Φ, φ. La détermination de l'autre dépend alors de l'intégration des équations différentielles ordinaires.

En effet, soit

$$\Phi\,(x,\,y,\,z)$$

l'expression donnée de Φ. Nous trouverons $F(x, y, u)$ en intégrant l'équation ordinaire du premier ordre

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\Phi\,(x,\,y,\,F),$$

et remplaçant la constante arbitraire, qui entrera dans l'intégrale générale par une fonction arbitraire de x et u.

Ensuite nous déterminerons φ en substituant l'expression trouvée de F dans l'équation

$$\varphi=F\left[\psi\,(x,u)-\int\frac{\partial\left(\frac{1}{F}\right)}{\partial x}\,dy\right].$$

Si c'est la fonction φ, qui est donnée en x, y, z, l'autre fonction

Φ sera déterminée par l'intégration de l'équation (36). Or cette intégration se réduit à celle du système d'équations ordinaires

$$dx = \frac{dy}{\varphi - z.\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}} = \frac{dz}{z.\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{d\Phi}{z\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\Phi\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} + \Phi^2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)}\,.$$

Il n'est point nécessaire d'intégrer toutes les trois équations de ce système; les deux équations

$$dx = \frac{dy}{\varphi - z\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}} = \frac{dz}{z\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \tag{39}$$

suffisent. En effet, soit $\varphi\ (x,\ y,\ z)$ l'expression donnée de φ. La fonction $F\,(x,\ y,\ u)$ se déduit alors de l'équation

$$\frac{\varphi\,(x, y, F)}{F} = \psi\,(x, u) - \int \frac{\partial\left(\frac{1}{F}\right)}{\partial x}\,dy,$$

ou de cette autre

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi\,(x, y, F)}{F}\right) = -\,\frac{\partial\left(\frac{1}{F}\right)}{\partial x}\,,$$

qui, en la développant, devient

$$F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \varphi\,\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\,.$$

Or l'intégration de cette équation, qui peut être représentée ainsi

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\varphi - F\,\frac{\partial\varphi}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial y} = F\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,$$

se réduit à celle du système d'équations ordinaires

$$dx = \frac{dy}{\varphi - F\,\frac{\partial\varphi}{\partial F}} = \frac{\partial F}{F\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}}\,. \tag{40}$$

Ce système n'est autre que (39) dans laquelle z est remplacé par F.

Ainsi la fonction φ étant donnée, nous n'avons qu'à intégrer les équations (39) ou (40). Soient

$$\omega\,(x,\ y,\ F) = \text{Constante}$$
$$\sigma\,(x,\ y,\ F) = \text{Constante}$$

les deux intégrales du système (40). Nous aurons la fonction F de l'équation

$$\Pi\,[\omega\,(x,\ y,\ F)\ ,\ \ \sigma\,(x,\ y,\ F),\ u] = 0,$$

Π désignant une fonction arbitraire. Quant à Φ on l'obtiendra de l'équation

$$\Phi = \frac{\partial F}{\partial y}\,.$$

10. Quand on veut reconnaître, si les forces données X et Y satisfont aux conditions du cas qui nous occupe, on sera quelquefois conduit à des opérations algébriques difficiles.

Soient

$$X(x, y, x', y'), \qquad Y(x, y, x', y')$$

les expressions données de X et Y. La quantité $Y - \varphi X$ étant exprimée en x, y, x', z, φ, au moyen de l'équation

$$z = y' - x'\varphi$$

devient égale à la fonction

$$Y(x, y, x', z + x'\varphi) - \varphi X(x, y, x', z + x'\varphi),$$

que nous désignerons pour abréger par l.

Le seul cas dont nous nous occuperons est celui dans lequel les fonctions

$$l, \frac{\partial l}{\partial x'}, \quad \frac{\partial^2 l}{\partial x'^2}$$

ne deviennent point infinies pour $x' = 0$, quels que soient x, y, z, φ. Alors l'équation (35) fait voir que l'expression de l est de la forme

$$(41) \qquad l = zP + 2Qx' + Rx'^2,$$

P, Q et R étant indépendants de x', et ayant respectivement les valeurs que prennent les fonctions

$$\frac{l}{z}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial l}{\partial x'}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 l}{\partial x'^2}$$

pour $x' = 0$. Par conséquent P, Q, R sont des fonctions données de x, y, z et φ. Il est très-facile de s'assurer qu'elles sont de la forme

$$(42) \qquad \begin{cases} P = m + n\varphi \\ Q = p + q\varphi + r\varphi^2 \\ R = s + t\varphi + u\varphi^2 + v\varphi^3 \end{cases}$$

les coëfficients $m, n, p, q, r, s, t, u, v$ étant des fonctions déterminées de x, y, z.

En comparant les valeurs (41) et (35) de l on aura

$$(43) \qquad \begin{cases} \Phi = P, \qquad z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Phi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = Q, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + z\Phi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = R. \end{cases}$$

Tout se réduit donc à savoir s'il existe une valeur convenable de φ, qui satisfait aux équations (43), (41) et (36). Les équations (43) en vertu de la valeur P de Φ deviennent

$$z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}P + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = Q, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + zP\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = R.$$

En les résolvant par rapport à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

on obtient

$$(44)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+P\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{Q}{z}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+(Q-\varphi P)\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\varphi Q}{z}-R=0.$$

Quant à l'équation (36) elle peut d'abord être écrite dans la forme (33), savoir,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\left[z\left(\Phi\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\varphi\Phi\right]\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left[z\left(\Phi\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\varphi\Phi\right]$$
$$+\Phi\frac{\partial}{\partial z}\left[z\left(\Phi\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\varphi\Phi\right]$$

et ensuite, en vertu des équations

$$\Phi=P,\quad z\left(\Phi\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\varphi\Phi=Q-\varphi P,$$

dans la forme

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(Q-\varphi P)\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}(Q-\varphi P)+P\frac{\partial}{\partial z}(Q-\varphi P).$$

Cette équation se réduit en la développant à la suivante

$$\frac{\partial P}{\partial x}+(Q-\varphi P)\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(Q-\varphi P)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=$$
$$=\frac{\partial Q}{\partial y}-\varphi\frac{\partial P}{\partial y}+P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\varphi\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial\varphi}-P-\varphi\frac{\partial P}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+P\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right),$$

et en vertu des équations (44) à cette autre

$$(45)\quad \frac{\partial P}{\partial x}+\varphi\frac{\partial P}{\partial y}+Q\frac{\partial P}{\partial z}+R\frac{\partial P}{\partial\varphi}=\frac{\partial Q}{\partial y}+P\frac{\partial Q}{\partial z}+\frac{Q}{z}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}-\frac{PQ}{z}.$$

Les dérivées partielles qui figurent dans cette équation sont prises en regardant les variables x, y, z, φ comme indépendantes.

La valeur cherchée de φ doit être une des racines de l'équation (45) qui dans le cas général sera du troisième dégré.

Il est très-facile de composer une autre équation à laquelle φ doit satisfaire. En effet, φ étant une solution du système (44) il faut que la fonction de Poisson composée en combinant les deux expressions

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+P\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{Q}{z}\quad,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+(Q-\varphi P)\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\varphi Q}{z}-R$$

donne zéro pour résultat soit identiquement soit en vertu de la valeur cherchée de φ. Nous aurons ainsi une équation qui, en ayant égard à l'équation (45), se réduit à celle-ci

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi Q}{z}-R\right)+(Q-\varphi P)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q}{z}\right)+P\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi Q}{z}-R\right)=0,$$

et en la développant on obtient d'après les équations (44)

$$(46)\quad \frac{\partial Q}{\partial x}+\varphi\frac{\partial Q}{\partial y}+Q\frac{\partial Q}{\partial z}+R\frac{\partial Q}{\partial\varphi}=z\left(\frac{\partial R}{\partial y}+P\frac{\partial R}{\partial z}\right)+Q\frac{\partial R}{\partial\varphi}.$$

Cette équation, dans laquelle les dérivées partielles sont prises dans le même sens que dans l'équation (45), doit être satisfaite par la fonction φ. Dans le cas général elle sera du quatrième degré par rapport à φ.

La résultante obtenue en éliminant φ des équations (45), (46) doit avoir lieu identiquement. Cela nous donnera une équation entre les quantités

$$m,\ n,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u,\ v$$

et leurs dérivées partielles.

Si aucune des équations (45), (46) n'est identique nous essayerons chacune de leurs racines communes en les substituant dans le système (44) et dans l'équation

$$l = zP + 2Qx' + Rx'^2.$$

Si quelques-unes d'entre elles y satisfont, les forces données X et Y satisfont à l'équation (35), qui exprime les conditions du problème. Dans le cas contraire X, Y ne conviennent point.

Si une seule des équations (45), (46) devient identique, nous essayerons d'une manière semblable les racines de l'autre.

Si toutes les deux sont des identités, le système (44) aura une solution, et il faut qu'elle satisfasse identiquement à l'équation

$$l = zP + 2Qx' + Rx'^2.$$

11. Dans tous les cas les deux intégrales cherchées seront trouvées en intégrant d'abord le système normal

$$(47)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial y} + \Phi \dfrac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x} + \left[z\left(\Phi \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \varphi\,\Phi\right] \dfrac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

pour obtenir sa solution $\Lambda(x, y, z)$, ensuite en résolvant l'équation

$$\Lambda(x, y, z) = \alpha$$

par rapport à dt au moyen des équations

$$z = \frac{dy - k\,dx}{dt},\quad k = \varphi(x, y, z)$$

et enfin en prenant une quadrature.

Quant à l'intégration du système (47) elle se réduit à celle de deux équations ordinaires du premier ordre, dont la première est

$$(48)\qquad \frac{dz}{dy} = \Phi.$$

La variable x doit être traitée ici comme une constante. Soit

$$\text{Constante} = \omega(x, y, z)$$

l'intégrale générale de l'équation (48); alors en prenant pour variables indépendantes x, y, ω au lieu de x, y, z dans la seconde équation

du système (47) on obtiendra une équation linéaire et homogène par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega}$$

dans laquelle les quantités

$$y, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial y}$$

ne figureront pas. L'intégration d'une telle équation peut toujours être ramenée à celle d'une équation ordinaire du premier ordre. Son intégrale générale donne la fonction cherchée $\Lambda(x, y, z)$.

12. Considérons maintenant la forme (23) de l'intégrale V. Soit donc

$$V = \Lambda\left(x, y, \frac{y' - f(x, y)}{x'}\right) = \alpha.$$

De là on déduit

$$\frac{y' - f(x, y)}{x'} = \lambda(x, y, \alpha) \tag{48}$$

et de cette équation, en la résolvant par rapport à dt, on obtient

$$dt = -\frac{\lambda}{f}\, dx + \frac{1}{f}\, dy.$$

En vertu de ce que nous avons dit au n° 7 il faut que cette expression de dt soit une différentielle complète, et par conséquent il faut que l'on ait

$$-\frac{\partial\left(\frac{\lambda}{f}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}.$$

On déduit de là la valeur de λ

$$\lambda = f\left[\Pi(x, \alpha) - \int \frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}\, dy\right],$$

$\Pi(x, \alpha)$ étant une fonction arbitraire.

Nous n'avons qu'à substituer la valeur trouvée de λ dans l'équation (48) pour avoir l'intégrale V; elle sera déterminée par la résolution de l'équation

$$\frac{y' - f}{x' f} = \Pi(x, \alpha) - \int \frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}\, dy \tag{49}$$

par rapport à α.

De l'équation (49) on déduit facilement la valeur de dt

$$dt = \frac{dy}{f} - \left[\Pi(x, \alpha) - \int \frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}\, dy\right] dx$$

et l'intégrale avec le temps

$$t+\beta=\int\left\{\frac{dy}{f}-\left[\Pi(x,\alpha)-\int\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}\,dy\right]dx\right\}.$$

Pour obtenir les conditions pour les forces X et Y il nous faut avoir la valeur de l. Nous l'aurons facilement de l'équation

$$x'\frac{\partial V}{\partial x}+y'\frac{\partial V}{\partial y}+l\frac{\partial V}{\partial y'}=0. \tag{50}$$

Faisons pour abréger

$$\zeta=\frac{y'-f}{x'f}+\int\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}\,dy$$

et soit

$$\alpha=V=\Omega(x,\zeta)$$

la valeur de V qu'on déduit de l'équation (49).

Composons les dérivées de V pour les substituer dans l'équation (50); nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial\Omega}{\partial x}-\left[\frac{y'}{x'f^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}\,dy\right]\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{x'f^2}\left(x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y'}=\frac{1}{x'f}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}.$$

En désignant maintenant par $\omega(x,\zeta)$ le quotient

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial x}:\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}$$

on aura de l'équation (50) la valeur suivante de l

$$l=x'^2\left[\omega(x,\zeta)-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}\,dy\right]+2x'y'\frac{\partial\log f}{\partial x}+y'^2\frac{\partial\log f}{\partial y}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles X et Y doivent satisfaire dans le cas en question sont exprimées par l'équation

$$Y-\frac{y'-f}{x'}X=x'^2\left[\omega(x,\zeta)-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}\,dy\right]+2x'y'\frac{\partial\log f}{\partial x}+y'^2\frac{\partial\log f}{\partial y},$$

$\omega(x,\zeta)$ étant une fonction arbitraire de x, et de

$$\zeta=\frac{y'-f}{x'f}+\int\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}\,dy.$$

L'intégrale $V=\Omega(x,\zeta)$ sera déterminée par l'équation

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\omega(x,\zeta)\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}=0.$$

13. Nous allons maintenant appliquer les formules générales au mouvement d'un point sur un plan et sur une surface quelconque sous

l'influence des forces H, K, L, qui ne dépendent que des coordonnées du mobile.

Quant au mouvement d'un point sur un plan, on peut prendre les coordonnées rectangulaires dans ce plan pour x, y et faire dans les formules (5)

$$E = 1 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 1.$$

Alors on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} = M \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = N, \tag{51}$$

M et N ne contenant point x' et y'. Les valeurs de k et l seront données par les formules

$$k = \frac{N - N_1}{M - M_1} \quad , \quad l = \frac{MN_1 - M_1N}{M - M_1},$$

d'où l'on voit que ces quantités ne dépendent pas non plus de x' et y'. Or maintenant k étant une fonction de x, y, il faut prendre les formules des n^{os} 8 et 9 et faire

$$k = \varphi(x, y).$$

En exprimant que la valeur (30) de l ne dépend pas de z et en y supposant $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$, on aura

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \tag{52}$$

et l'on doit que Φ est de la forme

$$\Phi = \frac{\sigma(x, y)}{z},$$

$\sigma(x, y)$ étant indépendant de z.

On déduit des équations (52)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

et on conclut de là que k est une constante.

L'équation (34) en vertu de la valeur constante de φ devient

$$\frac{\partial\sigma(x, y)}{\partial x} + k\,\frac{\partial\sigma(x, y)}{\partial y} = 0,$$

L'intégrale générale de cette équation

$$\sigma(x, y) = \Pi(y - kx),$$

dans laquelle $\Pi(y - kx)$ est une fonction arbitraire, donne pour l la valeur

$$l = z\Phi = \Pi(y - kx).$$

De là nous aurons les conditions pour M et N exprimées par l'équation

$$N - kM = \Pi\,(y - kx). \tag{53}$$

Pour avoir les deux intégrales communes au problème (M, N) et à d'autres problèmes, le plus simple est de substituer au lieu de M et N respectivement les dérivées

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2}$$

dans l'équation (53). Nous aurons de la sorte

$$\frac{d^2\,(y - kx)}{dt^2} = \Pi\,(y - kx). \tag{54}$$

En intégrant cette équation et désignant par $\Pi_1\,(x)$ la fonction $\int \Pi\,(x)\,dx$, les deux intégrales en question seront exprimées ainsi

$$\tfrac{1}{2}\,(y' - kx')^2 - \Pi_1\,(y - kx) = \alpha,$$

$$- t + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\,(y - kx)}{\sqrt{\alpha + \Pi_1\,(y - kx)}} = \beta.$$

Dans la dernière équation, après avoir fait l'intégration, on doit remplacer α par sa valeur

$$\tfrac{1}{2}\,(y' - kx')^2 - \Pi_1\,(y - kx).$$

Considérons maintenant le mouvement d'un point sur une surface. Désignons par x, y les coordonnées symétriques sur cette surface; alors d'après les formules (6) nous aurons

$$X = \frac{N}{F} - \frac{\partial \log F}{\partial x}\,x'^2 \quad , \quad Y = \frac{M}{F} - \frac{\partial \log F}{\partial y}\,y'^2.$$

Soient M_1, N_1 les quantités analogues à M et N qui se rapportent à un autre problème $(X_1\ Y_1)$ sur la même surface, ayant deux intégrales communes avec le problème (X, Y). Nous supposons que M_1 et N_1 ne dépendent point de x', y'. Nous aurons semblablement

$$X_1 = \frac{N_1}{F} - \frac{\partial \log F}{\partial x}\,x'^2 \quad , \quad Y_1 = \frac{M_1}{F} - \frac{\partial \log F}{\partial y}\,y'^2.$$

En désignant par n la quantité

$$\frac{NM_1 - MN_1}{F\,(N - N_1)}$$

nous déduisons des formules précédentes

$$k = \frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{M - M_1}{N - N_1},$$

$$l = \frac{Y_1 X - X_1 Y}{X - X_1} = n + k\,\frac{\partial \log F}{\partial x}\,x'^2 - \frac{\partial \log F}{\partial y}\,y'^2. \tag{55}$$

La quantité k est maintenant de la forme $\varphi\,(x, y)$, par conséquent il faut prendre les formules du n° 8 et n° 9. En faisant

$$y' = z + x'\,\varphi$$

dans l'équation (55) pour exprimer l en fonction de x, y, z, nous aurons

$$l = \left(n - z^2 \frac{\partial \log F}{\partial y}\right) - 2\varphi \frac{\partial \log F}{\partial y} zx' + \varphi \left(\frac{\partial \log F}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \log F}{\partial y}\right) x'^2.$$

Comparons maintenant cette valeur de l avec celle du n° 8

$$l = z\Phi + 2z\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Phi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)x' + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + z\Phi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]x'^2$$

il viendra

$$\Phi = \frac{n}{z} - z\frac{\partial \log F}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Phi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\varphi\frac{\partial \log F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + z\Phi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \varphi\left(\frac{\partial \log F}{\partial x} - \varphi\frac{\partial \log F}{\partial y}\right).$$

Or en remarquant que $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ est égale à zéro, on aura

$$(56) \qquad \Phi = \frac{n}{z} - z\frac{\partial \log F}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\varphi\frac{\partial \log F}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi\left(\frac{\partial \log F}{\partial x} - \varphi\frac{\partial \log F}{\partial y}\right).$$

Les fonctions Φ et φ satisfont à l'équation (34) du n° 8. En vertu de la valeur actuelle de Φ elle devient

$$\frac{1}{z}\left(\frac{\partial n}{\partial x} + \varphi\frac{\partial n}{\partial y} - n\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - z\left(\frac{\partial^2 \log F}{\partial x \partial y} + \varphi\frac{\partial^2 \log F}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \log F}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Les quantités φ, F, n ne dépendant point de z, on aura séparément

$$(57) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial x} + \varphi\dfrac{\partial n}{\partial y} - n\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \log F}{\partial x \partial y} + \varphi\dfrac{\partial^2 \log F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial \log F}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

Les fonctions φ et F satisfont donc aux équations

$$(58) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\varphi\dfrac{\partial \log F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi\left(\dfrac{\partial \log F}{\partial x} - \varphi\dfrac{\partial \log F}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial^2 \log F}{\partial x \partial y} + \varphi\dfrac{\partial^2 \log F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial \log F}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

Les deux premières de ces équations étant représentées ainsi

$$\frac{\partial \log(\varphi F)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \log\left(\frac{\varphi}{F}\right)}{\partial x} = -\varphi\frac{\partial \log(\varphi F)}{\partial y},$$

s'intégrent facilement et l'on obtient

$$(59) \qquad \varphi = \frac{\omega x}{\psi y}, \quad F = \omega x \cdot \psi y$$

ωx et ψy étant des fonctions arbitraires.

Les valeurs (59) satisfont à la troisième équation (58). La première des équations (57) en vertu des valeurs (59) devient

$$\frac{1}{\omega x}\frac{\partial \log n}{\partial x} + \frac{1}{\psi y}\cdot\frac{\partial \log n}{\partial y} = -\frac{\psi' y}{(\psi y)^2}.$$

Elle peut être facilement intégrée. Son intégrale générale est exprimée par l'équation

$$(60)\qquad n = \frac{1}{\psi y}\cdot \Pi\left(\int \omega x\cdot dx - \int \psi y\cdot dy\right),$$

Π désignant une fonction arbitraire. Les équations (59) et (60) conduisent immédiatement à la condition nécessaire et suffisante qu'il faut imposer aux quantités M, N. En effet, d'après les valeurs de k et n nous aurons

$$k = \frac{M - M_1}{N - N_1} = \frac{\omega x}{\psi y}$$

$$n = \frac{NM_1 - MN_1}{F(M - M_1)} = \frac{1}{\omega x\,.\,\psi y}\left(M - \frac{M - M_1}{N - N_1}N\right) = \frac{1}{\omega x\,.\,\psi y}\left(M - \frac{\omega x}{\psi y}\cdot N\right)$$
$$= \frac{1}{\psi y}\cdot\Pi\left(\int \omega x\cdot dx - \int \psi y\cdot dy\right).$$

Cela nous donne

$$(61)\qquad \frac{M}{\omega x} - \frac{N}{\psi y} = \Pi\left(\int \omega x\,.\,dx - \int \psi y\cdot dy\right).$$

C'est la condition cherchée.

Pour avoir les deux intégrales dont nous nous occupons, substituons dans l'équation (61) au lieu de $\frac{M}{\omega x}$ et $\frac{N}{\psi y}$ leurs valeurs qu'on obtient des l'équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{N}{F} - \frac{\partial \log F}{\partial x}x'^2,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{M}{F} - \frac{\partial \log F}{\partial y}y'^2.$$

En vertu de l'équation

$$F = \omega x\cdot\psi y$$

elles deviennent

$$\frac{M}{\omega x} = \psi y\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \psi' y\cdot y'^2 = \frac{d(\psi y\cdot y')}{dt},$$
$$\frac{N}{\psi y} = \omega x\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \omega' x\cdot x'^2 = \frac{d(\omega x\cdot x')}{dt}.$$

En les substituant dans l'équation (61), il viendra

$$-\frac{d^2\left(\int \omega x\,dx - \int \psi y\,dy\right)}{dt^2} = \Pi\left(\int \omega x\,dx - \int \psi y\,dy\right).$$

Par l'intégration de cette équation on obtient les deux intégrales en question. Elles sont

$$(x'\omega x - y'\psi y)^2 + 2\Pi_1\left(\int \omega x\,dx - \int \psi y\,dy\right) = \alpha,$$
$$-t + \int\frac{\omega x\,dx - \psi y\,dy}{\sqrt{\alpha - 2\Pi_1\left(\int \omega x\,dx - \int \psi y\,dy\right)}} = \beta.$$

Nous avons désigné par $\Pi_1 x$ la fonction $\int \Pi x dx$. Après avoir fait l'intégration dans la dernière équation on remplacera α par sa valeur.

L'équation

$$F = \omega x \cdot \psi y$$

fait voir que la surface sur laquelle reste le mobile doit être développable.

Les cas particuliers auxquels nous avons fait l'application des formules générales peuvent aussi être très-facilement traités par la méthode de M. Bertrand.

Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Knotenpunkten.

Von G. Korndörfer in Giessen.

(Fortsetzung des Aufsatzes in Band I., pag. 592.)

Dritter Fall.

Die beiden Knotenpunkte sind nicht die Spitzen einfach berührender Kegel.

§. 1.

Lässt man in der Gleichung $\varphi^2 = 4p^2\psi$ den Kegel ψ in ein Ebenenpaar zerfallen, $\psi = q \,.\, r$, so besitzt die Fläche zwei Knotenpunkte, nämlich die Durchdringungspunkte der Schnittlinie von r und q mit der Fläche φ. Die beiden Ebenen q und r sind zwei singuläre Tangentenebenen, welche die Fläche vierter Ordnung längs Kegelschnitten berühren.

Alle Ebenen des Büschels $q = \lambda^2 r$ schneiden Kegelschnittpaare aus, sie sind an die Stelle der Schaaren des Kegels getreten. Ich lege das Coordinatentetraeder so, dass drei seiner Ecken in die Nebenecken des aus den Schnittpunkten von $p = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $r = 0$ gebildeten vollständigen Vierecks fallen, und die vierte auf die Schnittlinie von $q = 0$, $r = 0$, und zwar harmonich zu den beiden Knotenpunkten und dem Schnitte mit $p = 0$. Die Gleichung

$$\varphi^2 - 4p^2qr = 0$$

nimmt dann die Form an:

$$(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}xp + 2a_{24}yp + a_{44}p^2)^2 = 4p^2(a_1{}^2x^2 - a_2{}^2y^2);$$

und die in dem System $qr + \lambda\varphi + \lambda^2p^2 = 0$ enthaltenen Kegel findet man, indem man die Determinante des Ausdrucks

$$a_1{}^2x^2 - a_2{}^2y^2 + \lambda(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}xp + 2a_{24}yp + a_{44}p^2) + \lambda^2p^2$$

verschwinden lässt, d. h. aus der Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda + a_1^2 & 0 & 0 & a_{14}\lambda \\ 0 & a_{22}\lambda - a_2^2 & 0 & a_{24}\lambda \\ 0 & 0 & \lambda a_{22} & 0 \\ a_{14}\lambda & a_{24}\lambda & 0 & a_{44}\lambda + \lambda^2 \end{vmatrix}$$

oder, nach Weglassung des Factors λ^2:

$$0 = \frac{a_{14}}{a_{11}\lambda + a_1^2} + \frac{a_{24}}{a_{22}\lambda - a_2^2} - \frac{a_{44}}{\lambda} - 1.$$

Diese Gleichung giebt drei Werthe von λ, welche den drei doppelt berührenden Kegeln entsprechen. Die Coordinaten ihrer Spitzen folgen dann aus:

$$(a_{11}\lambda + a_1^2)x = a_{14}\lambda p$$
$$(a_{22}\lambda - a_2^2)y = a_{24}\lambda p$$
$$z = 0.$$

Dieses ist die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher die drei nicht im Schnitte von p, q, r liegenden Ecken des Coordinatentetraeders und die Spitzen der drei doppelt berührenden Kegel enthält.

Die Kegel, welche in den Knotenpunkten die Fläche berühren, werden von der Ebene der Doppelcurve in Kegelschnitten geschnitten; die vier Schnittpunkte eines jeden und der Doppelcurve mit dem zugehörigen Knotenpunkte verbunden, geben acht in der Fläche liegende Geraden. Sie vertheilen sich also in zwei Gruppen zu je vier, die einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Es lässt sich leicht geometrisch einsehen, dass ausser diesen auf der Fläche keine Geraden mehr liegen können. Jede Gerade der einen Gruppe liegt mit einer der andern in einer Ebene, die eine einfache Tangentenebene der Fläche ist. Sie bilden die vier Geradenpaare der Kegelschnittschaar, welche das Ebenenbüschel $q = \lambda^2 r$ aus der Fläche schneidet. Die den Schaaren eines der doppelt berührenden Kegel angehörigen entstehen durch den Schnitt des von jedem der Knotenpunkte an denselben gelegten Tangentenebenenpaares mit der Fläche. Bezeichnet man die Paare von Geraden, deren Ebenen durch beide Knotenpunkte gehen, beziehungsweise durch 1, 5; 2, 6; 3, 7; 4, 8, sodass 1, 2, 3, 4 die Geraden des einen, 5, 6, 7, 8 die des andern Knotenpunktes bedeuten, so sind die Paare der Kegelschnittschaaren der drei doppelt berührenden Kegel

$$\begin{Bmatrix} 1,2; & 8,7 \\ 3,4; & 5,6 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} 1,4; & 6,7 \\ 2,3; & 5,8 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} 1,3; & 6,8 \\ 2,4; & 5,7 \end{Bmatrix}$$

Es folgt dieses leicht aus den früheren Bemerkungen, dass Kegelschnitte aus einer dieser Schaaren sich nur auf der Doppelcurve schneiden können etc.

Mit Hülfe von $q = \lambda^2 r$ zerfällt die Flächengleichung in die beiden Factoren

$$\varphi - 2\lambda pr = 0$$
$$\varphi + 2\lambda pr = 0.$$

Eine dieser Gleichungen in Verbindung mit $q = \lambda^2 r$ giebt die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels; es können in demselben keine conjugirten Schaaren auftreten, da sich beide Factoren nur durch verschiedenes Zeichen von λ unterscheiden. So oft eine Ebene des Büschels die Fläche $\varphi + 2\lambda pr = 0$ berührt, erhält man ein Geradenpaar. Diese Bedingung führt zu einer Gleichung vierten Grades in λ. Bei unserer Wahl des Coordinatensystems ist die Fläche:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2(a_{14} - \lambda a_1)xp + 2(a_{24} - \lambda a_2)yp + a_{44}p^2 = 0$$

die Ebene:

$$a_1(1 - \lambda^2)x - a_2(1 + \lambda^2)y = 0,$$

die Bedingung des Berührens:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} - \lambda a_1 & a_1(1 - \lambda^2) \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} - \lambda a_2 & -a_2(1 + \lambda^2) \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{14} - \lambda a_1 & a_{24} - \lambda a_2 & 0 & a_{44} & 0 \\ a_1(1 - \lambda^2) & -a_2(1 + \lambda^2) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder mit Uebergehung des Factors a_{44}:

$$(a_{14}a_2(1 + \lambda^2) + a_{24}a_1(1 - \lambda^2) - 2a_1a_2\lambda)^2$$
$$+ a_{44}\left\{a_{11}a_2^2(1 + \lambda^2)^2 + a_{22}a_1^2(1 - \lambda^2)^2\right\} = 0.$$

§. 2.

Die beiden obigen Factoren

$$\varphi - 2\varrho\, pr = 0$$
$$\varphi + 2\varrho\, pr = 0$$

wenn $q = \varrho^2 r$ das Ebenenbündel vorstellt, lassen sich ähnlich wie in der citirten Abhandlung, weiter zerfällen mit Zuziehung eines der doppelt berührenden Kegel

$$K = qr + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2 = 0.$$

Hieraus wird

$$\varphi = \frac{K - qr - \lambda^2 p^2}{\lambda}$$

oben eingesetzt, und für den Schnitt mit einer Tangentenebene

$$A + 2\sigma B + \sigma^2 C = 0$$

des Kegels K erhält man die vier Factoren

$$(B + \sigma C) + \varrho r + \lambda p = 0$$
$$(B + \sigma C) + \varrho r - \lambda p = 0$$
$$(B + \sigma C) - \varrho r + \lambda p = 0$$
$$(B + \sigma C) - \varrho r - \lambda p = 0.$$

Der Complex der drei Gleichungen

$$(B + \sigma C) + \varrho r + \lambda p = 0$$
$$q = \varrho^2 r$$
$$A + 2\sigma B + \sigma^2 C = 0$$

stellt die Coordinaten eines variablen Punktes der Fläche als rationale Functionen vierten Grades in ϱ, σ dar.

Behufs der eindeutigen Abbildung auf einer festen Ebene wird jedes der obigen vier Ebenenbündel mit einer festen Ebene geschnitten und in ihr wie früher das Coordinatendreieck fixirt. Es giebt drei verschiedene Gruppen von Abbildungen je nach Wahl des Kegels K und jede enthält wieder zwei Abbildungsarten, entsprechend der dem Kegel zugeordneten Kegelschnittschaar, welche bei derselben benutzt ist. Obige Gleichungen stellen demgemäss nur zwei verschiedene vor, da sie durch Zeichenwechsel von λ paarweise in einander übergehen. Die Bilder aller gegebenen Schnitte sind wieder Curven vierter Ordnung mit zwei festen Doppeltangenten den Durchschnitten von C und r mit der Coordinatenebene.

Es seien nun $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $a_4 b_4$ die Paare von Geraden, welche das Ebenenbüschel ausschneidet, $a_1 a_2$, $b_3 b_4$ die Paare, welche der benutzten Kegelschnittsschaar von K angehören. Es geschieht viermal, dass eines der erstern Paare mit einem der letztern eine gemeinsame Gerade besitzt, die dann in der Abbildung eine feste Tangente giebt. Zwei von diesen, a_1 und a_2, sind zugleich ein Bild des einen, die zwei andern, b_1 und b_2, des andern Knotenpunktes. Die eine Doppeltangente, welche den ganzen Schnitt von $r = 0$ projicirt, muss also auch gleichzeitig beiden Knotenpunkten entsprechen. Bleibt die Tangentenebene von K, welche $a_1 a_2$ enthält, fest, also σ constant, die andere dagegen, d. h. ϱ, variabel, so ist deren Schnittpunkt, der bei der Abbildung benutzt wird, immer der eine Knotenpunkt, der sich auf diese Weise unendlich vieldeutig als Strahlbüschel abbildet. Dasselbe geschieht für den andern, wobei man sich die Ebene $b_3 b_4$ fest denken muss. Beide Knotenpunkte bilden sich demnach als zwei Strahlbüschel ab, die in der einen Doppeltangente einen gemeinsamen Strahl besitzen, a_1 und a_2 gehören dem einen, b_3 und b_4 dem andern an. In Punktcoordinaten übertragen ist das Bild eines ebenen Schnittes eine Curve vierter Ordnung mit zwei festen Doppelpunkten und vier einfachen Punkten, welche letztere paarweise mit dem einen der erstern auf einer Geraden liegen. Jede von diesen Geraden ist das Bild eines der Knotenpunkte; die Verbindungslinien des zweiten Doppelpunkts mit den Fundamentalpunkten $a_1 a_2$, $b_3 b_4$ geben die vier andern Geraden der Fläche. Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels hat zur Abbildung einen Strahlbüschel, dessen Scheitel der

zweite Doppelpunkt ist. Zwei Schaaren eines doppelt berührenden Kegels bilden sich ab als Curvenschaar dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte und mit einem Doppelpunkte in dem zweiten und als Strahlbüschel, dessen Scheitel der erste Doppelpunkt; die vier übrigen Schaaren als Kegelschnittbüschel durch die beiden Doppelpunkte und je zwei der vier einfachen. Die sechs verschiedenen Gruppen von Abbildungen entstehen dadurch, dass sich immer zwei Geraden des einen Knotenpunkts nebst zwei des andern, die nicht mit ihnen in einer Ebene liegen, als Fundamentalpunkte abbilden.

Nimmt man endlich zu Ausgangsebenen r und C die Ebene der Geradenpaare $a_4\, b_4$ und $b_3\, b_4$, so werden die Doppelpunkte zu einfachen, den Bildern der sich nicht schneidenden Geraden a_4 und b_3; letztere bildet sich noch einmal ab, wenn sich die Paare $b_3\, b_4$ und $a_3\, b_3$ durchschneiden, die Gerade b_4 verschwindet ganz aus der Bildebene. Die fünf Fundamentalpunkte liegen jetzt so, dass drei einem Knotenpunkte angehörige a_1, a_2, a_4 auf einer Geraden liegen, die beiden übrigen unendlich nahe gerückt sind und sowohl den zweiten Knotenpunkt, als eine der ihn treffenden Geraden b_3 vorstellen. Hätte man sich des Paares $a_1\, a_2$ bedient, so würden sich die beiden Knotenpunkte in entgegengesetzter Weise abgebildet haben. Es entstehen überhaupt acht verschiedene Abbildungen, die sich in zwei Gruppen zu vier theilen, je nach der Wahl der benutzten Kegelschnittschaar des Kegels K und der Combination ihrer Geradenpaare. Die Zuziehung der beiden andern Kegel zur Abbildung führt immer wieder zu einer der früheren zurück.

§. 3.

Diese so erhaltene Abbildung werde nun zur Untersuchung der auf der Fläche liegenden Geraden und Raumcurven weiter benutzt. Stellen die auf der Geraden liegenden Fundamentalpunkte 1, 2, 3, drei Geraden vor, welche dem durch die Linie 1, 2, 3 abgebildeten Knotenpunkte zugehören, so wird die vierte die Verbindungslinie der beiden unendlich nahen Fundamentalpunkte sein (4). Die vier dem andern Knotenpunkt zugeordneten sind dann die Verbindungslinien der Punkte 1, 2, 3 mit einem der zusammenfallenden (5, 6, 7) und dieser selbst (8). Die acht Geraden bilden zusammen sechs windschiefe Vierecke, die in den Knotenpunkten zwei gemeinsame Ecken besitzen. Je zwei der in einer Ebene liegenden Kegelschnitte des Ebenenbüschels q, r werden durch zwei Gerade durch je einen der zusammenfallenden Punkte abgebildet. Die vier weiteren Schnittpunkte derselben mit dem Bilde der Doppelcurve müssen einander so zugeordnet sein, dass sie paarweise verbunden, durch einen und denselben Punkt P desselben gehen. Er ist der Scheitel des Strahlbüschels, als welcher sich der

Curvenbüschel dritter Ordnung abbildet, der durch den Schnitt des durch die Gerade 4 gelegten Ebenenbüschels mit der Fläche entsteht. Sein entsprechender Punkt P' wird, wie früher, gefunden. Zieht man von P die vier Tangenten an die Curve dritter Ordnung, so müssen deren vier Berührungspunkte paarweise auf zwei Geraden liegen, die durch einen der zusammenfallenden Punkte gehen. Diese beiden Geraden, deren jede doppelt zu rechnen ist, stellen die Bilder der Schnitte der singulären Tangentenebenen mit der Fläche vor. Die Geradenpaare der Kegelschnittschaar sind 1,5; 2,6; 3,7; 4,8.

Drei andere Kegelschnittschaaren bilden sich ab als drei Strahlbüschel mit den Scheiteln 1, 2, 3 und deren conjugirte als Kegelschnittbüschel durch die beiden zusammenfallenden und je zwei der andern Punkte. Jede Schaar enthält zwei einander nicht schneidende Paare, wie schon oben angegeben.

Jeder dieser Kegelschnitte ergänzt sich mit einer Raumcurve sechster Ordnung zu einem vollständigen Durchschnitte der Fläche mit einer Fläche zweiter Ordnung. Die Ergänzungscurve eines durch die Knotenpunkte gehenden wird abgebildet durch eine Curve sechster Ordnung, welche durch alle Fundamentalpunkte geht und in einem der unendlich nahen einen Doppelpunkt besitzt. Es giebt solcher Raumcurven sechster Ordnung eine siebenfach unendliche Schaar. Jede geht durch beide Knotenpunkte, begegnet ihrem Kegelschnitte zweimal auf der Doppelcurve und noch zweimal auf der Fläche und besitzt zwei wirkliche Doppelpunkte auf der Doppelcurve. Die Fläche zweiter Ordnung muss also durch die Knotenpunkte gehen und die gegebene in zwei verschiedenen Punkten berühren.

Es giebt noch sechs siebenfach unendliche Schaaren, die keinen der Knotenpunkte treffen. Die Curven der drei ersten Schaaren bilden sich ab als Curven fünfter Ordnung mit Doppelpunkten in vier Fundamentalpunkten und einem einfachen in einem der drei auf einer Geraden liegenden; die der drei letzten Schaaren als Curven vierter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte und einem Doppelpunkte in einem jener drei. Jede dieser Curven trifft ihren Kegelschnitt zweimal auf der Doppelcurve und noch viermal auf der Fläche und besitzt zwei wirkliche Doppelpunkte auf der Doppelcurve. Curven derselben Schaar schneiden sich in acht, verschiedener Schaaren in neun, aus Schaaren, deren ergänzende Kegelschnitte einander conjugirt sind, in zehn Punkten. Damit ein solches Zerfallen der Schnittcurve eintrete, muss die Fläche zweiter Ordnung die gegebene in vier Punkten berühren.

§. 4.

In Bezug auf die Raumcurven dritter Ordnung, welche auf der Fläche liegen, findet man Folgendes:

1) Es giebt eine doppelt unendliche Schaar, die sich als Geradenschaar durch keinen Fundamentalpunkt abbildet, und deren Curven durch einen Knotenpunkt gehen. Jede Curve der Schaar ist einer der durch ihren Knotenpunkt gehenden Geraden zugeordnet, welche sie ausser in diesem noch in einem weiteren Punkte schneidet. Sie trifft auch alle Geraden des zweiten Knotenpunktes mit Ausnahme der mit ihrer zugeordneten Geraden in einer Ebene liegenden.

2) Durch denselben Knotenpunkt gehen drei doppelt unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch die beiden unendlich nahen und je einen der übrigen Fundamentalpunkte abbilden. Sie sind je einer Geraden ebenso zugeordnet.

Durch den andern Knotenpunkt gehen

3) drei doppelt unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch einen der zusammenfallenden und je zwei der übrigen Punkte abbilden;

4) eine doppelt unendliche Schaar, die sich als Curven dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte und einen Doppelpunkt in einem der zusammenfallenden abbilden.

Die Zuordnung zu den Geraden ihres Knotenpunktes ist wie oben. Alle Curven einer Schaar schneiden sich in einem Punkte, Curven verschiedener Schaaren aber, sobald sie zu einer Gruppe gehören, in zwei Punkten, Curven verschiedener Gruppen, deren zugeordnete Geraden aber in einer Ebene liegen, in drei Punkten.

Jede Curve dieser Schaaren ergänzt sich mit einer Raumcurve fünfter Ordnung zu einem vollständigen Durchschnitt der Fläche mit einer Fläche zweiter Ordnung.

ad 1. Hierzu gehört eine fünffach unendliche Schaar, die sich als Curvenschaar vierter Ordnung durch jeden Fundamentalpunkt und mit Doppelpunkten in jedem der zusammenfallenden abbildet.

ad 2. Hierzu gehören drei fünffach unendliche Schaaren, die sich als Curven dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte bis auf je einen der drei einer Geraden angehörigen abbilden.

Durch den andern Knotenpunkt gehen:

ad 3. drei fünffach unendliche Schaaren, die sich als Curven vierter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte, mit einem Doppelpunkte in einem der zusammenfallenden und je zweien der drei übrigen abbilden.

ad 4. Eine fünffach unendliche Schaar, die sich als Curvenschaar dritter Ordnung durch einen der zusammenfallenden und die drei übrigen Fundamentalpunkte abbildet.

Alle diese Curven begegnen ihrer ergänzenden Raumcurve dritter Ordnung dreimal auf der Doppelcurve und noch viermal auf der Fläche; jede besitzt einen wirklichen Doppelpunkt auf der Doppelcurve. Cur-

ven einer Schaar schneiden sich in fünf, Curven verschiedener Schaaren in sechs, Curven aus Schaaren, deren Ergänzungscurven zugeordneten Geraden angehören, in 7 Punkten.

Damit ein solches Zerfallen der Schnittcurve eintrete, muss die Fläche zweiter Ordnung die gegebene in vier verschiedenen Punkten berühren und durch einen der Knotenpunkte gehen.

§. 5.

Die auf der Fläche liegenden Raumcurven vierter Ordnung gruppiren sich, wie folgt:

1) Es bilden sich drei dreifach unendliche Schaaren als Kegelschnitte durch zwei der Punkte 1, 2, 3 ab.

2) Diesen sind drei dreifach unendliche Schaaren conjugirt, die sich als Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten in beiden zusammenfallenden und je einem der übrigen Fundamentalpunkte abbilden; die Curven dieser Schaaren berühren aber mit zweien ihrer Zweige in dem Fundamentalpunkte 8 die Gerade 4. Durch die beiden letzten Fundamentalpunkte geht jede Curve noch einfach.

3) Es giebt ferner sechs dreifach unendliche Schaaren, die sich als Curven dritter Ordnung durch die beiden zusammenfallenden, einen der andern und einen Doppelpunkt in einem vierten Fundamentalpunkte abbilden. Diese Schaaren sind einander paarweise conjugirt.

Die genannten zwölf Schaaren gehen durch keinen der Knotenpunkte. Jede Curve einer Schaar trifft ihre Ergänzungscurve viermal auf der Doppelcurve und noch sechsmal auf der Fläche. Die Fläche zweiter Ordnung, deren vollständigen Durchschnitt mit der gegebenen Fläche beide ausmachen, muss daher die gegebene in sechs verschiedenen Punkten berühren. Curven derselben Schaar schneiden sich in zwei Punkten; Curven verschiedener Schaaren, aber einer Gruppe, in drei. Alle Curven sind zweiter Species.

4) Es giebt eine vierfach unendliche Schaar erster Species, die sich als Curvenschaar dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte abbildet. Jede Curve ergänzt sich mit einer andern der Schaar zu einem vollständigen Durchschnitt. Sie schneiden sich viermal auf der Doppelcurve und noch viermal auf der Fläche. Sie treffen im Allgemeinen keinen der Knotenpunkte. Diese Raumcurven sind erster Species, und enthalten die ebenen Schnitte als besondere Fälle. Sie enthalten ferner insbesondere eine dreifach unendliche Schaar solcher Curven, die im Knotenpunkt 8 einen wirklichen Knotenpunkt haben, und deren Abbildungen im Punkte 8 einen Doppelpunkt haben; so wie die Schaar, welche sich als Kegelschnittschaar durch die zusammenfallenden Fundamentalpunkte abbildet. Die Curven der letztern Schaar haben in

dem durch 1, 2, 3 abgebildeten Knotenpunkt einen wirklichen Knotenpunkt, und können dem obigen Systeme eingereiht werden, sofern die nur den Knotenpunkt darstellende Gerade 1, 2, 3 dazu gerechnet wird.

5) Es giebt drei dreifach unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch einen der zusammenfallenden und je einen der drei übrigen Fundamentalpunkte abbilden.

6) Diesen sind conjugirt drei dreifach unendliche Schaaren, die sich als Curven dritter Ordnung durch die zusammenfallenden und zwei der übrigen und mit einem Doppelpunkt in einem der ersteren abbilden; die Abbildungen haben also sämmtlich in dem Fundamentalpunkte 8 einen Doppelpunkt und die Gerade 4 zur festen Tangente in demselben. Der Abbildung der aus einer Curve 5) und einer Curve 6) gebildeten vollständigen Durchschnitte ist die Verbindungslinie der Punkte 1, 2, 3 beizuzählen. Diese sechs Schaaren gehen durch beide Knotenpunkte. Jede Curve einer Schaar schneidet ihre Ergänzungscurve dann noch viermal auf der Doppelcurve und viermal in weiteren Punkten der Fläche. Curven einer Schaar schneiden sich in zwei, Curven verschiedener Schaaren in drei Punkten.

§. 6.

Hätte man bei der eindeutigen Abbildung auf einer Ebene zwei der doppelt berührenden Kegel benutzt, so würde man sich der schon früher gebrauchten Formeln

$$
\begin{aligned}
0 &= (\lambda - \lambda')\, p + (B + \varrho C) + (B' + \sigma C') \\
0 &= A + 2\varrho B + \varrho^2 C \\
0 &= A' + 2\sigma B' + \sigma^2 C'
\end{aligned}
$$

bedient haben, um die x als Functionen vierten Grades darzustellen. In der Kegelschnittschaar des einen Kegels sollen die Geradenpaare

$$a_1\, a_2 \quad , \quad b_3\, b_4 \,,$$

in der des andern die Geradenpaare

$$a_1\, a_3 \quad , \quad b_2\, b_4$$

vorkommen. Je zwei der unter einander stehenden Paare haben eine Gerade gemein und ihre beiden andern Geraden schneiden sich ausserdem noch in einem und demselben Punkte der gemeinsamen. Diese müssen sich demnach doppelt abbilden, so dass die ganze Abbildung zwei feste Doppeltangenten und zweimal zwei zusammenfallende einfache Tangenten besitzt. In Punktcoordinaten ausgedrückt, haben alle ebenen Schnitte auf der Bildebene zwei Doppelpunkte und zweimal zwei zusammenfallende Punkte gemein. Die zusammenfallenden stellen je einen der Knotenpunkte und eine der sie treffenden Geraden dar. Dieser Abbildungen giebt es drei verschiedene Gruppen zu je 4

je nach den benutzten Kegeln und deren Kegelschnittschaaren. Sie unterscheiden sich von einander dadurch, dass sich immer zwei andere der nicht in einer Ebene liegenden Geraden als Fundamentalpunkte abbilden. Vier andere Geraden der Fläche entstehen durch die vier Verbindungslinien der Doppelpunkte mit den zusammenfallenden. Die beiden letzten werden durch die Kegelschnitte abgebildet, die man durch die zwei Doppelpunkte, je eins der zusammenfallenden Punktepaare und einen Punkt des andern ziehen kann.

Die Kegelschnitte des Ebenenbüschels bilden sich ab als Kegelschnitte durch die Doppelpunkte und je einen Punkt der zusammenfallenden Punktepaare; zwei andere Schaaren als Strahlbüschel, deren Scheitel die Doppelpunkte sind, und deren conjugirte als Curven dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte und einen der Doppelpunkte und mit einem Doppelpunkt im andern; die beiden letzten endlich als Kegelschnittbüschel durch eines der zusammenfallenden Punktepaare und durch die beiden Doppelpunkte.

Vierter Fall.

Die Fläche vierter Ordnung besitzt drei besondere Knotenpunkte.

§. 1.

Lässt man in der Flächengleichung $(p^2 + \psi - \chi)^2 = 4p^2\psi$ (zweiter Fall, §. 5) den Kegel χ in ein Ebenenpaar qr zerfallen, so besitzt die Fläche $(p^2 + \psi - qr)^2 = 4p^2\psi$ oder $(p^2 + qr - \psi)^2 = 4p^2 qr$ drei besondere Knotenpunkte, nämlich die beiden Schnittpunkte der Durchschnittslinie der Ebenen $q=0$, $r=0$ mit der Fläche zweiten Grades $p^2 - \psi = 0$ und die Spitze des Kegels ψ, welche auf der Fläche $p^2 - qr = 0$ liegt. Der letztere ist die Spitze eines die Fläche einfach berührenden Kegels; ausserdem existirt noch ein doppelt berührender Kegel, welcher auf dieselbe Weise gefunden wird, wie im zweiten Fall angegeben. Die Ebenen $q = 0$, $r = 0$ sind zwei singuläre Tangentenebenen, welche die Fläche in Kegelschnitten berühren; die vier Schnittpunkte von $p = 0$, $\psi = 0$, $qr = 0$ geben die vier Rückkehrpunkte der Doppelcurve. Legt man durch die drei Knotenpunkte eine Ebene, so besitzt deren Schnitt mit der Fläche fünf Doppelpunkte, er muss demnach in ein Geradenpaar und einen Kegelschnitt zerfallen. Daraus kann man schliessen, dass die Verbindungslinien des dritten Knotenpunktes mit den beiden ersten in der Fläche liegende Geraden sind. Durch eine ähnliche Rechnung, wie sie früher angestellt wurde, kann man zeigen, dass in allen Punkten dieser beiden Linien die Fläche dieselbe Tangentenebene besitzt; sie hat daher noch zwei singuläre Tangenten-

ebenen, welche längs dieser Geraden berühren. Der Kegel K, der sich im dritten Knotenpunkte an die Fläche anschliesst, wird sie demnach auch längs dieser beiden Geraden berühren und ebenso je einen der Kegel K' und K'', denen die Fläche sich in den beiden ersten Knotenpunkten anschliesst. Jeder der Kegel K' und K'' hat dann noch zwei Kanten, welche die Doppelcurve treffen; dadurch ergeben sich vier weitere auf der Fläche liegende Geraden. Es ist auch leicht einzusehen, dass ausser diesen sechs keine weitern existiren können.

Ich will die Verbindungslinien der Knotenpunkte mit A_1 und B_1 und die vier zuletzt erhaltenen Geraden mit a_1, a_2 und b_1, b_2 bezeichnen. Es müssen dann a_1 und b_1, a_2 und b_2 in einer Ebene liegen, sodass a_1, b_1; a_2, b_2; A_1, B_1, die Geradenpaare sind, welche in der Kegelschnittschaar des Büschels $q = \lambda^2 r$ auftreten. Ihre Ebenen sind einfache Berührungsebenen der Fläche. Legt man durch jede der Geraden A_1 und B_1 die beiden Tangentenebenen an den Kegel ψ, so werden diese die Fläche in den Geraden a_1, a_2, b_1 und b_2 schneiden, sodass in dieser Weise sich die vier Geradenpaare der beiden Kegelschnittschaaren des Kegels ψ ergeben. Die eine enthält die Paare:

$$A_1\, a_1 \quad , \quad B_1\, b_2 ,$$

die andere die Paare:

$$A_1\, a_2 \quad , \quad B_1\, b_1 ,$$

weil sich die Kegelschnitte einer Schaar nur in der Spitze von ψ schneiden können. Legt man durch jeden der beiden zusammengehörigen Knotenpunkte Tangentenebenen an den doppelt berührenden Kegel, so schneiden diese die Fläche in den Geradenpaaren $a_1\, a_2$, $A_1\, A_1$ und $b_1\, b_2$, $B_1\, B_1$, sodass

$$a_1\, a_2 \;,\; B_1\, B_1$$

der einen Schaar,

$$b_1\, b_2 \;,\; A_1\, A_1$$

der andern angehören, denn es können sich Kegelschnitte einer Schaar nur auf der Doppelcurve, Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren nur zweimal schneiden. Es folgt aber auch hieraus, dass die Spitze des doppelt berührenden Kegels in der Schnittlinie der beiden singulären Tangentenebenen $A_1\, A_1$ und $B_1\, B_1$ sowie in der Schnittlinie der Ebenen der Paare $a_1\, a_2$ und $b_1\, b_2$ liegt.

Seien die Schnitte der Ebene der Doppelcurve mit den vier verschiedenen Kegeln entsprechend mit K, K', K'' und ψ bezeichnet. K wird die Doppelcurve in zwei verschiedenen Punkten berühren, K' sowie K'' werden in je einem von diesen berührt und müssen ausserdem die Doppelcurve in zwei verschiedenen Punkten a_1, a_2 und b_1, b_2 schneiden. Die von den zwei Berührungspunkten an ψ gezogenen vier Tangenten werden die Doppelcurve bezüglich in a_1, a_2, b_1, b_2 treffen.

§. 2.

Behufs der eindeutigen Abbildung auf eine Ebene kann man sich zuerst des Ebenenbüschels $q - \sigma^2 r = 0$ und der variabeln Tangentenebene $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ des Kegels ψ bedienen. Mit Hülfe derselben zerlegt sich die Gleichung der Fläche in die vier Factoren:

$$\begin{aligned} p + (B + \varrho\, C) + \sigma r &= 0 \\ p - (B + \varrho\, C) + \sigma r &= 0 \\ p + (B + \varrho\, C) - \sigma r &= 0 \\ p - (B + \varrho\, C) - \sigma r &= 0. \end{aligned}$$

Diese stellen aber in Wirklichkeit nur zwei verschiedene vor, da durch Zeichenwechsel des σ die beiden letzten in die beiden ersten übergehen. Die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} q - \sigma^2 r &= 0 \\ A + 2\varrho B + \varrho^2 C &= 0 \\ p + (B + \varrho\, C) + \sigma r &= 0 \end{aligned}$$

drücken die Coordinaten eines variablen Punktes der Fläche als rationale Functionen vierten Grades in ϱ, σ aus.

Solcher Abbildungen giebt es zwei Gruppen je nach der benutzten Kegelschnittschaar von ψ. Kommen in derselben die Paare

$$a_1\, A_1 \qquad b_2\, B_1$$

vor, in der Schaar des Ebenenbüschels die Paare

$$a_1\, b_1 \qquad a_2\, b_2 \qquad A_1\, B_1,$$

so tritt viermal der Fall ein, dass zwei dieser Paare eine gemeinsame Gerade besitzen, die sich wieder als solche abbildet und für alle Bilder der ebenen Schnitte der Fläche eine feste gemeinsame Tangente liefert. Die Bilder der Schnitte der Ebenen von r und C sind die zwei festen Doppeltangenten; die erste stellt zugleich die beiden zusammengehörigen Knotenpunkte, die letzte den dritten Knotenpunkt dar. Denkt man sich eine der Tangentenebenen von ψ, z. B. die Ebene des Paares $a_1\, A_1$ fest, als oϱ constant, dagegen die andere, also σ, variabel, so durchschneiden sich beide beständig in einem Knotenpunkt, sodass dessen Abbildung ein Strahlbüschel mit den festen Strahlen a_1, A_1 wird. Der zweite Knotenpunkt bildet sich in gleicher Weise ab, wenn die Ebene des Paares $b_2\, B_1$ fest gedacht wird. Dieser Strahlbüschel besitzt die festen Strahlen b_2 und B_1; die eine Doppeltangente ist beiden gemeinsam. Um zu der Abbildung des dritten Knotenpunkts zu gelangen, denkt man sich die Ebene des Paares $A_1\, B_1$ fest, dagegen die Tangentenebene $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ variabel. Es entsteht ebenfalls ein Strahlbüschel mit den festen Strahlen A_1, B_1 und der zweiten Doppeltangente. Ueberträgt man die Abbildung auf Punktcoordinaten, so liegt der eine Doppelpunkt mit den Fundamentalpunkten

a_1, A_1, sowie mit b_2, B_1, der andere dagegen nur mit A_1 und B_1 in einer Geraden. Die beiden ersten Geraden sind die Bilder der zusammengehörigen Knotenpunkte, die dritte ist das Bild des letzten. Vier Gerade haben sich als Fundamentalpunkte a_1, b_2, A_1, B_1 abgebildet, die beiden letzten a_2 und b_1 ergeben sich als Verbindungslinien des zweiten Doppelpunktes mit b_2 und a_1.

Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels q, r wird in der Abbildung zu einem Strahlbüschel, dessen Scheitel der zweite Doppelpunkt ist. Der Büschel, dessen Scheitel der erste Doppelpunkt, stellt eine Schaar des Kegels ψ vor und die conjugirte Schaar bildet sich als Kegelschnittbüschel durch die beiden Doppelpunkte, a_1 und b_1 ab. Die beiden letzten Schaaren endlich bilden sich als Kegelschnittbüschel durch die beiden Doppelpunkte und durch a_1, B_1, bezüglich b_2, A_1 ab.

Die beiden Gruppen von Abbildungen unterscheiden sich von einander nur dadurch, dass jedesmal zwei andere, einander nicht schneidende Geraden als Fundamentalpunkte abgebildet sind.

Werden die Ebenen zweier Geradenpaare $a_2\,b_2$ und $b_2\,B_1$ zu Ausgangsebenen rC benutzt, so werden die x zu Functionen dritten Grades, die Curven der vierten Ordnung gehen in Curven dritter Ordnung über, die beiden Doppelpunkte werden zu einfachen, den Bildern der sich nicht schneidenden Geraden a_2 und B_1, die Gerade B_1 bildet sich noch einmal ab, die zwei letzten Punkte entstehen durch den Schnitt der Paare $a_1\,A_1$, $a_1\,b_1$ und $a_1\,A_1$, $A_1\,B_1$. Die fünf Fundamentalpunkte liegen so, dass drei derselben, a_1, a_2, A_1, auf einer Geraden liegen, ebenso die beiden zusammengefallenen B_1 und A_1. Erstere Gerade und die zusammenfallenden Punkte B_1 stellen die zusammengehörigen Knotenpunkte vor, die zweite Gerade ist das Bild des dritten. Die Verbindungslinien von B_1 mit a_1 und a_2 geben die dem Knotenpunkte B_1 angehörigen Geraden b_1 und b_2. Hätte man die Paare $a_1\,A_1$ und $a_1\,b_1$ zu Ausgangsebenen angenommen, so würden sich a_1 und a_2 als Gerade, b_1 und b_2 als Fundamentalpunkte abgebildet haben. Die beiden zusammengehörigen Knotenpunkte liegen dann in entgegengesetzter Weise in der Bildebene.

Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels bildet sich ab als Strahlbüschel, dessen Scheitel das zusammenfallende Punktepaar A_1 ist; die zwei Schaaren des Kegels ψ als zwei Strahlbüschel mit den Scheiteln b_1 und b_2; die zwei Schaaren des doppelt berührenden Kegels als Strahlbüschel mit dem Scheitel B_1 und als Kegelschnittbüschel durch b_1, b_2 und das zusammenfallende Punktepaar.

Die zwei verschiedenen Gruppen der Abbildung unterscheiden sich von einander nur durch das entgegengesetzte Verhalten der zusammengehörigen Knotenpunkte.

Werden die Ebenen der Paare $A_1\,B_1$ und $b_2 B_1$ als Ausgangsebenen

benutzt, so ergeben dieselben als Fundamentalpunkte die Bilder der sich nicht schneidenden Geraden A_1 und b_2. Beide bilden sich noch einmal ab durch den Schnitt der Paare $A_1\,B_1$ und $a_1\,A_1$, sowie $a_2\,b_2$ und $b_2\,B_1$. Ein letzter Punkt a_1 entsteht durch den Schnitt von $a_1\,b_1$ und $a_1\,A_1$. Von den fünf Fundamentalpunkten sind zweimal zwei zusammengefallen in A_1 und b_2, und die beiden unendlich nahen Punkte A_1 liegen mit dem fünften a_1 in einer Geraden. Diese Gerade und b_2 stellen die zusammengehörigen Knotenpunkte, das zusammenfallende Punktepaar A_1 den dritten vor. Die Verbindungslinie des Paares b_2 giebt eine vierte Gerade, die beiden letzten entstehen aus der Verbindung von b_2 mit A_1 und a_1. Solcher Abbildungen giebt es zwei Gruppen, da sich die zusammengehörigen Knotenpunkte entgegengesetzt abbilden können und jede enthält in jeder Gruppe zwei Abbildungsarten, je nachdem zwei einander nicht treffende Geraden a_1 und b_2 oder a_2 und b_1 sich als Fundamentalpunkte oder Verbindungslinien abbilden.

Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels und eine Schaar des Kegels ψ werden in der Abbildung zu Strahlbüscheln mit den Scheiteln b_2 und A_1. Die zu letzterer conjugirte Schaar wird ein Kegelschnittbüschel durch a_1, einen der Punkte A_1 und das zusammenfallende Punktepaar b_2. Die beiden Schaaren des doppelt berührenden Kegels bilden sich ab als Strahlbüschel mit dem Scheitel a_1 und als Kegelschnittbüschel durch die zusammenfallenden Punktepaare.

Benutzt man bei der Abbildung den doppelt berührenden Kegel K, statt ψ, und ist $A' + 2\varrho B' + \varrho^2 C' = 0$ eine variable Tangentenebene desselben, so zerfällt die Flächengleichung in die vier Factoren

$$\begin{aligned}
\lambda p + (B' + \varrho C') + \sigma r &= 0\\
\lambda p - (B' + \varrho C') + \sigma r &= 0\\
\lambda p + (B' + \varrho C') - \sigma r &= 0\\
\lambda p - (B' + \varrho C') - \sigma r &= 0,
\end{aligned}$$

wobei auch wieder zu bemerken ist, dass die beiden letzten aus den ersten durch Zeichenwechsel von σ hervorgehen. Die Coordinaten eines variablen Punktes der Fläche drücken sich aus dem Complex der drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
q - \sigma^2 r &= 0\\
A' + 2\varrho B' + \varrho^2 C' &= 0\\
\lambda p + (B' + \varrho C') + \sigma r &= 0
\end{aligned}$$

als rationale Functionen vierten Grades in ϱ, σ aus.

Die benutzte Kegelschnittschaar von K enthalte die Paare $a_1\,a_2$ und $B_1\,B_1$. Der eine Doppelpunkt der Abbildung giebt ein Bild der beiden zusammengehörigen Knotenpunkte. Bleibt die Ebene des Paares $a_1 a_2$ fest, während die Ebene des Büschels $q - \sigma^2 r = 0$ sich bewegt, so bildet sich der eine Knotenpunkt unendlich vieldeutig als Punktreihe ab mit den festen

Punkten a_1 und a_2. Bleibt die Ebene des Paares B_1 B_1 fest, so bildet sich der andere unendlich vieldeutig als Punktreihe ab und zwar muss in dieser der andere Fundamentalpunkt B_1 doppelt auftreten, weil bei der Bewegung der variablen Ebene des Büschels zwei unendliche nahe Lagen der Ebene auf die Schnittcurve A_1 B_1 führen. Die vier einfachen Fundamentalpunkte liegen demnach so, dass erstens a_1 und a_2, zweitens die beiden unendlich nahen Punkte B_1 B_1 mit dem einen Doppelpunkte auf Geraden liegen. Beide Geraden sind die Bilder der zusammengehörigen Knotenpunkte, das zusammenfallende Punktepaar B_1 B_1 ist ein Bild des dritten. Die Verbindungslinien des zweiten Doppelpunkts mit a_1 und a_2 geben die Geraden b_1 und b_2, die Verbindungslinie mit B_1 giebt das Bild der Geraden A_1. Die zwei Gruppen der Abbildung unterscheiden sich von einander dadurch, dass sich einmal B_1, einmal A_1 als Fundamentalpunkt abbildet.

Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels bildet sich ab als Strahlbüschel, dessen Scheitel der zweite Doppelpunkt ist, die beiden Schaaren des Kegels ψ als Kegelschnittbüschel durch die zwei Doppelpunkte, einen der zusammenfallenden und einen der übrigen Punkte. Die eine Schaar des doppelt berührenden Kegels bildet sich als Strahlbüschel ab, dessen Scheitel der erste Doppelpunkt ist, die conjugirte als Curvenbüschel dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte mit einem Doppelpunkte im zweiten doppelten Fundamentalpunkte.

Werden zu Ausgangsebenen die Ebenen sich schneidender Geradenpaare benutzt, so kommt man zu den früheren Abbildungen zurück.

Ich gebrauche endlich die beiden Kegel ψ und K zur Abbildung. Die vier Factoren der Flächengleichung werden

$$\lambda p + (B + \varrho C) + (B' + \sigma C') = 0$$
$$\lambda p + (B + \varrho C) - (B' + \sigma C') = 0$$
$$\lambda p - (B + \varrho C) + (B' + \sigma C') = 0$$
$$\lambda p - (B + \varrho C) - (B' + \sigma C') = 0.$$

Die Coordinaten eines variablen Punktes der Flächen ergeben sich aus den drei Gleichungen:

$$\lambda p + (B + \varrho C) + (B' + \sigma C') = 0$$
$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$$
$$A' + 2\sigma B' + \sigma^2 C' = 0.$$

Die benutzte Kegelschnittschaar von ψ enthalte die Paare a_1 A_1, b_2 B_1, die von K die Paare a_1 a_2, B_1 B_1. Die Paare a_1 A_1 und a_1 a_2 besitzen die Gerade a_1 gemeinsam und die andern Geraden A_1 und a_2 durchschneiden sich in demselben Punkte von a_1. Die Gerade a_1 muss sich demnach zweimal abbilden, ebenso die Gerade B_1. Der Knotenpunkt, welcher die Spitze des Kegels ψ ist, bildet sich als Strahlbüschel ab, dem der Doppelstrahl a_1 angehört. Dieser selbst, sowie der Strahlbüschel mit dem Scheitel B_1 sind die Bilder der zusammengehörigen Knotenpunkte.

In-Punktcoordinaten ausgedrückt, liegen die zusammenfallenden Punkte B_1 mit dem einen Doppelpunkt auf einer Geraden, der andere, sowie das zusammenfallende Punktepaar a_1 a_1 haben dagegen keine besondere Lage gegen einander. Die Verbindungslinie des zweiten Doppelpunktes mit a_1 giebt die Gerade A_1; beide Doppelpunkte beziehungsweise mit a_1 und B_1 verbunden, sowie der Kegelschnitt durch dieselben, durch die zusammenfallenden Punkte a_1 und einen der Punkte B_1, liefern die Geraden a_2, b_1 und b_2. Solcher Abbildungen giebt es vier Gruppen je nach den benutzten Kegelschnittschaaren, sie unterscheiden sich von einander dadurch, dass sich B_1 und A_1, sowie a_1, a_2 und b_1, b_2 als Punkte der Geraden abbilden können.

Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels bildet sich ab als Kegelschnittschaar durch die Doppelpunkte und je einen der zusammenfallenden Punkte, die Schaaren des Kegels ψ als Strahlbüschel mit dem zweiten Doppelpunkt zum Scheitel und als Kegelschnittbüschel durch beide Doppelpunkte und durch beide Punkte des zusammenfallenden Punktepaares a_1, die beiden letzten Schaaren des Kegels K als Strahlbüschel mit dem ersten Doppelpunkt zum Scheitel und als Curvenbüschel dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte, mit einem Doppelpunkt im zweiten doppelten Fundamentalpunkte.

Werden die Ebenen sich schneidender Geradenpaare zu Ausgangsebenen C und C' benutzt, so kommt man auf die früheren Abbildungen zurück.

§. 3.

Ich gehe jetzt zur Untersuchung der auf der Fläche liegenden Raumcurven dritter und vierter Ordnung über.

Ich lege dabei die Anordnung der Fundamentalpunkte zu Grunde, dass 1, 2, 3, sowie die unendlich nahe gerückten 4, 5 mit 1 in eine Gerade zu liegen kommen.

1) Es giebt eine doppelt unendliche Schaar von Raumcurven dritter Ordnung, die sich als Geradenschaar durch keinen der Fundamentalpunkte abbildet.

2) Es giebt eine doppelt unendliche Schaar, die sich als Kegelschnittschaar durch die Punkte 2, 3 und einen der zusammenfallenden abbildet. Diese beiden Schaaren gehen durch den dritten Knotenpunkt und durch je einen der beiden ersten, so dass sie die dem andern zugehörigen Geraden schneiden.

3) Es giebt zwei Schaaren, die sich als Kegelschnittschaaren durch einen der zusammenfallenden Punkte, und durch 1, 2 bez. 1, 3 abbilden.

4) Es giebt zwei Schaaren, die sich als Kegelschnittschaaren durch die beiden zusammenfallenden Punkte und einen der Punkte 2 oder 3

abbilden. Die Schaaren aus jeder dieser beiden letzten Gruppen sind einem der zusammengehörigen Knotenpunkte so zugeordnet, dass sie ihn treffen, eine der ihm zugeordneten Geraden nochmals, aber nicht die mit ihr in einer Ebene liegende des andern Knotenpunkts.

Diese sechs Schaaren von Raumcurven dritter Ordnung ergänzen sich mit Raumcurven fünfter Ordnung zu vollständigen Durchschnittcurven.

ad 1. Hierzu gehört eine fünffach unendliche Schaar, die sich als Curvenschaar dritter Ordnung durch 2, 3 und die zusammenfallenden Punkte abbildet.

ad 2. Hierzu gehört eine fünffach unendliche Schaar, die sich als Curvenschaar dritter Ordnung durch die Fundamentalpunkte 1, 2, 3 und einen der zusammenfallenden abbildet.

Jede dieser Curven schneidet ihre Ergänzungscurve dreimal auf der Doppelcurve und dreimal auf der Fläche. Curven derselben Schaar schneiden sich noch in fünf, Curven verschiedener Schaaren in sechs Punkten. Die Fläche zweiter Ordnung geht durch je zwei Knotenpunkte und berührt die Fläche vierter Ordnung in drei verschiedenen Punkten.

ad 3. Hierzu gehören zwei fünffach unendliche Schaaren, die sich als Curven vierter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte, mit Doppelpunkten in einem der zusammenfallenden und in 2 oder 3 abbilden.

ad 4. Hierzu gehören zwei fünffach unendliche Schaaren, die sich als Curven dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte ausser 2 oder 3 abbilden.

Jede Curve dieser Schaaren schneidet ihre Ergänzungscurve ausser in einem der zusammengehörigen Knotenpunkte dreimal auf der Doppelcurve und noch viermal auf der Fläche. Curven derselben Schaar schneiden sich noch in fünf, Curven verschiedener Schaaren in sechs, Curven aus Schaaren, deren Ergänzungscurven zugeordneten Geraden angehören, in sieben Punkten. Die durch eine solche Curve gelegte Fläche zweiter Ordnung geht durch einen Knotenpunkt und berührt die Fläche vierter Ordnung in vier verschiedenen Punkten.

Die Raumcurven vierter Ordnung bilden sich in folgender Weise ab:

1) Es giebt zwei dreifach unendliche Schaaren, deren Curven einander ergänzen, und die sich als Kegelschnittschaaren durch einen der zusammenfallenden und einen der Punkte 2 oder 3 abbilden. Sie gehen durch die drei Knotenpunkte. Zwei sich ergänzende Gebilde treffen einander ausser in diesen noch viermal auf der Doppelcurve und dreimal auf der Fläche.

2) Es giebt eine dreifach unendliche Schaar, die sich als Kegelschnittschaar durch 1 und einen der zusammenfallenden Punkte abbildet.

3) Die Curven dieser Schaar werden von denen einer andern dreifach unendlichen Schaar ergänzt, die sich als Curvenschaar dritter Ordnung

durch alle Fundamentalpunkte ausser 1 mit einem Doppelpunkt in einem der zusammenfallenden Punkte abbildet.

Beide Schaaren gehen durch die zwei zusammengehörigen Knotenpunkte, zwei sich ergänzende Curven schneiden sich ausser in diesen noch viermal auf der Doppelcurve und viermal auf der Fläche.

4) Es giebt zwei dreifach unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch 1 und einen der Punkte 2 oder 3 abbilden.

5) Diese Schaaren werden von zwei andern ergänzt, die sich als Curven dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte ausser 1 und mit einem Doppelpunkt in 3 oder 2 abbilden.

Die Schaaren unter 4) und 5) gehen durch den dritten Knotenpunkt und zwei sich ergänzende Curven treffen einander noch viermal auf der Doppelcurve und fünfmal auf der Fläche.

6) Es giebt zwei Schaaren, die sich beziehungsweise als Kegelschnitte durch das zusammenfallende Punktepaar und als Kegelschnitte durch die Punkte 2 und 3 abbilden. Sie sind dem durch 1, 2, 3 abgebildeten Knotenpunkte zugeordnet, in welchem sie einen Doppelpunkt haben.

7) Es giebt eine Schaar, die sich als Curvenschaar dritter Ordnung durch 1, 2, 3 mit einem Doppelpunkte in 4 oder 5 abbildet; die Curven dieser Schaar haben in dem durch 4, 5 dargestellten Knotenpunkte einen wirklichen Doppelpunkt.

8) Endlich giebt es eine vierfach unendliche Schaar erster Species, die sich als Curvenbüschel dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte abbildet. Die Curven dieser Schaar ergänzen sich paarweise zu vollständigen Durchschnittscurven. Ergänzungscurven schneiden einander ausser auf der Doppelcurve noch viermal auf der Fläche. Sowohl die Schaaren 6), als die Schaar 7) können als in dieser Schaar enthalten betrachtet werden.

Fünfter Fall.

Die Fläche vierter Ordnung besitzt vier besondere Knotenpunkte.

§. 1.

Lässt man in der Gleichung $(p^2 + qr - \chi)^2 = 4p^2qr$ noch den Kegel χ in ein Ebenenpaar zerfallen, $\chi = s \cdot t$, so treten an die Stelle des dritten Knotenpunktes, der Kegelspitze von χ, zwei neue, nämlich die Durchdringungspunkte der Schnittlinie der Ebenen s und t mit der Fläche zweiten Grades $p^2 - qr = 0$. Die Flächengleichung hat jetzt die Form:

$$(p^2 + qr - st)^2 = 4p^2 qr$$

oder

$$(p^2 + st - qr)^2 = 4p^2 st.$$

Die vier Ebenen $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$ sind vier singuläre Tangentenebenen, welche die Fläche längs Kegelschnitten berühren. Die beiden Ebenenbüschel $q = \sigma^2 r$ und $s = \varrho^2 t$ schneiden Kegelschnittschaaren aus der Fläche aus, ebenso die Tangentenebenen des letzten doppelt berührenden Kegels, dessen Spitze durch eine ähnliche Rechnung wie früher gefunden wird. Ich will das eine Knotenpunktepaar mit $K_1 K_2$, das zweite mit $K_3 K_4$ bezeichnen. Die Verbindungslinien $K_1 K_3$, $K_1 K_4$, $K_2 K_3$, $K_2 K_4$ müssen in der Fläche liegen, denn die durch drei Knotenpunkte, z. B. K_1, K_2, K_3 gelegte Ebene schneidet eine Curve vierter Ordnung mit fünf Doppelpunkten aus, welche demnach in ein Geradenpaar und einen Kegelschnitt zerfallen muss. Ausser diesen vier können auf der Fläche keine weiteren Geraden mehr enthalten sein. Durch dieselbe Rechnung wie früher kann man zeigen, dass alle Punkte einer dieser vier Geraden die nämliche Tangentenebene besitzen, sodass die Fläche noch vier singuläre Tangentenebenen zulässt, die längs Geraden berühren. Die vier Verbindungslinien der Knotenpunkte bilden vier Paare und ein windschiefes Viereck. Von den vier Kegeln, die in den Knotenpunkten die Fläche ringsum berühren, werden immer je zwei der nicht zusammengehörigen sich längs einer Geraden und in dieser die Fläche berühren. Die Ebene der Doppelcurve schneidet die vier Kegel in Kegelschnitten, jeder Kegelschnitt berührt die Doppelcurve in zwei verschiedenen Punkten und in jedem dieser Punkte berühren sich zwei der Kegelschnitte. Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels $q = \sigma^2 r$ ergiebt sich durch den Schnitt mit der Flächenschaar

$$(p + \sigma r)^2 = st.$$

Da letztere immer eine Kegelschaar vorstellt, deren Spitze nie auf der entsprechenden Ebene $q = \sigma^2 r$ liegen kann, so werden auch keine Geradenpaare in dieser Schaar auftreten können, ausser den beiden, welche durch die Verbindung der zwei Knotenpunkte $K_1 K_2$ mit dem dritten und vierten entstehen. Seien diese vier Geraden mit a_1, a_2, b_1, b_2 bezeichnet, so sind a_1, a_2 und b_1, b_2 die Geradenpaare dieses Büschels. Die des Büschels $s = \varrho^2 t$ werden dann $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ sein.

Werden durch je einen der zwei zusammengehörigen Knotenpunkte die beiden Tangentenebenen an den doppelt berührenden Kegel K gelegt, so muss jede derselben die Fläche in einem Geradenpaare schneiden. Diese Geradenpaare sind dann nichts anders als die doppelt gerechneten Geraden a_1, a_2, b_1, b_2, so dass $a_1 a_1$, $b_2 b_2$ in der einen, $a_2 a_2$, $b_1 b_1$ in der andern Kegelschnittschaar von K auftreten.

Die vier singulären Tangentenebenen, welche die Fläche vierter Ordnung längs Geraden berühren, schneiden sich daher in der Spitze des doppeltberührenden Kegels.

§. 2.

Um die Fläche eindeutig auf eine Ebene abzubilden, bediene ich mich der beiden Ebenenbüschel $q = \sigma^2 r$ und $s = \varrho^2 t$. Mit deren Hülfe zerlegt sich die Flächengleichung in die vier Factoren

$$\begin{aligned} p + \sigma r + \varrho t &= 0 \\ p + \sigma r - \varrho t &= 0 \\ p - \sigma r + \varrho t &= 0 \\ p - \sigma r - \varrho t &= 0. \end{aligned}$$

Da die drei letzten Gleichungen aus der ersten durch Zeichenwechsel von ϱ oder σ hervorgehen, erhält man hier nur eine einzige Klasse von Abbildungen. Aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} p + \sigma r + \varrho t &= 0 \\ q &= \sigma^2 r \\ s &= \varrho^2 t \end{aligned}$$

stellen sich die Coordinaten eines variabeln Punktes der Fläche als rationale Functionen vierten Grades in ϱ und σ dar. In den beiden Kegelschnittschaaren kommen beziehungsweise die Geradenpaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ und $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ vor. Ich denke mir unter ϱ, σ sofort Punktcoordinaten, dann sind die Bilder aller ebenen Schnitte Curven vierter Ordnung mit zwei gemeinsamen Doppelpunkten und vier einfachen Punkten, den Bildern der Geraden a_1, a_2, b_1, b_2. Der eine Doppelpunkt ist zugleich ein Bild des einen Knotenpunktepaares, der zweite ist ein Bild des andern. Bleibt einmal die Ebene des Paares $a_1 b_1$, dann die des Paares $a_2 b_2$ fest, also ϱ constant, dagegen σ variabel, so wird man beziehungsweise als Schnitt einmal den ersten Knotenpunkt, dann den zweiten Knotenpunkt des ersten Knotenpunktepaars erhalten. Beide bilden sich demnach als zwei Punktreihen ab, welche die festen Punkte a_1, b_1 und a_2, b_2 und den einen Doppelpunkt als gemeinsamen Punkt besitzen. Dasselbe gilt für die beiden andern Knotenpunkte, wenn die Ebenen der Paare $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$ fest gedacht werden, wobei ϱ variabel und σ constant. Die beiden andern Knotenpunkte bilden sich ebenfalls als zwei Punktreihen mit den festen Punkten a_1, a_2 und b_1, b_2 ab, welche dann noch in dem zweiten Doppelpunkte einen gemeinsamen Punkt besitzen. Daraus folgt: die vier Punkte a_1, a_2, b_1, b_2 bilden die Hauptecken eines vollständigen Vierecks, von welchen zwei Nebenecken die beiden Doppelpunkte sind. Die vier Seiten des Vierecks sind die Bilder der vier Knotenpunkte. Die Kegelschnittschaaren der beiden Ebenenbüschel bilden sich ab als Strahl-

büschel, deren Scheitel die Doppelpunkte sind; die beiden Schaaren des doppelt berührenden Kegels K als zwei Kegelnittbüschel durch die Doppelpunkte und je zwei der übrigen Fundamentalpunkte.

Werden zu Ausgangsebenen die Ebenen der Geradenpaare $a_1\, a_2$ und $b_1\, a_1$ benutzt, so werden die Doppelpunkte zu einfachen Punkten, den Bildern der sich nicht schneidenden Geraden a_2 und b_1. Diese beiden bilden sich noch einmal ab bei dem Schnitt der Paare $a_1\, a_2$ mit $b_2\, a_2$ und $b_1\, b_2$ mit $a_1\, b_1$. Als fünfter Fundamentalpunkt ergiebt sich b_2 als Schnitt der Paare $b_1\, b_2$ und $a_2\, b_2$. Die fünf Fundamentalpunkte liegen jetzt so, dass zweimal zwei zusammengefallen sind und mit dem fünften in einer Geraden liegen. Die zusammengefallenen Punkte sind zugleich die Bilder zweier Knotenpunkte und die Linie $a_2\, b_1$ ist ihre Verbindungslinie, welche in der Fläche liegt. Die beiden Geraden sind die Bilder der beiden andern Knotenpunkte und ihr Schnitt b_2 ist deren Verbindungslinie; hätte man die Ebenen der Paare $b_1\, b_2$ und $a_1\, b_1$ zu Ausgangsebenen benutzt, so würden sich die Knotenpunkte in entgegengesetzter Weise abgebildet haben, es giebt demnach zwei Gruppen von Abbildungen. Die Kegelschnittschaaren der Ebenenbüschel bilden sich ab als Strahlbüschel, deren Scheitel die zusammenfallenden Punkte sind; die beiden andern als Strahlbüschel, dessen Scheitel der fünfte Fundamentalpunkt ist und als Kegelschnittbüschel durch die beiden Punktepaare. Die Bilder der vier Rückkehrpunkte der Doppelcurve sind die Hauptecken eines vollständigen Vierecks, von welchem zwei Nebenecken die zusammenfallenden Fundamentalpunkte sind; die vier Seiten desselben sind die Bilder der vier Kegelschnitte, längs welcher die singulären Tangentenebenen die Fläche berühren.

Geht man bei der Abbildung von einem Ebenenbüschel und dem doppelt berührenden Kegel aus, so zerfällt die Flächengleichung in die Factoren:

$$\begin{aligned}
\lambda p + \sigma r + (B + \mu C) &= 0 \\
\lambda p - \sigma r + (B + \mu C) &= 0 \\
\lambda p + \sigma r - (B + \mu C) &= 0 \\
\lambda p - \sigma r - (B + \mu C) &= 0,
\end{aligned}$$

wenn $A + 2\mu B + \mu^2 C = 0$ die Gleichung einer variabeln Tangentenebene des Kegels K ist. Diese vier Gleichungen reduciren sich wieder auf zwei, weshalb zwei Gruppen von Abbildungen existiren, je nach der Wahl des Ebenenbüschels, und jede Gruppe enthält wieder zwei je nach der Wahl der benutzten Kegelschnittschaar von K. Die Coordinaten eines variabeln Punktes der Fläche ergeben sich aus den drei Gleichungen:

$$\begin{gathered}
\lambda p + \sigma r + (B + \mu C) = 0 \\
A + 2\mu B + \mu^2 C = 0 \\
q = \sigma^2 r.
\end{gathered}$$

Das Ebenenbüschel enthalte die Paare $a_1\, a_2$ und $b_1\, b_2$, die benutzte Kegelschnittschaar von K die Paare $a_1 a_1$ und $b_2 b_2$. Der eine Doppelpunkt stellt ein Bild der zwei zusammengehörigen Knotenpunkte des Ebenenbüschels vor. Werden die Paare $a_1\, a_1$ und $b_2\, b_2$ beziehungsweise festgehalten bei veränderlichem σ, so bilden sich beide noch unendlich vieldeutig als zwei Punktreihen ab, wobei die Punkte a_1 und b_2 doppelt auftreten. Diese sind dann zugleich die Bilder der zwei andern Knotenpunkte. Die Verbindungslinien des zweiten Doppelpunktes mit a_1 und b_2 sind die zwei andern Geraden der Fläche. Die vier verschiedenen Gruppen der Abbildung unterscheiden sich von einander dadurch, dass sich die Knotenpunktepaare in entgegengesetzter Weise abbilden, und einmal die sich nicht schneidenden Geraden a_1, b_2, das andere Mal a_2, b_1 als Fundamentalpunkte auftreten. Die Kegelschnittschaar des einen Ebenenbüschels bildet sich ab als Strahlbüschel, dessen Scheitel der zweite Doppelpunkt ist, die des andern als Kegelschnittbüschel durch die zwei Doppelpunkte und je einen der zusammenfallenden Punkte. Die eine Schaar des Kegels K bildet sich als Strahlbüschel ab, dessen Scheitel der erste Doppelpunkt, die conjugirte Schaar als Curvenbüschel dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte mit einem Doppelpunkt im zweiten Doppelpunkte. Werden zu Ausgangsebenen die Ebenen zweier Geradenpaare benutzt, so kommt man auf die frühere Abbildung zurück.

§. 3.

Die auf der Fläche liegenden Raumcurven dritter Ordnung sind folgende:

1) Es giebt eine doppelt unendliche Schaar, deren Curven sich als Gerade durch keinen Fundamentalpunkt abbilden.

2) Es giebt zwei doppelt unendliche Schaaren, deren Curven sich als Kegelschnitte durch je eines der zusammenfallenden Punktepaare und einen Punkt des andern abbilden.

3) Es giebt eine doppelt unendliche Schaar, deren Curven sich als Kegelschnitte durch je einen Punkt jedes Punktepaars und durch den fünften Fundamentalpunkt abbilden.

Diese vier Schaaren sind den Knotenpunkten so zugeordnet, dass sie immer durch zwei solche gehen, deren Verbindungslinie in der Fläche enthalten ist, und dass sie die Verbindungslinie der beiden andern schneiden.

Die sie ergänzenden Raumcurven fünfter Ordnung sind folggnde:

ad 1. Hierzu gehört eine fünffach unendliche Schaar, die sich als Curvenschaar dritter Ordnung durch die beiden Punktepaare abbildet.

ad 2. Hierzu gehören zwei fünffach unendliche Schaaren, die

sich als Curven dritter Ordnung durch je ein Punktepaar, einen Punkt des Paares andern und durch den fünften Fundamentalpunkt abbilden.

ad 3. Hierzu gehört eine fünffach unendliche Schaar, die sich als Curvenschaar vierter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte mit einen Doppelpunkt in je einem Punkte jedes Punktepaares abbildet.

Jede Raumcurve fünfter Ordnung schneidet ihre Ergänzungscurve ausser in den zwei zugehörigen Knotenpunkten noch dreimal auf der Doppelcurve und dreimal auf der Fläche. Die durch eine solche Curve fünfter Ordnung zu legende Fläche zweiter Ordnung muss folglich durch zwei Knotenpunkte gehen und die Fläche vierter Ordnung in drei Punkten berühren, damit ein solches Zerfallen der Schnittcurve eintrete. Jede dieser Raumcurven fünfter Ordnung besitzt einen wirklichen Doppelpunkt auf der Doppelcurve.

Die auf der Fläche liegenden Raumcurven vierter Ordnung gruppiren sich in folgender Weise.

1) Es giebt eine dreifach unendliche Schaar, die sich als Kegelschnittschaar durch je einen Punkt jedes zusammenfallenden Punktepaares abbildet. Jede Curve der Schaar geht durch die vier Knotenpunkte und ergänzt sich mit einer andern Curve der Schaar zu einem vollständigen Durchschnitt. Ergänzungscurven schneiden einander viermal in den Knotenpunkten, viermal auf der Doppelcurve und zweimal auf der Fläche. Die Fläche zweiter Ordnung, welche zwei sich ergänzende Curven enthält, geht durch alle Knotenpunkte und berührt die gegebene in zwei Punkten.

2) Es giebt zwei dreifach unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch den fünften Fundamentalpunkt und jede durch einen Punkt eines Punktepaares abbilden. Jede Schaar geht durch ein Knotenpunktepaar und ergänzt sich mit den Curven der beiden folgenden Schaaren zu einem vollständigen Durchschnitt.

3) Diese bilden sich ab als Curven dritter Ordnung durch die beiden Punktepaare und einen Doppelpunkt in einem der zusammenfallenden. Ergänzungscurven schneiden einander zweimal in den Knotenpunkten, viermal auf der Doppelcurve und viermal auf der Fläche, welche letztere einfache Berührungspunkte mit der entsprechenden Fläche zweiter Ordnung sind.

4) Es giebt zwei dreifach unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch je ein Punktepaar abbilden. Die Curven jeder Schaar besitzen einen Doppelpunkt in einem Knotenpunkte und ergänzen sich mit Raumcurven erster Species zu vollständigen Durchschnitten. Die Fläche zweiter Ordnung geht durch einen Knotenpunkt und berührt die gegebene noch in vier verschiedenen Punkten.

5) Sodann giebt es zwei Schaaren, die sich als Curven dritter Ordnung durch ein Paar und den fünften Punkt, und mit einem

Doppelpunkte im Orte des andern Paares abbildet. Diese Curven haben einen wirklichen Doppelpunkt in dem durch letztern dargestellten Knotenpunkt.

6) Es giebt eine vierfach unendliche Schaar, die sich als Curvenschaar dritter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte abbildet. Die Curven der Schaar gehen durch keinen der Knotenpunkte und ergänzen sich mit andern Curven der Schaar zu vollständigen Durchschnitten. Die Fläche zweiter Ordnung wird die gegebene in vier verschiedenen Punkten berühren. Die Curven dieser Schaar sind erster Species.

Als in dieser Schaar enthalten kann man die besondern Schaaren 4) und 5) ansehen.

Giessen im November 1868.

Ueber Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen, und darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner algebraischer Curven, mit besonderer Berücksichtigung der Curven dritter Ordnung.

Von P. Güssfeldt in Bonn.

Einleitung.

1. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der im 47ten Bande des Crelle'schen Journals befindlichen Abhandlung J. Steiners: „Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren."

Diese ausserordentlich inhaltreiche Abhandlung enthält eine Fülle von Resultaten und damit zugleich eine natürliche Aufforderung die Herleitung derselben zu versuchen; ein solcher Versuch schien mir eine wissenschaftliche Berechtigung zu haben, weil die Beschäftigung mit der grossen Steiner'schen Hinterlassenschaft als eine der Aufgaben der jetzt lebenden Geometer anerkannt ist, und aus diesem Grunde zögerte ich nicht, ein Gebiet zu betreten, auf dem sich Mathematiker ersten Ranges bereits bewegt haben, und noch bewegen.

Indess habe ich mich wegen des ausserordentlichen Umfangs der citirten Steiner'schen Abhandlung zunächst auf einen Theil derselben beschränkt und beziehen sich die abgeleiteten Resultate 1) auf die allgemeine Theorie der von Steiner betrachteten besonderen Curven, 2) auf das Auftreten derselben bei Betrachtungen an allgemeinen Curven, und 3) auf die Anwendung dieser Resultate auf die Curven dritter Ordnung.

Die von mir zur Anwendung gebrachten Beweismittel sind gemischter Natur; das Fundament derselben ist stets der Analysis entnommen, aber die hieraus gezogenen Folgerungen sind nicht selten durch rein geometrische Betrachtungen gewonnen. Der analytische

Charakter fast aller in der Steiner'schen Abhandlung auftretenden Probleme ist der der Elimination einer gewissen Anzahl Grössen aus eben so viel homogenen Gleichungen verschiedener Grade; die in diesen Gleichungen auftretenden Coefficienten sind nicht unabhängig von einander, sondern sind Functionen einer geringeren Anzahl gegebener Grössen; die geschickte Benutzung dieser Abhängigkeit macht es häufig möglich, die verlangte Elimination wirklich auszuführen, so dass das Resultat brauchbar ist; aber nicht in allen Fällen ist mir dies gelungen, und dann habe ich durch andere Ueberlegungen das gesuchte Resultat bewiesen.

Von wesentlichem Nutzen war es für mich, durch Herrn Clebsch auf die Zweckmässigkeit des symbolischen Rechnens für die in Rede stehende Arbeit aufmerksam gemacht worden zu sein. Es ist dies namentlich von Bedeutung für den letzten Theil derselben, in welchem ich bei einigen der dort vorkommenden symbolischen Rechnungen mich speciell des Rathes und der Unterstützung dieses meines hochgeschätzten Lehrers erfreuen konnte.

Die besonderen Curven, welche Steiner betrachtet, sind Curven, welche einen Mittelpunkt haben; Steiner sagt*) [§ 1, pag. 7]:

„Unter Mittelpunkt einer Curve m^{ten} Grades C^m wird ein solcher „in ihrer Ebene liegender Punkt $\mathfrak{M}$ verstanden, welcher die Eigen- „schaft hat, dass jede durch ihn gezogene unbegrenzte Gerade S die „Curve in solchen m Punkten schneidet, welche paarweise gleichweit „von ihm abstehen."

2. Es empfiehlt sich nun, namentlich für die Rechnung, nicht die Mittelpunktscurven selbst, sondern eine beliebige Projection derselben zu betrachten; wir nennen alsdann die Projection des Mittelpunktes den „harmonischen Pol" und die Projection der unendlich fernen Geraden die „harmonische Gerade" der projicirten Curve. Irgend zwei Punkte der Curve, denen in der ursprünglichen Curve zwei gleichweit vom Mittelpunkte abstehende, aber in entgegengesetzter Richtung gelegene Punkte entsprechen, sollen „einander entsprechende" oder „conjugirte" Punkte derselben in Bezug auf den harmonischen Pol und die harmonische Gerade heissen; dann folgt, dass ein conjugirtes Punktepaar harmonisch getrennt wird durch den harmonischen Pol und die harmonische Gerade.

Offenbar lassen sich alle Punkte einer Ebene vermittelst eines Poles m und einer Geraden G zu conjugirten Punktenpaaren aa' in

*) Anmerkung. Die eckigen Klammern [ ] beziehen sich auf die Seiten- oder Paragraphenzahl der Steiner'schen Abhandlung im 47^{ten} Bande des Crelle'schen Journals; die runden Klammern ( ) auf die Nummern dieser Arbeit.

der Weise zusammenordnen, dass m auf der Geraden $\overline{aa'}$ liegt und mit G das Punktepaar aa' harmonisch trennt; und ebenso alle Geraden der Ebene zu conjugirten Geradenpaaren AA' in der Weise, dass G durch den Schnittpunkt von $\overline{AA'}$ geht und der durch letzteren und den Pol m gelegte Strahl mit G das Geradenpaar AA' harmonisch trennt.

Alsdann finden folgende bekannte Sätze statt:

I. Die den Punkten a einer Geraden A conjugirten Punkte liegen wieder auf einer Geraden A', die zu A conjugirt ist; zwei unendlich nahen Punkten auf A entsprechen zwei unendlich nahe auf A'; und der dualistisch entgegengesetzte:

II. Die den Geraden A eines Büschels mit dem Centrum a conjugirten Geraden gehen wieder durch einen und denselben Punkt a', der zu a conjugirt ist; zwei unendlich nahen Strahlen durch a entsprechen zwei unendlich nahe durch a'.

III. Sich selbst conjugirte Punkte sind die Punkte der Geraden G und der Punkt m, und nur diese.

IV. Sich selbst conjugirte Geraden sind die Geraden, welche durch den Punkt m gehen und die Gerade G, und nur diese.

3. Bei den nachfolgenden Rechnungen sind folgende zwei Bezeichnungen gebraucht:

$$1)\ a_x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$
$$2)\ (abc) = \Sigma \pm a_1b_2c_3;$$

ferner sollen unter $(ab)_i$, $(i = 1, 2, 3)$ die nach den unbestimmten Elementen genommenen Unterdeterminanten in

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

verstanden werden.

Die homogenen Coordinaten eines Punktes x sollen, wenn nicht ausdrücklich etwas Anderes festgesetzt ist, durch x_1, x_2, x_3 bezeichnet werden, und analog die Coordinaten einer Geraden u durch u_1, u_2, u_3; unter $\varkappa x + \lambda y$ verstehen wir einen Punkt, dessen Coordinaten

$$\varkappa x_i + \lambda y_i\ (i = 1, 2, 3)$$

sind, also einen Punkt der Verbindungslinie von x und y; und unter $\mu u + \nu v$ die Gerade, deren Coordinaten $\mu u_i + \nu v_i$ sind; also eine Gerade, welche durch den Schnitt der Geraden u und v geht.

Unter

$$f(x^n)$$

verstehen wir eine ganze rationale homogene Function n^{ten} Grades in den Variablen x_1, x_2, x_3, und unter

$$f(x^{n-k}y^k) = 0$$

die k^{te} Polare des Punktes y in Bezug auf die Curve $f(x^n) = 0$, so dass z. B.

$$f(x^{n-2}y^2) \equiv \frac{1}{n(n-1)} \Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k .$$

Diese Bezeichnung lässt sich ausdehnen auf Polaren von Polaren, so dass ich mir unter

$$f(x^{n-k-i} y^k z^i) = 0$$

die k^{te} Polare von y der i^{ten} Polare von z vorzustellen habe.

Verstehe ich weiter unter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ irgend drei der Zahlen $0, 1 \ldots n$, welche der Gleichung genügen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = n$$

und richte ich die Bezeichnung der Coefficienten $A_{11..22..33..}$ von $f(x^n)$ so ein, dass der Coefficient von $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ bis auf den numerischen Factor

$$\frac{n!}{\alpha_1! \, \alpha_2! \, \alpha_3!},$$

aus $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3}$ erhalten wird, wenn ich dem Buchstaben A die Indices 1, 2, 3 so oft nebeneinander anfüge, als bezüglich α_1, α_2, α_3 angeben, so ist

$$a_x^n = 0$$

die symbolische Gleichung der Curve, weil ich aus dieser Gleichung durch Ausführung des eben angegebenen Prozesses zur wirklichen Gleichung der Curve gelangen kann.

Hiernach stellt beispielsweise

$$a_x^3 = 0$$

die Curve dritter Ordnung

$$\left.\begin{array}{l} A_{111}x_1^3 + 3A_{112}x_1^2x_2 + 3A_{113}x_1^2x_3 + 3A_{122}x_1x_2^2 + 6A_{123}x_1x_2x_3 \\ + 3A_{133}x_1x_3^2 + A_{222}x_2^3 + 3A_{223}x_2^2x_3 + 3A_{233}x_2x_3^2 + A_{333}x_3^3 \end{array}\right\} = 0$$

vor.

Alsdann wird

$$f(x^{n-k}y^k) \equiv a_x^{n-k} a_y^k$$

und

$$a_x^{n-k} a_y^k = 0$$

stellt in symbolischer Form die Gleichung der k^{ten} Polare von y in Bezug auf $f(x^n) = 0$ vor.

Da das Resultat der Rücksubstitution aus der symbolischen Form in die wirkliche ganz unabhängig ist von der Bezeichnung der symbolischen Buchstaben a, so kann ich denselben bei übrigens gleichen Annahmen durch jeden beliebigen anderen, etwa $b, c, \ldots$ ersetzen und erhalte:

$$a_x^n = b_x^n = c_x^n \dots .$$

Sollen die symbolischen Coefficienten auch da eingeführt werden, wo die entsprechenden wirklichen Coefficienten nicht mehr linear vorkommen, so muss man, um die Rücksubstitution eindeutig zu machen, so viel verschiedene symbolische Coefficienten einführen, als die Dimension des Ausdrucks in den Coefficienten beträgt; wollte man z. B. den Cubus von $f(x^3)$ symbolisch darstellen, so dürfte man nicht setzen a_x^9 sondern $a_x^3 \cdot b_x^3 \cdot c_x^3 = f^3(x^3)$.

Wir werden uns der symbolischen Bezeichnungen fast ausschliesslich bedienen und stellen hier deshalb zwei Identitäten auf, die wichtig sind für die hier vorzunehmenden symbolischen Rechnungen:

$$(abc)\, d_x \equiv (dbc)\, a_x + (adc)\, b_x + (abd)\, c_x,$$

und das Quadrat derselben in der Form:

$$(abc)\,(abd)\, c_x d_x \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}(abc)^2\, d_x^2 + \frac{1}{2}(abd)^2\, c_x^2 \\ -\frac{1}{2}(acd)\, b_x^2 - \frac{1}{2}(bcd)\, a_x^2 \\ +(acd)\,(bcd)\, a_x\, b_x; \end{cases}$$

die erste Gleichung soll kurzweg die **Identität**, die zweite der **Productsatz** heissen.

Die Identität geht, wenn man darin für x die Unterdeterminanten aus zwei Reihen:

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{matrix}$$

setzt, über in

$$(abc)\,(dgh) \equiv (dbc)\,(agh) + (adc)\,(bgh) + (abd)\,(cgh).$$

und soll diese die **zweite Form der Identität** heissen.

Erster Theil.

Von den Bedingungen, welche eine Curve erfüllen muss, wenn sie einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade hat.

4. **Das Wesen unserer Curven besteht darin, dass sie auf jeder durch den harmonischen Pol gelegten Geraden eine Involution bestimmen, von welcher ein Doppelpunkt in den Pol, der andere in die harmonische Gerade fällt.**

Ist daher der Grad n der Curve ungerade, und zerfällt dieselbe nicht in die harmonische Gerade und eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, wodurch sie aufhören würde eine eigentliche Curve n^{ter} Ordnung zu sein, so muss der Pol ein Punkt derselben sein; denn da jede durch den

harmonischen Pol gelegte Gerade von der Curve in einer ungeraden Anzahl von Punkten geschnitten wird, so muss einer dieser Punkte sich selbst conjugirt sein, d. h. (2. III.) entweder in den harmonischen Pol oder in die harmonische Gerade fallen; der letztere Fall ist ausgenommen, also bleibt nur der erstere; und zwar ist der Pol ein Wendepunkt; weil die Tangente in demselben durch die zu jeder Seite von ihm unendlich nahe gelegenen Punkte gehen muss. Geht ausserdem ein zweiter Zweig durch diese Curve, so folgt, dass noch ein dritter hindurchgehen muss, weil eine beliebige, durch den Pol gezogene Gerade die Curve so schneiden muss, dass im Pol selbst eine ungerade Anzahl von Schnittpunkten vereinigt ist; es können also nur 1 oder 3 oder 5 .... Zweige von Curven durch den Pol gehen und für jeden derselben muss der Pol ein Wendepunkt sein. Hingegen muss für ein gerades n die Anzahl der Schnittpunkte der Curve mit einem durch den Pol gelegten Strahl, die im Pole selbst vereinigt sind, eine gerade sein, d. h. $= 0$ oder $= 2$ oder $= 4$ ....., weil die Summe der in den Pol fallenden und ausserhalb desselben gelegenen Schnittpunkte eine gerade ist [§ 1.]. Die Bedingungsgleichungen werden deshalb andere sein für ein gerades, wie für ein ungerades n.

Es sei zunächst $n = 2\mu$ und C^n sei die gegebene Curve; ferner bezeichne ξ den harmonischen Pol und γ die harmonische Gerade, y einen beliebigen Punkt der Geraden γ (so dass also $\gamma_y = 0$), so wird

$$\xi + \lambda y$$

ein auf der gegebenen Curve C^n

$$a_x^n = 0$$

gelegener Punkt sein, sobald λ der Gleichung n^{ten} Grades

$$a_{\xi+\lambda y}^n = (a_\xi + \lambda a_y)^n = 0$$

genügt; da nun der Voraussetzung gemäss diese n Punkte $\xi + \lambda y$ sich zu Punktepaaren der durch ξ, y als Doppelpunkten gegebenen Involution zusammenordnen müssen, so muss jeder Wurzel λ eine zweite, $-\lambda$, entsprechen, d. h. es müssen in der Entwicklung

$$0 = a_\xi^n + n_1 a_\xi^{n-1} a_y \lambda + n_2 a_\xi^{n-2} a_y^2 \lambda^2 + \cdots + n_1 a_\xi a_y^{n-1} \lambda^{n-1} + a_y^n \lambda^n.$$

die Coefficienten ungerader Potenzen von λ verschwinden, was folgendes System von μ Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned} a_\xi^{n-1} a_y &= 0 \\ a_\xi^{n-3} a_y^3 &= 0 \\ \cdots&\cdots \\ a_\xi a_y^{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Aber diese Gleichungen müssen bestehen, welche Lage auch der Punkt

y auf der Geraden γ haben mag. Fixirt man auf γ zwei Punkte α, β ganz willkürlich, so stellt sich y unter der Form dar:

$$y = \alpha + \varkappa\beta$$

wo jedem Werthe des Parameters $\varkappa$ ein Punkt y auf γ entspricht. Führt man diesen Ausdruck in das vorstehende Gleichungssystem ein, so muss dasselbe unabhängig von $\varkappa$ bestehen. Dadurch spaltet sich die erste Gleichung in 2, die zweite in 4, die dritte in 6 ...., die μ^{te} in $2\mu = n$ Gleichungen, und wir erhalten demgemäss ein System von $\mu(\mu + 1)$ Bedingungsgleichungen für die Coefficienten von C^n, welche nothwendig und hinreichend sind, damit ξ ein harmonischer Pol und γ eine harmonische Gerade der Curve C^n ist:

$$\text{I.} \quad \begin{array}{lll} a_\xi^{n-1} a_\alpha = 0 \;, & a_\xi^{n-1} a_\beta = 0 & \\ a_\xi^{n-3} a_\alpha^3 = 0 \;, & a_\xi^{n-3} a_\alpha^2 a_\beta = 0 \;\; \ldots\ldots & a_\xi^{n-3} a_\beta^3 = 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_\xi a_\alpha^{n-1} = 0 \;, & a_\xi a_\alpha^{n-2} a_\beta = 0 \;\; \ldots\ldots & a_\xi a_\beta^{n-1} = 0. \end{array}$$

Stellen wir die analogen Betrachtungen an für den Fall $n = 2\nu + 1$, so erhalten wir folgendes System von $(\nu + 1)^2$ Bedingungsgleichungen:

$$\text{II.} \quad \begin{array}{lll} a_\xi^n = 0 & & \\ a_\xi^{n-2} a_\alpha^2 = 0 \;, & a_\xi^{n-2} a_\alpha a_\beta = 0 \;, & a_\xi^{n-2} a_\beta^2 = 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_\xi a_\alpha^{n-1} = 0 \;, & a_\xi a_\alpha^{n-2} a_\beta = 0 \;, \;\ldots\ldots & a_\xi a_\beta^{n-1} = 0; \end{array}$$

die Punkte α und β waren ganz beliebig auf der harmonischen Geraden gewählt, und deshalb müssen die Systeme I. und II. auch bestehen, wenn α und β darin durch irgend zwei neue Punkte auf γ ersetzt werden. In der That geschieht analytisch dadurch weiter nichts, als dass die in derselben Horizontalreihe befindlichen Gleichungen linear combinirt werden zu einer gleichen Anzahl neuer. So geht beispielsweise die zweite Reihe des zweiten Systems, wenn α, β durch

$$\alpha' = \varkappa\alpha + \lambda\beta$$
$$\beta' = \varkappa'\alpha + \lambda'\beta$$

ersetzt werden, über in

$$a_\xi^{n-2} a_{\alpha'}^2 = \varkappa^2 a_\xi^{n-2} a_\alpha^2 + 2\varkappa\lambda a_\xi^{n-2} a_\alpha a_\beta + \lambda^2 a_\xi^{n-2} a_\beta^2 = 0$$
$$a_\xi^{n-2} a_{\alpha'} a_{\beta'} = \varkappa\varkappa' a_\xi^{n-2} a_\alpha^2 + (\varkappa\lambda' + \lambda\varkappa') a_\xi^{n-2} a_\alpha a_\beta + \lambda\lambda' a_\xi^{n-2} a_\beta^2 = 0$$
$$a_\xi^{n-2} a_{\beta'}^2 = \varkappa'^2 a_\xi^{n-2} a_\alpha^2 + 2\varkappa'\lambda' a_\xi^{n-2} a_\alpha a_\beta + \lambda'^2 a_\xi^{n-2} a_\beta^2 = 0.$$

Will man die Coordinaten der harmonischen Geraden γ in die Systeme I. und II. einführen, so darf man sich α, β nur als die Schnittpunkte zweier ganz willkürlicher Geraden

$$k_x = 0 \qquad\qquad l_x = 0$$

mit $\gamma_x = 0$ denken, wodurch die allgemeine Gleichung von I. und II.:

$$a_\xi^{n-i-\varkappa}\, a_\alpha^i\, a_\beta^\varkappa = 0$$

übergeht in:

$$a_\xi^{n-i-\varkappa}\,(ak\gamma)\,(al\gamma) = 0,$$

wo die sechs Grössen k_i, l_i ganz beliebig angenommen werden dürfen.

Für $n = 2\mu$ ist eine allgemeine Curve n^{ter} Ordnung C^n bestimmt durch

$$\frac{n\,(n+3)}{2} = 2\mu\,(\mu + 1) + \mu$$

für $n = 2\nu + 1$ durch

$$\frac{n\,(n+3)}{2} = (2\nu + 1)\,(\nu + 2)$$

Punkte. Soll C^n einen gegebenen Punkt ξ zum harmonischen Pol und eine gegebene Gerade γ zur harmonischen Geraden haben, so ist dieselbe wegen der $\mu\,(\mu+1)$ bezüglich $(\nu+1)^2$ stattfindenden Bedingungsgleichungen schon bestimmt durch

$$\mu\,(\mu + 2) = \tfrac{1}{4}\,(n+4)\,n$$

bezüglich

$$(\nu + 1)^2 + \nu = \tfrac{1}{4}\,\{n\,(n+4) - 1\}$$

Punkte [Steiner, § 2, pag. 8, wo es übrigens an Stelle von $\nu\,(\nu+1)$ in der vorletzten Reihe des Textes heissen muss $\nu^2 + \nu - 1$].

Ist der Pol ξ nicht gegeben, sondern nur verlangt, dass C^n die Gerade γ zur harmonischen habe und zu dieser einen Pol, so verringert sich die Zahl der Bedingungsgleichungen um zwei [Steiner, § 5, pag. 11]; dasselbe tritt ein, wenn ξ gegeben und γ nicht gegeben ist; ist weder ξ noch γ gegeben, so sind die Coefficienten nur

$$\mu\,(\mu+1) - 4 \text{ beziehungsweise } (\nu+1)^2 - 4$$

Bedingungen unterworfen, welche nach der Einführung von γ_i in I. und II., in der oben angegebenen Weise, durch Elimination der ξ_i, γ_i aus diesen Systemen erhalten werden.

Für den Fall der Kegelschnitte ist $\mu = 1$ und

$$\mu\,(\mu+1) - 2 = 0,$$

für $\mu = 2$ ist bereits

$$\mu\,(\mu+1) - 4 = 2;$$

daher sehen wir, dass die Kegelschnitte die einzigen Curven geraden Grades sind, deren Wesen von selbst einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade verlangt, und zwar so, dass eines dieser beiden Stücke noch ganz beliebig angenommen werden kann. In diesem Falle ist die harmonische Gerade die Polargerade des harmonischen Poles in Bezug auf den Kegelschnitt.

Für $\nu = 1$ wird

$$\text{für } \nu = 2 \text{ bereits} \qquad \begin{aligned} (\nu+1)^2 - 4 &= 0, \\ (\nu+1)^2 - 4 &= 5 \end{aligned}$$

und somit sehen wir, dass die Curven dritter Ordnung die einzigen Curven ungeraden Grades sind, deren Wesen einen harmonischen Pol und Gerade bedingt, ein Umstand, den wir weiter unten specieller verfolgen werden [Steiner § 1, pag. 7.].

Eigenschaften der Curven mit harmonischem Pol und harmonischer Geraden.

Die Polaren des Poles ξ.

5. Ersetzt man in den Systemen I. und II. der vorhergehenden Nummer die Punkte α, β durch einen und denselben variablen Punkt x, wodurch die Gleichungen einer und derselben Horizontalreihe in einander übergehen, so stellt I. die $1, 3, \ldots (n-1)^{\text{te}}$ Polare von ξ in Bezug auf $C^n = C^{2\mu}$ vor, und II. die $1, 3, \ldots n^{\text{te}}$ Polare von ξ in Bezug auf $C^{2\nu+1}$ vor; da diese Gleichungen durch einen ganz beliebigen Punkt α oder β auf $\gamma = 0$ befriedigt werden, so enthalten sie diese Gerade ganz.

Die erste Polare von ξ schneidet einen durch den harmonischen Pol gelegten Strahl $\overline{\xi\alpha}$ (wo $\gamma_\alpha = 0$, d. h. α ein auf γ liegender Punkt ist), wenn $n = 2\mu$, in den durch die Gleichung

(1) $\quad 0 = a_\xi (a_\xi + \lambda a_\alpha)^{n-1} = a_\xi^n + (n-1)_2 \lambda^2 a_\xi^{n-2} a_\alpha^2 + \cdots + a_\xi^{\,2} a_\alpha^{n-2} \lambda^{n-2}$

bestimmten Punkten $\xi + \lambda\alpha$. In dieser Gleichung fehlen vermöge I. in 4) die ungeraden Potenzen von λ, und ihr Grad hat sich, weil eine Wurzel, nämlich die dem Punkte α entsprechende, $\lambda = \infty$ ist, um eine Einheit erniedrigt. Daher hat die Curve $C^{2\mu-2}$, welche mit der harmonischen Geraden γ zusammen die erste Polare von ξ in Bezug auf $C^{2\mu}$ vorstellt, den Punkt ξ zum harmonischen Pol und die Gerade γ zur harmonischen Geraden.

Die zweite Polare von ξ in Bezug auf $C^{2\mu}$ schneidet die Gerade $\overline{\alpha\xi}$ in den Punkten $\xi + \lambda\alpha$, wo λ bestimmt ist durch

$$0 = a_\xi^{\,2} (a_\xi + \lambda a_\alpha)^{n-2},$$

eine Gleichung, welche vermöge I. in 4) die Form annimmt

(2) $$0 = a_\xi^n + (n-2)_2 \, a_\xi^{n-2} a_\alpha^2 \lambda^2 + (n-2)_4 \, a_\xi^{n-4} a_\alpha^4 \lambda^4 + \cdots + a_\xi \;{}_\alpha^{-2} \lambda^{n-2},$$

also nur gerade Potenzen von λ enthält.

Hierdurch ist erwiesen, dass die zweite Polare von $C^{2\mu}$ den Punkt ξ zum harmonischen Pol und die Gerade γ zur harmonischen Geraden

hat; dass diese Curve aber nicht etwa mit $C^{2\mu-2}$ zusammenfallen kann, lehrt schon der Vergleich von (1) und (2). Wendet man die an $C^{2\mu}$ angestellten Betrachtungen auf ihre zweite Polare an, so sieht man ein, dass die dritte Polare von $C^{2\mu}$ in eine Curve $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $C^{2\mu-4}$, welche ξ zum harmonischen Pol und γ zur harmonischen Geraden hat, und in die harmonische Gerade zerfällt, und dass die vierte Polare von $C^{2\mu}$ ebenfalls ξ und γ zum harmonischen Pol und harmonischen Geraden hat. Fährt man so fort, so erhält man den Satz:

Besitzt eine Curve gerader Ordnung $C^{2\mu}$ einen Pol ξ und eine harmonische Gerade γ, so zerfallen die ungeraden, d. h. die 1^{ten}, 3^{ten}, ... Polaren des Poles in die harmonische Gerade und in eine Curvenreihe

$$C^{2\mu-2}\quad,\quad C^{2\mu-4}\quad,\quad\ldots\ldots\quad C^2,$$

deren jede den harmonischen Pol ξ und die harmonische Gerade γ besitzt; ebenso haben die geraden, d. h. die 2^{ten}, 4^{ten} ... Polaren des Pols diesen Punkt selbst zum harmonischen Pol und γ zur harmonischen Geraden.

Für den Fall $n = 2\nu + 1$ erhält man unter Berücksichtigung von II. der vorigen Nummer die Schnittpunkte $\alpha + \lambda\xi$ der ersten Polare von ξ, mit Ausnahme des Punktes α selbst, durch die Gleichung

$$(3)\quad 0 = a_\xi\,(a_\xi + \lambda a_\alpha)^{n-1} = (n-1)_1\, a_\xi^{n-1}\, a_\alpha\, \lambda + (n-1)_3\, a_\xi^{n-3}\, a_\alpha^{\,3}\, \lambda^3 \\ + \cdots + (n-1)\, a_\xi^{2}\, a_\alpha^{n-2}\, \lambda^{n-2},$$

und die der zweiten Polare aus:

$$(4)\quad 0 = a_\xi^{2}\,(a_\xi + \lambda a_\alpha)^{n-2} = (n-2)_1\, a_\xi^{n-1}\, a_\alpha \lambda + (n-2)_3\, a_\xi^{n-3}\, a_\alpha^{\,3}\, \lambda^3 \\ + \cdots + (n-2)_1\, a_\xi^{2}\, a_\alpha^{n-2}\, \lambda^{n-2}.$$

Also besitzt die Curve $C^{2\nu-1}$, welche mit γ die erste Polare des harmonischen Pols in Bezug auf $C^{2\nu+1}$ zusammensetzt, ξ zum harmonischen Pol und γ zur harmonischen Geraden; dasselbe gilt für die zweite Polare von ξ; stellt man an dieser Curve dieselben Betrachtungen an, wie an $C^{2\nu+1}$, und so fort, so erhält man den Satz:

Besitzt eine Curve ungeraden Grades $C^{2\nu+1}$ einen harmonischen Pol ξ und eine harmonische Gerade γ, so zerfallen die ungeraden Polaren des harmonischen Pols in die harmonische Gerade und eine Curvenreihe

$$C^{2\nu-1}\quad,\quad C^{2\nu-3}\quad,\quad\ldots\ldots\quad C^1,$$

welche den Punkt ξ zum harmonischen Pol und γ zur harmonischen Geraden haben; sie haben, da sie sämmtlich ungeraden Grades sind, den Pol ξ zum gemeinsamen Wendepunkt, und da sie Polaren eines Punktes von $C^{2\nu+1}$ sind, so falien ihre zugehörigen Wendetangenten sämmtlich zusammen. Ferner liefern die 2^{te}, 4^{te} ... Polaren von ξ eine Reihe von Cur-

ven ungeraden Grades, welche ξ zum Pol und γ zur harmonischen Geraden haben und im Punkte ξ dieselbe Wendetangente besitzen. [Steiner, § 19, p. 17.]

Durchschnitt zweier Curven, mit gemeinsamem harmonischen Pol und gemeinsamer harmonischen Geraden.

6. Haben zwei Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung C^m und C^n denselben Punkt ξ zum harmonischen Pol und dieselbe Gerade γ zur harmonischen Geraden, so müssen die ausserhalb ξ und γ gelegenen Schnittpunkte beider Curven sich paarweise zu conjugirten Punkten in Bezug auf ξ und γ zusammenordnen; denn ist p ein solcher beiden Curven angehöriger Punkt, so gehört der ihm conjugirte p' ebenfalls beiden Curven an. Sind beide Curven von gerader Ordnung, so haben sie im Allgemeinen keinen Schnittpunkt im Pol, und soll der harmonische Pol zu den $m \cdot n$ Schnittpunkten gehören, so kann derselbe im ersteren Falle nach (4) nur als vier- oder acht- oder sechszehnfacher Punkt u. s. w. gezählt werden, da alsdann ξ für beide Curven ein vielfacher Punkt gerader Ordnung ist. Ist nur eine der beiden Curven gerade, etwa C^n, so geht die ungerade Curve Curve C^m durch den Pol, und derselbe ist, wenn er Schnittpunkt von C^n und C^m ist, als 2-, 4-, 6-, . . . facher Punkt zu rechnen; nur wenn beide Curven ungerader Ordnung sind, schneiden sie sich stets in ξ und derselbe ist im Allgemeinen als einfacher Punkt zu rechnen, kann aber im Besonderen 3, 5, . . . Schnittpunkte repräsentiren.

Es kann daher, wie auch m und n beschaffen sein mögen, auf der harmonischen Geraden nur eine gerade Anzahl von Schnittpunkten beider Curven vereinigt sein. Das folgt auch direct daraus, dass, wenn C^m und C^n sich auf γ in einem Punkte α schneiden, sie sich in diesem Punkte berühren; denn α ist nach der vorigen Nummer, als Punkt der harmonischen Geraden, ein Punkt der ersten Polare von ξ in Bezug auf C^m wie auf C^n; folglich geht die Tangente in α an C^m wie an C^n durch ξ, d. h. die beiden Curven berühren sich in α.

Also sehen wir:

Die $m \cdot n$ Schnittpunkte zweier Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung, welche einen gemeinsamen harmonischen Pol ξ und eine gemeinsame harmonische Gerade besitzen, ordnen sich zu Paaren conjugirter Punkte zusammen; wenn ein Schnittpunkt auf der harmonischen Geraden liegt, so berühren sich beide Curven in diesem Punkte. Ist eine der Zahlen m, n gerade, und soll der Pol zum Durchschnitt gehören, so vertritt derselbe eine gerade (0, 2, 4, . . .) Anzahl, sind m, n ungerade, so vertritt derselbe eine ungerade (1,3,5,...) Anzahl Schnittpunkte.

Tangenten und Singularitäten. [Steiner, § 9, I, II.]

7. Eine Curve, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzt, kann man sich erzeugt denken durch die Bewegung eines in Bezug auf jene Stücke conjugirten Punktepaares. Die Tangente in dem einen Punkte verbindet zwei unendlich nahe Punkte, die Tangente in dem anderen die zu diesen conjugirten, welche einander ebenfalls unendlich nahe liegen; also haben wir nach 2. I. den Satz:

I. Bei Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen, sind die Tangenten in conjugirten Punkten, selbst conjugirt in Bezug auf diese Stücke.

Unsere Curven lassen sich daher auch auffassen als Umhüllte conjugirter Geradenpaare, und deshalb lassen sich alle Sätze dualistisch umkehren in dem Sinne, wie die Sätze I. und II., III. und IV. in 2. angeben.

Aus I. dieser Nummer folgt, dass die Tangenten in Punkten, welche sich selbst conjugirt sind, ebenfalls sich selbst conjugirt sein müssen; also entweder in die Gerade γ fallen, oder durch ξ gehen (2.IV.); der erstere Fall kann nicht eintreten, denn wenn γ Tangente in den n sich selbst conjugirten Punkten wäre, in denen C^n von γ getroffen wird, so würde eine Curve n^{ter} Ordnung von einer Geraden in $2n$ Punkten geschnitten werden, was nicht angeht; also müssen die n Tangenten in den Schnittpunkten der C^n mit ihrer harmonischen Geraden sämmtlich durch den harmonischen Pol gehen.

Wir hätten dies auch aus 5. schliessen können, wo wir gesehen haben, dass die erste Polare des Poles ξ sowohl für $n=2\mu$, wie für $n=2\nu+1$ in die Gerade γ und eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $C^{2\mu-2}$ bezüglich $C^{2\nu-1}$ zerfällt, die mit der gegebenen Curve denselben Pol und harmonische Gerade besitzt; es müssen also n der durch ξ gelegten Tangenten die Curve n^{ter} Ordnung in ihrem Durchschnitt mit der harmonischen Geraden berühren; die Berührungspunkte der übrigen $n(n-2)$ Tangenten müssen (6) sich für $n=2\mu$ zu conjugirten Punktepaaren zusammenordnen, d. h. die Tangenten müssen paarweise zusammenfallen und Doppeltangenten werden. Ist $n=2\nu+1$, so fallen drei der Schnittpunkte von $C^{2\nu+1}$ und $C^{2\nu-1}$ nach ξ in die durch diesen Punkt gelegte Wendetangente, und erst die $n(n-2)-3$ übrigen ordnen sich paarweise zu conjugirten Punkten, den Berührungspunkten der $\frac{n(n-2)-3}{2}$ Doppelpunkte, die durch ξ gehen.

Man hat daher den Satz:

II. Die in den n Schnittpunkten der Curve C^n mit ihrer

harmonischen Geraden gezogenen Tangenten gehen durch den harmonischen Pol $\mathfrak{x}$. Die übrigen $n(n-2)$ Tangenten, welche durch den harmonischen Pol gehen, fallen für ein gerades n paarweise zu $\frac{1}{2}\, n\,(n-2)$ Doppeltangenten zusammen, deren Berührungspunkte auf $C^{2\mu-2}$ liegen, und für ein ungerades n bestehen dieselben aus $\frac{1}{2}\,\{n\,(n-2)-3\}$ Doppeltangenten und einer Wendetangente, die im Pol selbst berührt, also für drei Tangenten gelten muss, und es liegen die Berührungspunkte der Doppeltangenten mit dem Wendepunkte auf der Curve $C^{2\nu-1}$. Die Berührungspunkte dieser Doppeltangenten sind conjugirte Punktepaare.

Aus diesem letzten Umstande folgt für die als Doppeltangenten mit zusammenfallenden Berührungspunkten zu betrachtenden Wendetangenten in Anbetracht von 2. III.:

III. Wenn eine durch den harmonischen Pol gelegte Tangente eine Wendetangente ist, so liegt der zugehörige Wendepunkt entweder auf der harmonischen Geraden oder im harmonischen Pol, und umgekehrt: Wenn ein Berührungspunkt einer durch den Pol gelegten Doppeltangente in die harmonische Gerade oder den harmonischen Pol fällt, so fallen beide dorthin, d. h. sie ist eine Wendetangente.

Die Tangenten in den Punkten, welche zu den beiden Berührungspunkten einer sich nicht selbst conjugirten Doppeltangente T gehören, müssen beide in die T' conjugirte fallen, also sind

IV. die $\frac{1}{2}\,n\,(n-2)\,(n^2-10)$ bezüglich $\frac{1}{2}\,n\,(n-2)\,(n^2-10)+3$ Doppeltangenten, welche nicht durch den Pol gehen, paarweise conjugirt.

Da die Wendetangenten nur eine specielle Art der Doppeltangenten sind, so folgt hieraus:

V. Die Wendetangenten von C^n, welche nicht durch den harmonischen Pol gehen, ordnen sich paarweise zu conjugirten Geradenpaaren zusammen, und ihre entsprechenden Wendepunkte sind conjugirte Punktenpaare.

Es mag hier anticipirend bemerkt werden, dass für Curven dritter Ordnung jeder Wendepunkt mit der dazu gehörigen harmonischen Geraden, die Rolle eines harmonischen Pols und einer harmonischen Geraden für diese Curve spielt; dann lehrt der vorstehende Satz, dass jeder Wendepunkt mit je zweien der acht übrigen auf einer Geraden liegt, oder wie man sich gewöhnlich ausdrückt, dass die Verbindungslinie der Wendepunkte stets durch einen dritten geht.

Aus V. liefert die dualistische Betrachtung:

VI. Besitzt C^n Rückkehrpunkte, welche nicht auf der harmonischen Geraden liegen, so ordnen sich diese paarweise zu conjugirten Punktepaaren zusammen und ihre entsprechenden Rückkehrtangenten sind conjugirte Geradenpaare.

Da nach II. die Berührungspunkte der durch den harmonischen Pol gehenden Doppeltangenten conjugirt sind, so folgt dualistisch:

VII. dass, wenn C^n einen Doppelpunkt auf der harmonischen Geraden besitzt, seine Tangenten conjugirte Geraden sein müssen; man kann dies auch direct so aus unsern Formeln schliessen (4. I. II.).

Ist α der auf γ gelegene Doppelpunkt und bedeutet x einen variabeln Punkt, so stellt bekanntlich

$$a_\alpha^{n-2}\, a_x^2 = 0$$

das Tangentenpaar von α vor; ist β ein zweiter Punkt auf γ, so besteht sowohl nach I. wie nach II. in 4. die Gleichung

$$a_\alpha^{n-2}\, a_\xi\, a_\beta = 0,$$

welche aussagt, dass ξ und β harmonische Pole in Bezug auf das Tangentenpaar des Doppelpunkts sind; da β ganz beliebig auf γ angenommen werden darf, so sehen wir, dass das Tangentenpaar durch die harmonische Gerade und den nach dem Pol gerichteten Strahl harmonisch getrennt wird, d. h. ein conjugirtes Geradenpaar vorstellt; es kann deshalb nach 2. IV. niemals eine der beiden Tangenten allein nach γ fallen oder durch ξ gehen, sondern es muss dies gleichzeitig für beide eintreten. — Wenn daher

VIII. die Curve C^n auf der harmonischen Geraden einen Rückkehrpunkt besitzt, so fällt seine Tangente entweder in jene selbst oder geht durch ξ, den harmonischen Pol.

Weiter folgt durch dualistische Umkehrung:

IX. dass einem nicht nach ξ oder γ fallenden Doppelpunkte ein zweiter Doppelpunkt conjugirt ist, und dass die Tangenten des einen den Tangenten des andern beziehungsweise conjugirt sind.

Die ersten Polaren eines auf der harmonischen Geraden gelegenen Poles. [Steiner § 9, III.]

8. Für $n = 2\mu$ fällt die Polargerade des Poles in die harmonische Gerade, für $n = 2\nu + 1$ in seine Wendetangente (4. I. II.). Daher geht im ersteren Falle die erste Polare eines beliebigen Punktes α der harmonischen Geraden stets durch den Pol; die übrigen Schnittpunkte

$\delta + \lambda\xi$, wo δ einen auf γ gelegenen Punkt bedeutet, sind gegeben durch die Gleichung:

$$0 = a_\alpha a_\delta^{n-1} + (n-1)_2 a_\alpha a_\delta^{n-3} a_\xi^2 \lambda^2 + \dots\dots$$
$$+ (n-1)_4 a_\alpha a_\delta^3 a_\xi^{n-4} \lambda^{n-4} + (n-1)_2 a_\alpha a_\delta a_\xi^{n-2} \lambda^{n-2},$$

d. h. jedem Puncte $\delta + \lambda\xi$ ist ein Punkt $\delta - \lambda\xi$ conjugirt; wir sehen also, dass die erste Polare eines Punktes auf γ den Punkt ξ zum Pol und die Gerade γ zur harmonischen Geraden hat. Dasselbe Resultat schliessen wir für eine Curve $C^{\nu+1}$ aus der Gleichung:

$$0 = a_\alpha a_\delta^{n-1} + (n-1)_2 a_\alpha a_\delta^{n-3} a_\xi^2 \lambda^2 + \dots\dots$$
$$+ (n-1)_2 a_\alpha a_\delta^2 a_\xi^{n-3} \lambda^{n-3} + a_\alpha a_\xi^{n-1} \lambda^{n-1},$$

welche die Schnittpunkte der ersten Polare von α mit der Geraden $\overline{\delta\xi}$ liefert.

Es muss also auch die zweite Polare eines auf γ gelegenen Poles die Gerade γ zur harmonischen Geraden und den Punkt ξ zum harmonischen Pol haben.

Wir haben daher den Satz:

I. Hat eine C^n einen harmonischen Pol ξ und eine harmonische Gerade γ, so haben auch alle successiven Polaren $C^{n-1}, C^{n-2}, \dots\dots C^1$ jedes beliebigen Punktes von γ den Punkt ξ zum Pol und die Gerade γ zur harmonischen Geraden.

Die ersten Polaren aller Punkte auf γ bilden einen Curvenbüschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $(n-1)^2$ Grundpunkten, die paarweise einander conjugirt sind (6); ein solches Büschel enthält bekanntlich $3(n-2)^2$ Doppelpunkte und $2(n-2)$ Curven, die eine beliebig gegebene Gerade in 2 zusammenfallenden Punkten schneiden; bei denjenigen $2(n-2)$ Curven nun, welche die harmonische Gerade in dieser Weise schneiden, kann dies nicht in Folge einer Berührung stattfinden; denn jede derselben hat ξ zum Pol und γ zur harmonischen Geraden (7. II.). Daher haben sie jene $2(n-2)$ Punkte zu Doppelpunkten; die übrigen $(3n-8)(n-2)$ Doppelpunkte müssen, wenn n ungerade ist, sich paarweise zu entsprechenden Punkten zusammenordnen (7. IX.), mit Ausnahme eines, der in den Pol selbst fällt; er gehört der ersten Polare $C^{2\nu}$ des auf der Wendetangente von $C^{2\nu+1}$ gelegenen Punktes von γ an; denn diese Curve muss durch den Pol ξ gehen, weil dieser der Berührungspunkt der Wendetangente ist, und zweimal durch ξ gehen, weil die Curve von gerader Ordnung ist und ξ zum Pol hat (4). Ist n gerade, so gehen alle ersten Polaren von γ durch ξ und dieser ist daher ein Grundpunkt des Büschels.

Diese Betrachtungen gelten für jedes beliebige Curvenbüschel mit gemeinsamem Pol und gemeinsamer harmonischen Geraden. Ein solcher ist, wenn Pol und Gerade gegeben sind, für $n = 2\mu$ bestimmt durch

$\mu(\mu+2)-1$, für $n=2\nu+1$ durch $(\nu+1)(\nu+2)-2$ Punkte (4). Dies begründet Steiner's [§ 10, pag. 22] Resultat:

II. Zieht man durch einen Punkt ξ $\mu(\mu+2)-1$ oder $(\nu+1)(\nu+2)-2$ unbegrenzte Geraden S, und schneidet dieselben durch eine willkürliche Gerade γ in Punkten g, und bestimmt sodann in jeder Geraden S irgend ein Paar solche Punkte p und p_1, die von ξ und g harmonisch getrennt werden, so gehen durch die Punkte p, p_1, Curvenbüschel $B(C^{2\mu})$, $B(C^{2\nu+1})$, welche noch $2(\mu-1)^2$ resp. $2\nu(\nu-1)+1$ andere Punkte gemein haben, die sich gleichfalls paarweise dem Punkte ξ und der Geraden γ harmonisch zuordnen (6). Der Punkt ξ ist für alle Curven des $B(C^{2\nu+1})$ ein Wendepunkt (4). Jeder Büschel hat $3(2\mu-1)^2$ resp. $12\nu^2$ Doppelpunkte p_2, wovon $2(2\mu-1)$ resp. 4ν auf die Gerade γ fallen und im Allgemeinen eben so vielen Curven angehören, wogegen die übrigen sich paarweise in dem obigen Sinne gruppiren; nur in dem Falle $C^{2\mu}$ bildet eine derselben einen der $4\mu^2$ Grundpunkte des Büschels.

Durchmesser und conjugirte Punkte der harmonischen Geraden.

9. Eine durch den Pol gelegte Gerade soll ein Durchmesser von C^n heissen; ist $n=2\mu$, so bestimmt jeder Durchmesser μ Punktenpaare auf C^n, deren Tangenten sich in μ Punkten der harmonischen Geraden schneiden (7. I.); diese Punkte sollen zu dem Durchmesser conjugirte Punkte heissen; ist $n=2\nu+1$, so entsprechen einem Durchmesser ν conjugirte Punkte und der Schnittpunkt der Wendetangente des Pols. Umgekehrt, fixirt man einen Punkt auf der harmonischen Geraden, so berühren die $n(n-1)$ Tangenten in $\frac{n(n-1)}{2}$ Punktepaaren (8), deren Verbindungslinien conjugirte Durchmesser des Punktes auf γ heissen sollen. Wir sehen also, dass sich jedem Durchmesser für $n=2\mu:\mu$, für $n=2\nu+1:\nu$ conjugirte Punkte zuordnen und jedem Punkt auf γ $\frac{n(n-1)}{2}$ conjugirte Durchmesser.

Steiner fragt nach der Relation, welche diese Elemente mit einander verbindet. Ist α ein Punkt auf der harmonischen Geraden γ, δ der Schnittpunkt eines zum Punkte α conjugirten Durchmessers D mit γ, und ξ der harmonische Pol der gegebenen Curve C^n, so müssen für den Fall $n=2\mu$ folgende beide Gleichungen bestehen:

$$(1)\quad 0=f(\delta^n)+n_2 f(\delta^{n-2}\xi^2)\lambda+n_4 f(\delta^{n-4}\xi^4)\lambda^2+\ldots+n_2 f(\delta^2\xi^{n-2})\lambda^{\mu-1}+f(\xi^n)\lambda^\mu.$$

$$(2)\quad 0=f(\alpha\delta^{n-1})+(n-1)_2 f(\alpha\delta^{n-3}\xi^2)\lambda+\ldots\ldots+(n-1)_2 f(\alpha\delta\xi^{n-2})\lambda^\mu.$$

Denn die erste Gleichung liefert für einen gegebenen Punkt δ die Werthe von λ, für welche

$$\delta \pm \sqrt{\lambda} \,.\, \xi$$

ein auf dem Durchmesser D gelegenes Punktenpaar von C^n ist, und die zweite diejenigen Werthe von λ, für welche $\delta \pm \sqrt{\lambda} \,.\, \xi$ ein auf dem Durchmesser D gelegenes Punktepaar der ersten Polare des Punktes α ist. Bestehen beide Gleichungen gleichzeitig, so liegen die Berührungspunkte eines der durch α an C^n gehenden $\frac{n(n-1)}{2}$ Tangentenpaare auf D. — Eliminirt man also nach den bekannten Regeln aus (1) und (2) die Grösse λ, so erhält man eine Gleichung zwischen den α und δ, welche in den α_i vom Grade $\frac{n}{2}$ ist, in den δ_i vom Grade $\frac{n(n-1)}{2}$, und welche unter Hinzuziehung von:

$$\gamma_\alpha = 0, \quad \gamma_\delta = 0$$

für ein gegebenes α die Punkte liefert, in denen die zu α conjugirten Durchmesser die harmonische Gerade schneiden, und für ein gegebenes δ, d. h. einen gegebenen Durchmesser die demselben conjugirten Punkte α.

Führen wir diese Betrachtung an dem Beispiel einer Curve vierter Ordnung C^4, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzt, aus. Für diesen Fall ordnen sich jedem Punkte α auf der harmonischen Geraden 6 Durchmesser D bei, und jedem Durchmesser D sind 2 Punkte α auf der harmonischen Geraden conjugirt. Die Gleichungen (1), (2) gehen über in:

$$f(\delta^4) + 6f(\delta^2\xi^2)\lambda + f(\xi^4)\lambda^2 = 0. \tag{3}$$

$$f(\alpha\delta^3) + 3f(\alpha\delta\xi^2)\lambda = 0, \tag{4}$$

woraus die Eliminationsgleichung fliesst:

$$0 = f(\xi^4)\, f^2(\alpha\delta^3) + 9f(\delta^4)\, f^2(\alpha\delta\xi^2) - 18f(\alpha\delta^3)\, f(\alpha\delta\xi^2)\, f(\delta^2\xi^2), \tag{5}$$

die in der That vom sechsten Gerade in den δ und vom zweiten in den α ist. Schreibt man die einzelnen Glieder der rechten Seite von (5) symbolisch, indem man setzt:

$$f(x^4) = a_x^4 = b_x^4 = c_x^4$$

und ersetzt darin α_δ durch $(a\gamma u)$, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 = a_\xi^4\, b_\alpha c_\alpha (b\gamma u)^3 (c\gamma u)^3 &+ 9(a\gamma u)^4 b_\alpha c_\alpha b_\xi^2\, c_\xi^2\, (b\gamma u)(c\gamma u) \\ &- 18 a_\alpha (a\gamma u)^3 b_\alpha b_\xi^2 (b\gamma u) c_\xi^2 (c\gamma u)^2. \end{aligned}$$

Es ist dies eine Curve sechster Klasse, deren durch ξ gelegte Tangenten die dem Punkte α conjugirten Durchmesser u liefern; andererseits stellt diese Gleichung auch einen in den laufenden Coordinaten α_i geschriebenen Kegelschnitt vor, der für irgend einen der Gleichung

$$u_\xi = 0$$

genügenden Durchmesser u die harmonische Gerade in den zu jenem Durchmesser conjugirten Punkten schneidet.

Fragt man nach den Punkten α, welche auf ihren conjugirten Durchmessern $\mathfrak{D}$ selbst liegen, so darf man nur $\delta = \alpha$ in (5) setzen, wodurch man erhält:

$$(6) \qquad 0 = f(\alpha^4)\left\{f(\xi^4)\, f(\alpha^4) - 9 f^2(\alpha^2 \xi^2)\right\}.$$

Für diese Punkte α müssen nothwendiger Weise die Tangentenpaare, deren Berührungspunkte die $\mathfrak{D}$ bestimmen, mit den $\mathfrak{D}$ zusammenfallen und durch ξ gehen. Nun wissen wir aus 7. II., dass es 8 solcher Tangenten gibt, nämlich die 4 nach dem Durchschnitt von C^4 mit ihrer harmonischen Geraden gerichteten Tangenten, und die 4 durch den Pol gehenden Doppeltangenten; die ersten 4 Tangenten liefert der Factor:

$$f(\alpha^4) = 0$$

in (6), und der zweite

$$f(\xi^4)\, f(\alpha^4) - 9 f^2(\xi^2 \alpha^2) = 0$$

liefert mit $\gamma_\alpha = 0$ die Punkte, in denen die harmonische Gerade von den durch den Pol gelegten Doppeltangenten geschnitten wird.

Ganz analoge Betrachtungen lassen sich für den Fall $n = 2\nu + 1$ anstellen. — Die beiden Gleichungen (1), (2) gehen für diesen Fall über in:

$$(7) \qquad f(\delta^n) + n_2 f(\delta^{n+2} \xi^2)\lambda + \ldots + n_2 f(\delta^2 \xi^{n-1})\lambda^\nu = 0.$$

$$(8) \quad f(\alpha\delta^{n-1}) + (n-1)_2 f(\alpha\delta^{n-3}\xi^2)\lambda + \ldots + (n-1)_2 f(\alpha\delta\xi^{n-2})\lambda^{\nu-1} = 0.$$

Zweiter Theil.

Vorkommen der Curven, welche einen Pol und eine harmonische Gerade haben, bei Betrachtung allgemeiner Curven.

Von den inneren Polaren [Steiner § 13].

10. Es sei eine allgemeine Curve n^{ter} Ordnung C^n gegeben, ferner ein Punkt ξ und eine Gerade γ. Es sollen durch ξ Strahlen derart gezogen werden, dass jeder derselben unter seinen n Schnittpunkten mit C^n irgend ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf ξ und γ aufweist. Solche Strahlen sollen Sehnen von C^n heissen, das auf ihnen gelegene ausgezeichnete Punktenpaar aa_1 die Endpunkte der Sehne und ξ der Pol oder der mittlere Punkt derselben; enthält eine Sehne 2 Paare entsprechender Punkte, so heisst sie Doppelsehne; fallen zwei Sehnen zusammen, dadurch dass ihre Endpunkte paarweise unendlich nahe rücken, so heisst sie Berührungssehne.

Es sei $a_x^n = 0$ die symbolische Gleichung von C^n. Sind z, z' die Endpunkte einer Sehne und y ihr Schnittpunkt mit der Geraden γ, so ist:

$$(1)\quad a_z^n = 0, \qquad (2)\quad a_{z'}^n = 0, \qquad (3)\quad \gamma_y = 0,$$

ausserdem aber müssen z, z', die ja conjugirt in Bezug auf ξ und γ sind, die Form annehmen:

$$(4)\quad \mu z \equiv \varkappa\xi + \lambda y, \qquad (5)\quad \mu' z' \equiv \varkappa\xi - \lambda y.$$

Aus diesen letzten beiden Identitäten folgt nun unter Berücksichtigung von (3):

$$\begin{aligned} &(6) \qquad 2\mu\,\gamma_z\,.\,\xi_i = (\mu z_i + \mu' z_i')\gamma_\xi \\ &(7) \qquad 2\mu'\gamma_{z'}\,.\,\xi_i = (\mu z_i + \mu' z_i')\gamma_\xi \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Eliminirt man die $\mu' z_i'$ mit Hülfe von (6) aus (2), so erhält man eine Gleichung in den μz_i; genau dieselbe Gleichung, aber geschrieben in den $\mu' z_i'$, erhält man offenbar durch Elimination der μz_i aus (1) mit Hülfe von (7). Diese Gleichung in z geschrieben ist nach Fortlassung des Factors μ^{n-1}:

$$(8) \qquad 0 = \sum_0^{n-1} \varkappa\,(-1)^\varkappa \gamma_\xi^\varkappa\,(2\gamma_z)^{n-\varkappa-1}\,.\,a_\xi^{n-\varkappa}\,a_z^\varkappa,$$

sie stellt demnach eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung: J^{n-1} vor, deren Punkte sich paarweise zu conjugirten Punkten zz' in Bezug auf ξ und γ zusammenordnen und die deshalb den Punkt ξ zum harmonischen Pol und die Gerade γ zur harmonischen Geraden hat; sie schneidet aus C^n die sämmtlichen conjugirten Punktepaare aus, welche die letztere Curve in Bezug auf den willkührlich angenommenen Punkt ξ und die Gerade γ besitzt; und diese sind daher die Endpunkte von $\frac{n(n-1)}{2}$ Sehnen, deren $n(n-1)$ Schnittpunkte mit C^n paarweise mit dem Punkte ξ auf $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden liegen; und zwar sind diese Punktenpaare Paare einander zugeordneter Punkte; J^{n-1} soll die innere Polare von ξ und γ in Bezug auf C^n heissen.

Die erhaltenen Resultate liefern den Satz [Steiner § 13, I]:

I. Durch den Punkt ξ in der Ebene gehen im Allgemeinen $\frac{n(n-1)}{2}$ Sehnen, und ihre $n(n-1)$ Endpunkte liegen in einer um einen Grad niedrigeren Curve J^{n-1}, welche ξ zum harmonischen Pol und die gegebene Gerade γ zur harmonischen Geraden hat. Oder: Eine Curve C^n besitzt in Bezug auf jeden beliebig gewählten Punkt ξ und jede beliebig gewählte Gerade γ $\frac{n(n-1)}{2}$ bez. $\frac{n^2-n-1}{2}$ Paare von Punkten, die einander in Bezug auf ξ und γ zugeordnet sind; dieselben liegen auf dem Durchschnitt von C^n mit der zu ξ und γ gehörigen inneren Polare.

Aus 4. I. der Einleitung folgt weiter:

II. Verbindet man die einen Endpunkte zweier Sehnen S durch eine Gerade A, so ist die Verbindungslinie der beiden anderen Endpunkte die zu A conjugirte; und umgekehrt: Ist A die Verbindungslinie der einen Endpunkte zweier Sehnen, so geht die zu A conjugirte Gerade A' durch die anderen Endpunkte dieser Sehnen.

Die Gleichung der innern Polare eines Poles ξ und einer Geraden γ in Bezug auf eine Curve C^n ist vom n^{ten} Grade für die ξ_i, vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade für die γ_i, und linear in den Coefficienten von C^n; sie enthält die sämmtlichen Polaren dieses Punktes linear; wendet man die Gleichung der ersten Polare A^{n-1} von ξ : $a_\xi\, a_x^{n-1} = 0$, welche Steiner im Gegensatz zur innern Polare J^{n-1} die äussere Polare nennt und mit A^{n-1} bezeichnet, auf (8) an, so erhält die letztere den Factor $\gamma_z = 0$ und daraus folgt:

III. Dass von den $(n-1)^2$ Schnittpunkten der innern und äussern Polare $n-1$ auf der harmonischen Geraden von J^{n-1} liegen; die übrigen müssen also auf einer Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen [Steiner § 13, II].

Rückt der Pol ξ nach C^n, so berühren sämmtliche äussere Polaren in diesem Punkte; also fallen auch 2 der $n(n-1)$ Schnittpunkte von C^n und J^{n-1} in ξ zusammen. Ist n gerade, so ist J^{n-1} eine Curve ungerader Ordnung, deren zu ξ gehörige Wendetangente in die Tangente von C^n in ξ fällt, ist n ungerade, so hat die J^{n-1} in ξ einen Doppelpunkt.

Die Polargeraden der Punkte auf γ umhüllen eine Curve des $2(n-2)^{\text{ten}}$ Grades $E^{2(n-2)}$, sie ist daher der Ort der Pole, deren erste Polaren die Gerade γ berühren; die entsprechende innere Polare muss deshalb γ in 2 zusammenfallenden Punkten schneiden; da aber γ die harmonische Gerade von J^{n-1} ist, so kann sie keine Tangente sein (7. II.), und folglich ist:

IV. $E^{2(n-2)}$ der Ort der Punkte, deren innere Polare einen auf γ sich bewegenden Doppelpunkt besitzt [§ 21, II, pag. 75].

Denkt man sich dagegen den Pol fest, so ist der Ort der Geraden, auf denen ein Doppelpunkt der zugehörigen innern Polare liegt, die Umhüllte der ersten äusseren Polaren des Poles in Bezug auf die gegebene Curve.

Die analytische Betrachtung liefert beide Fälle durch denselben Factor der Discriminante von J^{n-1}, wenn darin einmal die ξ_i, das andere Mal die γ_i als die laufenden Coordinaten angesehen werden.

Curvenbüschel innerer Polaren.

11. Da die Gleichung der innern Polare eines Poles ξ in Bezug auf eine Gerade γ und eine Curve C^n linear in den Coefficienten der letzteren ist, so folgt, dass wenn ξ und γ fest bleiben, einem Büschel $B(C^n)$ ebenfalls ein Büschel innerer Polaren $B(J^{n-1})$ entspricht; für jede Curve desselben spielen ξ und γ die Rolle des harmonischen Pols und der harmonischen Geraden (10.); also haben wir den Satz [Steiner § 21, I]:

Alle innern Polaren, die demselben Pol ξ und derselben Geraden γ in Bezug auf die einzelnen Curven des gegebenen Curvenbüschels $B(C^n)$ entsprechen, bilden unter sich gleicherweise einen Curvenbüschel $B(J^{n-1})$ mit $(n-1)^2$ Grundpunkten q, und haben den Punkt ξ zum gemeinsamen harmonischen Pol und die Gerade γ zur gemeinsamen harmonischen Geraden; folglich (8) sind ihre Grundpunkte q paarweise entsprechende Punkte, etwa q und q_1, in Bezug auf ξ und γ, so dass also die inneren Polaren sämmtlich $\frac{1}{2}(n-1)^2$ bez. $\frac{n}{2}(n-1)$ Sehnen qq_1 gemein haben, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Die Umhüllte der Tangenten eines Büschels, deren Berührungspunkte sämmtlich auf einer gegebenen Geraden γ liegen.

12. Es sei ein Büschel von Curven n^{ter} Ordnung durch die beiden Grundcurven:

$$a_x^n = 0\,, \qquad b_x^n = 0$$

gegeben, also in der Form darstellbar:

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0.$$

Ist nun y ein auf der Geraden γ gelegener Punkt und $u = A_\gamma$ die Tangente der durch y gelegten Curve des Büschels im Punkte y, so hat man das System der 5 Gleichungen:

$$(1) \qquad a_y^{n-1} a_i + \lambda b_y^{n-1} b_i = \mu u_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$(2) \qquad \gamma_y = 0\,, \qquad u_y = 0.$$

Eliminirt man λ, μ aus den 3 Gleichungen (1) und setzt die aus (2) erhaltenen Werthe der y_i in die Eliminationsgleichung, so erhält man:

$$(3) \qquad (a\gamma u)^{n-1}(b\gamma u)^{n-1}(abu) = 0$$

als Gleichung der von den A_γ umhüllten Curve A_γ^{2n-1}; dieselbe ist von der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Klasse und weil $(2n-2)$ Factoren des symbolischen Determinantenproducts der linken Seite von (3) die Reihen γ_i, u_i enthalten, hat sie die Gerade γ zur $(2n-2)$fachen Tangente und ist deshalb von der Ordnung:

$$(2n-2)(2n-1) - (2n-2)(2n-3) = 4(n-1).$$

Wir haben also den Steiner'schen Satz [§ 21, I]:

Die Gesammtheit der Tangenten A_γ, welche ein gegebenes Curvenbüschel n^{ter} Ordnung $B(C^n)$ in den Punkten einer Geraden γ berühren, umhüllt eine Curve der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Klasse und $4(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche γ zur $2(n-1)$fachen Tangente hat, so dass also durch jeden Punkt ξ im Allgemeinen $(2n-1)$ Tangenten A_γ gehen, durch jeden Punkt von γ aber nur eine solche. Dieses Resultat soll sogleich angewandt werden.

Die Panpolare eines Büschels.

13. Es seien:

$$f = 0, \quad \varphi = 0,$$

2 Curven des Büschels n^{ter} Ordnung $B(C^n)$ und

$$\chi = 0, \quad \psi = 0,$$

die ihnen bezüglich entsprechenden inneren Polaren für einen Pol ξ und eine Gerade γ, so ist:

$$\chi + \lambda\psi = 0$$

die innere Polare von

$$f + \lambda\varphi = 0.$$

Bedeutet λ einen variablen Parameter, so stellen

$$f + \lambda\varphi = 0,$$
$$\chi + \lambda\psi = 0$$

2 Büschel vor von Curven, die einander eindeutig entsprechen, und die deshalb projectivisch sind.

Die Durchschnitte entsprechender Curven erzeugen eine Curve $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$J^{2n-1} \equiv f\psi - \varphi\chi = 0.$$

Diese Curve hat ξ zum harmonischen Pol und γ zur harmonischen Geraden, weil ja die innere Polare ihre Basis in conjugirten Punktepaaren schneidet, J^{2n-1} also durch Bewegung eines conjugirten Punktepaares erzeugt wird; dies ist aber nur ein anderer Ausdruck dafür, dass J^{2n-1} einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzt.

Die so erzeugte Curve heisst die Panpolare des Büschels $B(C^n)$ für den Punkt ξ und die Gerade γ. Die Gerade γ schneidet J^{2n-1} in $(2n-1)$ Punkten a_γ, deren Tangenten sämmtlich durch den Pol ξ gehen (7. II.); jeder Punkt a_γ bestimmt eine Curve C^n_γ des Büschels, die sich mit ihrer inneren Polare einmal auf γ schneidet; desshalb schneidet sie sich mit der entsprechenden äusseren Polare ebenfalls in diesem Punkte (10. II.). Die Verbindungslinie von ξ mit a_γ ist desshalb sowohl eine Tangente von J^{2n-1} in a_γ, wie eine Tangente von C^n_γ in demselben Punkte; die $(2n-1)$ Tangenten von J^{2n-1}, die

durch den harmonischen Pol dieser Curve gehen, und deren Berührungspunkte auf γ liegen, fallen also zusammen mit den durch ξ gehenden Tangenten A_γ der in der vorigen Nummer erwähnten Curve A_γ^{2n-1}. — Da J^{2n-1} von ungerader Ordnung ist, so muss ihr harmonischer Pol ξ ein Wendepunkt sein. Ist C_ξ^n die durch ξ gehende Curve des $B(C^n)$, und J_ξ^{n-1} ihre innere Polare, so fallen zwei ihrer Schnittpunkte nach ξ, also fallen in diesen Punkt auch 2 der Schnittpunkte von C_ξ^n und J^{2n-1} d. h. die Curven berühren sich in ξ. — Ist n gerade, so ist ξ ein Wendepunkt von J_ξ^{n-1}, dessen Tangente mit der von C_ξ^n in ξ zusammenfällt; in diesem Falle also berühren sich J^{2n-1}, J_ξ^{n-1} in ihrem Wendepunkt ξ.

Die erhaltenen Resultate fassen wir so zusammen [Steiner § 21; I. pag. 71]:

Die Endpunkte a aller Systeme von Sehnen S, die irgend einem und demselben Pol ξ und irgend einer und derselben Geraden γ in Betracht aller einzelnen Curven des gegebenen Curvenbüschels $B(C^n)$ zugehören, liegen zusammen in einer Curve $(2-1)^{\text{ten}}$ Grades J^{2n-1}, welche den Pol ξ zum harmonischen Pol, die Gerade γ zur harmonischen Geraden hat, und welche die $(2n-1)$ Curven C_γ^n, deren durch ξ gelegte Tangenten A_γ in einem Punkte a_γ auf γ berühren, in jenen Punkten a_γ berührt; welche ferner sowohl durch die n^2 Grundpunkte p des gegebenen Curvenbüschels $B(C^n)$, als auch durch die $(n-1)^2$ Grundpunkte q des Büschels von innern Polaren $B(J^{n-1})$ desselben Pols ξ und derselben Geraden γ in Bezug auf jenes gegebene Curvenbüschel geht.

Von den Tangenten-Sehnen [Steiner § 21; I. pag. 71].

14. Betrachte ich zu den Büscheln $B(C^n)$ und $B(J^{n-1})$ noch das Büschel äusserer Polaren von ξ in Bezug auf $B(C^n) : B(A^{n-1})$, welches sich in der Form darstellt:

$$f' + \lambda\varphi' = 0,$$

wo

$$f' = f(x^{n-1}\xi)\,; \quad \varphi' = \varphi(x^{n-1}\xi),$$

so erhalte ich

$$(n-1)^2 + 2(n-1)n = (n-1)(3n-1)$$

Punkte a, in denen sich jedesmal 3 entsprechende Curven der 3 projectivischen Büschel $B(C^n)$, $B(J^{n-1})$, $B(A^{n-1})$ schneiden. Diese Punkte können aufgefasst werden als Schnittpunkte von J^{2n-1} mit der Curve A^{2n-1}, welche durch $B(C^n)$ und $B(A^{n-1})$ erzeugt wird, und welche die äussere Panpolare des Büschels heisst. Die Gleichung dieser letzteren ist:

$$A^{2n-1} \equiv f\varphi' - \varphi f' = 0.$$

Da weiter

$$J^{2n-1} \equiv f\psi - \varphi\chi,$$

so stellt sich jede Curve des durch A^{2n-1}, J^{2n-1} bestimmten Büschels in der Form dar:

$$J^{2n-1} + \varrho A^{2n-1} \equiv f \,.\, \{\psi + \varrho\varphi'\} - \varphi\{\chi + \varrho f'\} = 0.$$

Die Curven $\psi + \varrho\varphi'$, $\chi + \varrho f'$ zerfallen für

$$\varrho = (-\tfrac{1}{2})^n n\gamma_\xi^{n-1}$$

in die Gerade γ und je eine besondere Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $B^{n-2} = 0$, $A^{n-2} = 0$, wie aus Gleichung (8) in (10.) erhellt, so dass für diesen Werth von ϱ wird:

$$J^{2n-1} + \varrho A^{2n-1} \equiv \gamma_x\{B^{n-2} \,.\, f - A^{n-2} \,.\, \varphi\} \equiv \gamma_x A^{2n-2} = 0, \text{ wo also}$$

$$A^{2n-2} \equiv B^{n-2} \,.\, f - A^{n-2} \,.\, \varphi.$$

Die $(n-1)\,(3n-1)$ Punkte a sind demnach die Schnittpunkte von J^{2n-1} 1) mit der Geraden γ, d. h. die oben erwähnten Punkte a_γ, und 2) mit der Curve A^{2n-2}; zu diesen letzteren gehören nothwendiger Weise die n^2 Grundpunkte des Büschels $B(C^n)$, weil ja dieser Büschel zur Erzeugung von J^{2n-1} sowohl, wie von A^{2n-1} gebraucht ist; ferner der doppelt zu rechnende Punkt ξ, weil A^{2n-1} und J^{2n-1} sich in diesem Punkte berühren; denn ist A_ξ^{n-1} die äussere Polare von ξ in Bezug auf C_ξ^n, so berühren sich diese beiden Curven in ξ, also berühren sich C_ξ^n und A_ξ^{2n-1} in demselben Punkte; in diesem aber berühren sich auch C_ξ^n und J^{2n-1}, also auch J^{2n-1} und A^{2n-1}.

Es bleiben noch

$$2(n-1)\,(2n-1) - n^2 - 2 = 3n(n-2)$$

Punkte übrig, die wir mit a_0 bezeichnen wollen. Diese Punkte a_0 sind, ebenso wie die Punkte a_γ, die einen Endpunkte von Sehnen (für ξ als Pol oder mittleren Punkt) des Büschels $B(C^n)$, welche in diesen Punkten die entsprechende Curve des Büschels berühren; solche besonderen Sehnen sollen Tangentensehnen heissen und mit S_0 bezeichnet werden; andere Punkte als diese, mit derselben Eigenschaft kann es nicht geben, weil dieselben sich nur unter den Schnittpunkten der 3 projectivischen Büschel finden können und weil die n^2 Grundpunkte q, die ja gar nicht von ξ und γ abhängen, nicht dazu gehören; eben so wenig der Pol ξ selbst. Somit ist folgendes Steiner'sche Resultat bewiesen [Steiner § 21, I. pag. 71.]:

Durch jeden Pol ξ gehen im Allgemeinen $3(n-2)n+(2n-1)$ Tangentensehnen S_0 des Büschels $B(C^n)$, die jedoch von zweierlei Art sind, nämlich: 1) $2n-1$ derselben bestehen aus den vorgenannten, durch den Pol ξ gehenden Tangenten A_γ einzelner gegebener Curven (den Tangenten der Panpolare, deren Berührungspunkte auf γ liegen), so dass

ihre Endpunkte in den respectiven Berührungspunkten a_γ vereint liegen; 2) die $3n(n-2)$ übrigen dagegen sind eigentliche Tangentensehnen S_0, deren Endpunkte a und a_0 verschieden und nicht auf γ liegen; die $3n(n-2)$ Berührungspunkte a_0 der letzteren liegen allemal mit den n^2 Grundpunkten p des gegebenen Curvenbüschels zusammen in irgend einer Curve $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades A^{2n-2}, welche die zugehörige Panpolare J^{2n-1} in ihrem harmonischen Pol ξ berührt. Die beiden Panpolaren A^{2n-1} und J^{2n-1} jedes Poles ξ in Bezug auf den gegebenen Curvenbüschel $B(C^n)$ haben mit der Geraden γ die nämlichen $(2n-1)$ Punkte a_γ gemein; ferner berühren sie einander im Pol ξ und ihre übrigen gemeinschaftlichen Punkte bestehen aus den n^2 Grundpunkten p und den obigen $3n(n-2)$ Berührungspunkten a_0 der sogenannten Tangentensehnen S_0, was zusammen richtig die volle Zahl ihrer gemeinschaftlichen Punkte $(2n-1)^2$ ausmacht.

Conjugirte Tangenten in conjugirten Punkten.

15. Die dualistische Betrachtung liefert uns im Hinblick auf 10. I. sofort den Satz:

I. Eine allgemeine Curve m^{ter} Klasse K^m liefert in Bezug auf jeden beliebigen Punkt ξ und jede beliebige Gerade γ $\frac{m(m-1)}{2}$ Paare von Tangenten, die einander in Bezug auf ξ und γ conjugirt sind; dieselben sind die gemeinsamen Tangenten von K^m mit einer Curve $(m-1)^{\text{ter}}$ Klasse, deren Tangenten paarweise einander in Bezug auf ξ und γ conjugirt sind.

C^n als Classencurve betrachtet, wird deshalb stets eine bestimmte Anzahl conjugirter Tangenten für ξ und γ enthalten; diese Anzahl ist nur von der Classe der Basis C^n abhängig und wird nicht beeinträchtigt durch ihre stets vorhandenen — denn C^n ist ohne Doppel- und Rückkehrpunkte angenommen — Doppel- und Wendetangenten, weil in dem dualistisch entgegengesetzten Fall der Grad der inneren Polare von C^n, durch das Vorhandensein von Doppelpunkten auf C^n nicht vermindert wird, wie die Betrachtung der Gleichung (8) in (10.) lehrt; also wird auch die Classencurve, welche mit $C^n = K^m$ die conjugirten Tangenten von K_1^m bestimmt, in ihrer Classe nicht erniedrigt durch den nothwendig speciellen Charakter von K^m. Soll aber die Basis conjugirte Tangenten in conjugirten Punkten aufweisen, so erfordert dies entweder eine Bedingung für die Basis, oder für die Lage des Pols, oder für die harmonische Gerade. Diese Bedingung ist, dass

die innere Polare von der Basis berührt wird; denn wenn die Tangenten in einem conjugirten Punktepaare conjugirt sind, so fallen die Endpunkte zweier Sehnen paarweise zusammen; und da die innere Polare durch sämmtliche Endpunkte geht, so berührt sie die Basis in diesem Punktenpaar. Und wenn umgekehrt die Basis die innere Polare berührt, so vereinigen sich in dem Berührungspunkt die Einen Endpunkte zweier Sehnen, also müssen die beiden andern in dem conjugirten Punkt vereinigt sein, und daher sind die Tangenten von C^n als gleichzeitige Tangenten von J^{n-1} conjugirt (7. I.).

Es wird gut sein, dies als Satz auszusprechen:

II. Wenn die innere Polare eines Poles ξ und einer Geraden γ ihre Basis berührt, so berührt sie diese auch in dem conjugirten Punkte und die Tangenten in diesem Punkte sind conjugirte Geraden.

Und die Umkehr:

III. Wenn die Tangenten in zwei conjugirten Punkten der Basis gleichfalls conjugirt sind in Bezug auf einen Punkt ξ und eine Gerade γ, so berührt die innere Polare von ξ und γ ihre Basis in jenen beiden Punkten.

Da nun die Berührung zweier Curven nur eine Bedingung erfordert, so wird ein Curvenbüschel $B(C^n)$ stets Curven enthalten, die in conjugirten Punkten von conjugirten Tangenten berührt werden. Sind:

$$B(C^n) \equiv a_x^n + \lambda b_x^n = 0,$$

$$B(J^{n-1}) \equiv i_x^{n-1} + \lambda j_x^{n-1} = 0$$

die Gleichungen der beiden Büschel, so wird die in Rede stehende Bedingungsgleichung vom Grade

$$6n^2 - 12n + 4$$

in λ. Die Wurzeln der Gleichung bestimmen im Allgemeinen eben so viele Curven des Büschels, denen die verlangte Eigenschaft zukommt; zu diesen gehören auch die $(2n-1)$ Curven C_γ^n, welche von den durch ξ gelegten Tangenten von A_γ^{2n-1} (12.) in Punkten auf γ berührt werden, und ebenso die durch ξ gehende Curve C_ξ^n des Büschels $B(C^n)$; aber für diese Curven fallen die conjugirten Punkte zusammen, weil sie in die harmonische Gerade bez. den harmonischen Pol fallen; es bleiben daher scheinbar noch $(6n^2 - 14n + 4)$ Curven übrig; in der That sind es nur $(3n^2 - 7n + 2)$, weil nach dem obigen Satze die $(6n^2 - 14n + 4)$ Punkte der Ebene, in denen noch eine Berührung zwischen der Basis und der innern Polare eintreten kann, paarweise auf einer und derselben Curve liegen. Die Gleichung, als deren Wurzeln sich die $(6n^2 - 14n + 4)$ Werthe von λ ergeben, muss daher jede Wurzel zweimal liefern, d. h. das Quadrat einer Gleichung $(3n^2 - 7n + 2)^{\text{ten}}$ Grades sein; also [Steiner § 22, I. pag. 73.]:

Durch jeden Pol $\mathfrak{x}$ gehen im Allgemeinen $(3n-1)(n-2)$ eigentliche Sehnen $\mathfrak{S}$, in deren Endpunkten a und a_1 die Tangenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ sich auf γ schneiden und conjugirt sind, und wo die Curve $\mathfrak{C}^n$, für welche $\mathfrak{S}$ eine Sehne ist, sowohl von ihrer inneren Polare $\mathfrak{J}^{n-1}$ als auch von der Panpolare J^{2n-1} berührt wird. Oder:

Unter den zu demselben Pol und derselben Geraden gehörigen inneren Polaren des Büschels $B(C^n)$ giebt es

$$(3n-1)\,n-2)$$

solche $\mathfrak{J}^{n-1}$, welche ihre Basis $\mathfrak{C}^n$ in zwei Punkten berühren.

Doppelpunkte des $B(J^{n-1})$ [Steiner § 21, II; pag. 74.].

Die Betrachtungen der achten Nummer liefern ohne Weiteres:

Der durch $B(C^n)$ bestimmte Büschel $B(J^{n-1})$ hat $2(n-2)$ Doppelpunkte auf γ (8); der Rest von $(n-2)\,3(n-8)$ Doppelpunkten muss sich zu conjugirten Punktenpaaren zusammen ordnen (8); und wenn n ungerade ist, fällt ein vereinzelter Doppelpunkt in den Pol. Es giebt also

$$\frac{(n-2)(3n-8)}{2} \text{ resp. } \frac{(n-2)(3n-8)-1}{2}$$

Curven J^{n-1} mit zwei conjugirten Doppelpunkten.

Dritter Theil.

Zur Theorie der Curven dritter Ordnung.

16. Es hat sich in der vorstehenden allgemeinen Theorie (4) ergeben, dass die Forderung: dass eine Curve dritter Ordnung C^3 einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitze, keine Bedingungsgleichungen für die Coefficienten von C^3 nach sich zieht. Ferner haben wir bewiesen, dass, wenn eine Curve ungerader Ordnung einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzt, dann 1) der Pol auf der Curve liegt, 2) dass die erste Polare des Pols in Bezug auf die Curve die harmonische Gerade ganz enthält. Daraus folgt für Curven dritter Ordnung, deren erste Polare ja ein Kegelschnitt ist, also für einen harmonischen Pol in ein Geradenpaar WH zerfallen muss, dass der harmonische Pol auf dem Schnitt der Curve mit ihrer Hesse'schen Curve liegt, also ein Wendepunkt ist; eine der beiden Geraden, in welche der Polarkegelschnitt von $\mathfrak{x}$ zerfällt, etwa W, ist bekanntlich die Wendetangente; mit dieser kann die harmonische Gerade nicht zusammenfallen, weil sie nicht die Eigenschaften einer solchen hat; also ist sie die andere Gerade H, welche in der

Theorie der Curven dritter Ordnung bereits den Namen der harmonischen Geraden des Wendepunktes erhalten hat.

Wir haben also den Satz:

I. Zu jeder Curve dritter Ordnung C^3 lässt sich neunmal ein harmonischer Pol und eine harmonische Gerade finden; dieselben sind identisch mit den Wendepunkten und den zugehörigen harmonischen Geraden.

Da der harmonische Pol und die harmonische Gerade für Curven dritter Ordnung vier lineare Gleichungen für die Coefficienten liefert (4. II.), so reichen, wenn der Wendepunkt und die zugehörige harmonische Gerade einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, fünf weitere Punkte hin, um dieselbe eindeutig zu bestimmen. Soll C^3 noch durch einen gegebenen sechsten Punkt gehen, so werden die Coordinaten des Wendepunkts ξ und der harmonischen Geraden γ einer von jenen sechs Punkten abhängigen Bedingung unterworfen sein, die sich folgendermassen finden und geometrisch interpretiren lässt:

Ist $f(x^3) = 0$ eine gegebene Curve dritter Ordnung; ξ einer ihrer Wendepunkte, $c_x = 0$ die zugehörige Wendetangente, und $\gamma_x = 0$ die zugehörige harmonische Gerade, so müssen die folgenden Gleichungen bestehen:

$$(1) \qquad f(\xi^3) = 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \, \partial \xi_k} = c_i \gamma_k + c_k \gamma_i,$$

und als Folge hiervon durch Multiplication der drei Gleichungen (2) mit den ξ_i und Addition, $c_\xi \cdot \gamma_\xi = 0$, und da ξ nicht auf γ liegt:

$$(3) \qquad c_\xi = 0.$$

Jede Curve dritter Ordnung $f = 0$, die durch sechs gegebene Punkte geht, stellt sich, wenn

$$\varphi = 0 \ , \ \varphi' = 0 \ , \ \varphi'' = 0 \ , \ \varphi''' = 0$$

vier bestimmte Curven dritter Ordnung sind, die sich in jenen sechs Punkten schneiden, in der Form dar:

$$f = \lambda\varphi + \lambda_1\varphi' + \lambda_2\varphi'' + \lambda_3\varphi''' = 0.$$

Führe ich f in dieser Form in das System der sechs Gleichungen (2) ein, so erhalte ich mit (3) 7 homogene lineare Gleichungen für die vier Grössen λ und die drei Grössen c_i, deren Determinante $= 0$ gesetzt die gesuchte Bedingungsgleichung liefert. Setzt man

$$\frac{1}{6} \, \frac{\partial^2 \varphi^{(h)}}{\partial \xi_i \, \partial \xi_k} = \varphi^{(h)}_{ik},$$

so erhält man:

$$0 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi'_{11} & \varphi''_{11} & \varphi'''_{11} & 2\gamma_1 & 0 & 0 \\ \varphi_{22} & \varphi'_{22} & \varphi''_{22} & \varphi'''_{22} & 0 & 2\gamma_2 & 0 \\ \varphi_{33} & \varphi'_{33} & \varphi''_{33} & \varphi'''_{33} & 0 & 0 & 2\gamma_3 \\ \varphi_{12} & \varphi'_{12} & \varphi''_{12} & \varphi'''_{12} & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ \varphi_{13} & \varphi'_{13} & \varphi''_{13} & \varphi'''_{13} & \gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \varphi_{23} & \varphi'_{23} & \varphi''_{23} & \varphi'''_{23} & 0 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix},$$

eine Gleichung, welche für die ξ_i vom fünften und für die γ_i vom zweiten Grade ist. Daraus folgt der Satz Steiners [§ 7, pag. 13; § 12, pag. 30.]:

II. Soll eine beliebige Curve C^3 durch gegebene sechs Punkte p gehen, und eine gegebene Gerade γ zur harmonischen Geraden eines ihrer Wendepunkte ξ haben, so ist der Ort dieses ξ eine Curve fünften Grades $\mathfrak{M}^5$,

und ein zweiter Satz:

III. Soll eine beliebige Curve C^3 durch gegebene sechs Punkte gehen, und einen gegebenen Punkt ξ zum Wendepunkte haben, so umhüllt die zugehörige harmonische Gerade einen Kegelschnitt.

Wir gehen hier nicht weiter auf die von Steiner in den §§ 11, 12 seiner Abhandlung angegebenen Eigenschaften der Curven dritter Ordnung ein, weil dieselben sich fast ausschliesslich auf die beiden Sätze II., III. stützen, und aus diesen vermöge der allgemeinen Theorie der Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen, leicht abzuleiten sind. Ich will nur bemerken, dass, wenn man in der Gleichung 1) der Curve $\mathfrak{M}^5$ die γ_i ersetzt durch die Coordinaten einer durch den Punkt ξ und einen willkürlich angenommenen Punkt α gelegten Geraden, man eine Gleichung siebenten Grades G^7 für die ξ_i erhält; dieselbe ist der Ort des Doppelpunktes ξ der Schaar von Curven dritter Ordnung, welche durch die oben erwähnten sechs Punkte p gehen, und immer einen Doppelpunkt haben, dessen eine Tangente durch den festen Punkt α geht. [Steiner, § 12, I, pag. 30.]

Wir wenden uns zur Ableitung der wichtigen Resultate, welche Steiner im § 15. der citirten Abhandlung niedergelegt hat.

Die innere Polare für die Curve dritter Ordnung als Basis.

17. Ist die gegebene Basis eine Curve dritter Ordnung C^3, so ist die innere Polare ein Kegelschnitt J^2 und somit lassen sich durch jeden Punkt P der Ebene drei Sehnen S ziehen, deren auf C^3 gelegene beiden Endpunkte harmonisch getrennt wer-

den durch P und ihren Schnittpunkt mit einer fest angenommenen Geraden. Die Gleichung $J^2=0$ geht nach (10.) (8) der allgemeinen Theorie über in:

(1) $$J^2 \equiv 3\gamma_\xi^2 f(\xi z^2) - 6\gamma_\xi \gamma_z f(\xi^2 z) + 4\gamma_z^2 f(\xi^3) = 0,$$

wenn ξ der harmonische Pol und γ die harmonische Gerade ist.

Da die sechs Endpunkte der drei durch ξ gelegten Sehnen S auf dem Kegelschnitt J^2 liegen, so müssen die drei übrigen Schnittpunkte mit C^3 auf einer Geraden R liegen, deren Gleichung ist:

$$R = 2\gamma_z f(\xi^3) - 3\gamma_\xi f(\xi^2 z) = 0.$$

Das Product der drei Sehnen S ist deshalb diejenige Curve des durch die Curven C^3 und $R+J^2$ bestimmten $B(C^3)$, welche durch ξ geht und dargestellt durch

$$f(\xi^3)\gamma_\xi^3 . f(z^3) + [(2\gamma_z f(\xi^3) - 3\gamma_\xi f(\xi^2 z)] . J^2 = 0.$$

Aus den Gleichungen für R und J^2 folgt:

$$3\gamma_\xi^2 . f(\xi z^2) - J^2 \equiv 2R.\gamma_z,$$

d. h. die Schnittpunkte der zu demselben Pol gehörigen äusseren und inneren Polare liegen paarweise auf den harmonischen Geraden γ und auf der Geraden R. [Steiner § 20.]

Der Kegelschnitt J^2 kann in ein Linienpaar zerfallen; welchen Ort muss der Pol alsdann beschreiben? [Steiner § 15, I, pag. 36.] Diese Frage lässt sich folgendermaassen beantworten:

Es ist bekannt, dass wenn

$$\varphi_z^2 = \varphi_z'^2 = \varphi_z''^2 = 0$$

einen in symbolischer Form geschriebenen Kegelschnitt darstellt, die Discriminante desselben ist:

$$(\varphi \ \varphi' \ \varphi'')^2.$$

Dieser Ausdruck geht für unsern Fall über in

$$54\gamma_\xi^4 \{\gamma_\xi^2 (abc)^2 a_\xi b_\xi c_\xi - 3\gamma_\xi (abc)(ab\gamma) a_\xi b_\xi c_\xi^2 + 2f(\xi^3)(ab\gamma)^2 a_\xi b_\xi\}.$$

Addirt man zu dem zweiten Term der Klammer die beiden Ausdrücke, welche aus ihm durch successive Vertauschung von c mit a, und c mit b entstehen, und dividirt durch 3, so ändert sich nichts und man erhält

$$3\gamma_\xi (abc)(ab\gamma) a_\xi b_\xi c_\xi^2$$
$$= \gamma_\xi (abc) a_\xi b_\xi c_\xi \{(ab\gamma) c_\xi - (cb\gamma) a_\xi - (ac\gamma) b_\xi\}.$$

Vermöge der Identität wird dieser Ausdruck:

$$= \gamma_\xi (abc) a_\xi b_\xi c_\xi (abc)\gamma_\xi$$
$$= (abc)^2 a_\xi b_\xi c_\xi . \gamma_\xi^2,$$

also wird:

$$(abc)(ab\gamma) a_\xi b_\xi c_\xi^2 = \tfrac{1}{3}(abc)^2 a_\xi b_\xi c_\xi \gamma_\xi$$

und es zerstören sich die beiden ersten Terme der Discriminante; dieselbe nimmt die Form an:

$$2 \cdot 54\, \gamma_\xi^4\, f(\xi^3)\, \Theta(\xi^2, \gamma^2)$$

wo

$$\Theta(\xi^2, \gamma^2) = (ab\gamma)^2\, a_\xi\, b_\xi .$$

Die Discriminante $= 0$ gesetzt liefert den Ort des Poles ξ, für welchen die innere Polare J^2 in ein Linienpaar übergeht; dieser Ort besteht also:

1) aus der Geraden γ;

2) aus der Basis C^3;

3) aus dem von Steiner mit E^2 (s. folgende Nummer) bezeichneten Kegelschnitt $\Theta = 0$.

Für den Fall 1) wo der Pol auf γ liegt, also $\gamma_\xi = 0$ ist, geht die Gleichung der inneren Polare über in das Quadrat der Geraden γ_z; liegt der Pol gleichzeitig auf γ und C^3, so nimmt die Gleichung der inneren Polare die Form an:

$$\gamma_z\, [\gamma_z + k\, f(\xi^2 z)] = 0,$$

wo k jeden beliebigen Werth annehmen darf; die innere Polare hört also dann auf ein bestimmter Kegelschnitt zu sein.

Von der zweiten Polare der Geraden γ.

18. Dass $\Theta(x^2, \gamma^2) = 0$ den Kegelschnitt E^2 vorstellt, d. h. durch die Polargeraden eines auf γ fortrückenden Poles umhüllt wird, folgt unmittelbar aus der bekannten Identität

$$\Delta \binom{\gamma u}{\gamma u}_x = \binom{\gamma}{\gamma}_x \binom{u}{u}_x - \binom{\gamma}{u}_x^2 .$$

Die Symbole

$$\binom{\gamma u}{\gamma u}_x ,\ \binom{\gamma}{\gamma}_x ,\ \binom{u}{u}_x$$

stellen die aus der in x geschriebenen Hesse'schen Determinante $\Delta = (abc)^2\, a_x\, b_x\, c_x$ entstehenden Determinanten vor, wenn man erstere mit den γ_i und u_i, bez. mit den γ_i, u_i allein rändert, so dass

$$\binom{\gamma u}{\gamma u}_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \gamma_1 & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \gamma_3 & u_3 \\ \gamma_1 & \cdot & \gamma_3 & 0 & 0 \\ u_1 & \cdot & u_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und

$$\binom{\gamma}{\gamma}_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \gamma_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \cdot & \gamma_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$\binom{\gamma u}{\gamma u}_x$ ist quadratisch in den u_i und linear in den x_i; jenachdem man die x_i gegeben und die u_i veränderlich, oder umgekehrt, ansieht, stellt $\binom{\gamma u}{\gamma u}_x = 0$ das Punktenpaar vor, in welchem der Polarkegelschnitt von x in Bezug auf C^3 $\beta = 0$ von γ geschnitten wird, oder die Polargerade des Punktes, in welchem die Geraden u und γ sich schneiden.

$$\binom{\gamma}{\gamma} \equiv \Theta(x^2, \gamma^2) = 0$$

stellt einen Kegelschnitt vor; ebenso $\binom{u}{u}_x = 0$ und $\binom{\gamma}{u}_x = 0$, wenn die u_i bestimmte Werthe erhalten. Lege ich nun den u_i beliebige, aber feste Werthe bei, so folgt aus

$$\Delta \binom{\gamma u}{\gamma u}_x \equiv \Theta \cdot \binom{u}{u} - \binom{\gamma}{u}^2,$$

dass die acht Schnittpunkte von Θ mit Δ und der zu dem Schnittpunkte von u und γ gehörigen Polargeraden zusammenfallen mit den doppelt zu rechnenden vier Schnittpunkten der Kegelschnitte $\Theta = 0$ und $\binom{\gamma}{u}_x = 0$, wie auch u beschaffen sein mag, d. h. dass 1) die Polargerade eines beliebigen Punktes auf γ den Kegelschnitt $\Theta = 0$ berührt und demgemäss E^2 und Θ identisch sind und dass 2) $\Theta = 0$ sich mit der Hesse'schen Determinante in drei Punkten, die mit X, Y, Z bezeichnet werden sollen, berührt. Die Punkte von $\Theta = 0$ haben daher die Eigenschaft, dass ihre Polarkegelschnitte die Gerade γ in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, also im Allgemeinen berühren; nur für die gleichzeitig auf $\Delta = 0$ gelegenen Punkte von $\Theta = 0$, d. h. für die Punkte X, Y, Z tritt keine Berührung ein, weil $\Delta = 0$ der Ort der Pole ist, deren Polarkegelschnitte einen Doppelpunkt besitzen, d. h. in ein Linienpaar zerfallen; die Punkte X', Y', Z', in denen die in Geradenpaare zerfallenden Polarkegelschnitte von bezüglich X, Y, Z die Gerade γ schneiden, sind die Doppelpunkte derselben.

Die Punkte x von E^2 und die Punkte y von γ ordnen sich paarweise zusammen; denn die Polargerade von y berührt E^2 in x und der Polarkegelschnitt von x berührt γ in y. Der analytische Zusammenhang zwischen zwei entsprechenden Punkten x und y lässt sich leicht aus den Gleichungen

(1) $$a_x a_y a_i = \varrho \gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet, ableiten; unter der Bedingung

$$\gamma_y = 0$$

sagen diese aus, dass γ eine Tangente des Polarkegelschnittes von x:

$$a_x a_y^2 = 0$$

ist; dass also x ein Punkt von C^2 ist; aus (1) folgt unmittelbar, dass sich die y_i verhalten wie die Unterdeterminanten nach den unbestimmten Elementen in

$$(ab\gamma)\ a_x b_x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdot \\ a_2 & b_2 & \cdot \\ a_3 & b_3 & \cdot \end{vmatrix},$$

dass also ist

$$\text{(2)} \qquad \sigma u_y \equiv \left(\tbinom{\gamma}{u}\right)_x = (ab\gamma)\ (abu)\ a_x b_x$$

und wegen der Symmetrie der Gleichungen (1) in x und y

$$\text{(3)} \qquad \tau u_x \equiv \left(\tbinom{\gamma}{u}\right)_y = (ab\gamma)\ (abu)\ a_y b_y,$$

wo σ, τ Proportionalitätsfactoren bedeuten.

Fall, wo der Pol der inneren Polare in die Basis C^3 rückt.

[Steiner § 15, II, pag. 37.]

19. Rückt der Pol P oder x in die Basis C^3, so geht die Gleichung von J^2 über in die eines Linienpaares SS_1, dessen Gleichung gemäss 17. (1) sein wird:

$$\text{(1)} \qquad \gamma_x f(xz^2) - 2\gamma_z f(x^2 z) = 0,$$

und welches x zum Doppelpunkt hat; die drei Sehnen S (10), welche für jeden beliebigen Pol durch C^3 und die innere Polare bestimmt werden, gehen in diesem Falle über in die Tangente von C^3 in x und in die innere Polare selbst.

Der Anblick der vorstehenden Gleichung lehrt unmittelbar, dass das Sehnenpaar SS_1 sich mit dem Polarkegelschnitt von x auf γ schneidet (10. II.); da für die Schnittpunkte von C^3 und E^2 eine Berührung zwischen γ und dem Polarkegelschnitt eintreten muss (18), so folgt, dass es im Ganzen sechs Pole P_0 giebt, für welche das Sehnenpaar SS_1 in eine einzige, doppelt zu rechnende Sehne S_0 übergeht. — Bezeichnen wir mit a, b; a_1, b_1 die Endpunkte der durch x gehenden Sehnen S, S_1, so sehen wir, dass die Geraden $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$ conjugirt sind in Bezug auf ξ und γ (10. II.). Daraus folgt für die Sehnen S_0 der Satz, dass die in ihren Endpunkten gelegten Tangenten sich auf γ schneiden. — Rückt der Pol in einen Wendepunkt w, mit der Wendetangente W, und der harmonischen Geraden H, so besteht die äussere Polare aus H und W,

und die innere geht deshalb über in die Gerade W und eine durch w gehende Gerade, die sich mit H auf γ schneidet.

Von der Curve $S_1{}^6$, welche von der innern Polare umhüllt wird, wenn der Pol sich auf der Basis C^3 fortbewegt.

20. Die Sehnenpaare SS_1 werden, wenn x die Basis C^3 beschreibt, eine Curve einhüllen; zur Herstellung ihrer Gleichung benutzen wir die Eigenschaft der inneren Polare, sich mit der zugehörigen äusseren auf γ zu schneiden.

Demgemäss dürfen wir aus den fünf Gleichungen:

$$u_x = 0\ ,\ a_x^3 = 0\ ,\ b_x b_y^2 = 0\ ,\ \gamma_y = 0\ ,\ u_y = 0$$

nur die x und y eliminiren, um die gesuchte Gleichung zu erhalten; denn jene sagen aus, dass x ein auf C^3 gelegener Pol ist, dessen innere Polare sich mit γ in den Punkten y schneidet, dass also die u_i die Coordinaten der Sehnen SS_1 sind. — Die Elimination der y_i aus den drei letzten Gleichungen liefert:

$$b_x\,(b\gamma u)^2 = 0,$$

was mit $u_x = 0$, $a_x^3 = 0$ die Resultante giebt:

$$\psi = (aub)\,(aud)\,(aue)\,(b\gamma u)^2\,(d\gamma u)^2\,(e\gamma u)^2 = 0.$$

In dieser Gleichung stecken überflüssige Factoren, nämlich das Product $(e\gamma u)^3$ der drei Schnittpunkte von C^3 mit γ, welche ein für alle Mal mit a_γ bezeichnet werden sollen; — um aus ψ diesen Factor herauszuschaffen, wenden wir auf $(b\gamma u)\,(aue)$ und $(b\gamma u)\,(aud)$ die zweite Form der Identität (3) an und erhalten nach Unterdrückung der mit den verschwindenden Factoren $(b\gamma a)\,(uue)$ bezüglich $(b\gamma a)\,(uud)$ behafteten Glieder:

$$\psi = \{(a\gamma u)\,(bud) + (bau)\,(\gamma ud)\}\,\{(a\gamma u)\,(bue) + (bau)\,(\gamma ue)\}$$
$$\cdot\,(d\gamma u)^2\,(e\gamma u)^2\,(aub),$$

was ausgeführt giebt:

$$\psi = -\,\psi + 2\,(a\gamma u)\,(bud)\,(d\gamma u)^2\,(aub)^2\,(e\gamma u)^3,$$

wo das mit dem verschwindenden Factor $(abu)^3 = (bau)^3 = -\,(abu)^3$ behaftete Glied fortgelassen ist und die beiden, nur durch anders bezeichnete symbolische Coefficienten sich unterscheidenden Terme zusammengefasst sind; ψ transformirt sich also in:

$$\psi = (e\gamma u)^3\,(a\gamma u)\,(bud)\,(d\gamma u)^2\,(aub)^2.$$

Mit Fortlassung des überflüssigen Factors und indem wir den symbolischen Buchstaben c für d setzen, erhalten wir also als Umhüllte der Sehnenpaare SS_1 die Curve sechster Classe

$$(abu)^2\,(c\gamma u)^2\,(a\gamma u)^2\,(bcu) = 0\,.$$

Dass $(e\gamma u)^3 = 0$ das Product der drei Punkte a_γ vorstellt, folgt

daraus, dass diese Gleichung das Eliminationsresultat der drei Gleichungen

$$e_x^3 = 0 \quad , \quad \gamma_x = 0 \quad , \quad u_x = 0,$$

welche aussagen, dass u eine durch den Schnittpunkt ($x = a_\gamma$) von C^3 und γ gehende Gerade ist.

Der unmittelbare Anblick der in dieser Form gegebenen Curvengleichung lehrt, dass γ eine dreifache Tangente von $S_1{}^6$ ist, weil drei symbolische Determinanten die Reihen γ_i, u_i enthalten, also nicht nur die linke Seite selbst, sondern auch ihr erstes und zweites nach den u_i genommenes Differential für $u_i = \gamma_i$ verschwindet. Ersetzt man in unserer Gleichung γ durch einen symbolischen Coefficienten d, so erhält man:

$$F = abu^2 \cdot cdu^2 \,.\, adu \cdot bcu = 0,$$

und das ist die Gleichung von C^3 in Liniencoordinaten. Daher lässt sich die Curve $S_1{}^6$ auch in der Form darstellen:

$$\Sigma \frac{\partial^3 F}{\partial a_i \partial a_\varkappa \partial a_\lambda} \gamma_i \gamma_\varkappa \gamma_\lambda = 0.$$

Bestimmung der von einem Punkte der Ebene an $S_1{}^6$ möglichen Tangenten.

21. Da $S_1{}^6$ von der sechsten Classe ist, so gehen durch jeden Punkt Q der Ebene sechs Sehnen S_1 oder aca_1, wo c den mittleren und a, a_1 die Endpunkte von S_1 bedeuten. Die einem Punkte Q oder x auf diese Weise zugeordneten sechs mittleren Punkte c oder z liegen auf einem Kegelschnitt Q^2. Die Gleichung dieses Kegelschnitts wird erhalten, wenn man aus den Gleichungen:

$$(1)\ f(z^3) = 0, \qquad (2)\ f(z'^3) = 0, \qquad (3)\ f(z''^3) = 0,$$
$$(4)\ z_i = kx_i + ly_i, \qquad (5)\ z_i' = mz_i + ny_i, \qquad (6)\ z_i'' = mz_i - ny_i,$$
$$(7)\ \gamma_y = 0,$$

die z_i', z_i'', y_i, k, l, m, n, eliminirt. Diese Gleichungen sagen aus, dass xy eine Sehne S_1, d. h. eine Tangente von $S_1{}^6$ ist; denn z, z', z'' sind drei Punkte auf derselben, welche so liegen, dass das Paar z' z'' durch x und den auf γ gelegenen Punkt y harmonisch getrennt wird, d. h. z ist der mittlere Punkt einer der durch x gehenden Sehnen S_1.

Durch Elimination von y aus (5) und (6) vermöge (4) lassen sich die drei Punkte z, z', z'' bezüglich in der Form darstellen:

$$z, \quad z - \frac{kn}{ml+n}\, x, \quad z + \frac{kn}{ml-n}\, x.$$

Da diese Punkte auf C^3 liegen, so sind die Wurzeln der cubischen Gleichung $f(x + \lambda z)^3 = 0$ die Werthe:

$$0, \quad -\frac{kn}{ml+n} \quad , \quad \frac{kn}{ml-n},$$

man hat also in Folge der Relationen, die zwischen den Wurzeln und Coefficienten einer Gleichung stattfinden:

$$-\frac{3f(x^2z)}{f(x^3)} = \frac{2kn^2}{m^2l^2-n^2} \quad ; \quad \frac{3f(xz^2)}{f(x^3)} = -\frac{k^2n^2}{m^2l^2-n^2},$$

woraus sich ergiebt:

$$2f(xz^2) - kf(x^2z) = 0.$$

Der Werth von k folgt aus (4), (7), indem man die drei Gleichungen (4) mit γ_i multiplicirt, nach i summirt und (7) anwendet; man erhält:

$$k = \frac{\gamma_z}{\gamma_x},$$

so dass die gesuchte Kegelschnittsgleichung wird:

$$(8) \qquad Q^2 \equiv \gamma_z f(x^2z) - 2\gamma_x f(xz^2) = 0.$$

Vertauscht man x und z, so geht die Gleichung über in die der inneren Polare eines auf C^3 gelegenen Poles x.

Der Kegelschnitt Q^2 schneidet die C^3 in sechs Punkten, auf deren Verbindungslinien mit Q_γ durch C^3 jedesmal drei Punkte so bestimmt werden, dass γ durch den vierten harmonischen derselben geht; — die sechs Strahlen sind also die sechs durch Q an $S_1{}^6$ zu legenden Tangenten; rückt Q nach C^3, so berühren sich Q^2 und C^3 in diesem Punkte; rückt Q nach γ, so zerfällt Q^2 in die Gerade γ und in die Polargerade von Q, wie sich aus (8) unmittelbar ergiebt; von den Punkten der Geraden γ sind daher nur drei Tangenten an $S_1{}^6$ möglich, welche nicht nach γ fallen und deren Lage man findet, indem man die Polargerade des betreffenden Punktes auf γ construirt und die drei Schnittpunkte mit C^3 mit demselben verbindet; die drei übrigen sind die Verbindungslinien des auf γ angenommenen Punktes mit den drei Punkten a_γ, fallen also nach γ, wie es auch sein muss, da γ eine dreifache Tangente ist.

Die Bedingung, dass Q^2 einen Doppelpunkt habe, lässt sich in der in 17. angegebenen Weise ableiten; man erhält, nach Fortlassung des Factors $\frac{3}{2}$

$$0 = \gamma_x \left\{3\gamma_z^2 \Delta - f(x^3)\,\Theta\,(x^2\gamma^2)\right\}$$

(wo Δ die Hesse'sche Determinante bedeutet: $\Delta = (abc)^2\, a_x b_x c_x$) — also eine mit γ_x multiplicirte Covariante des fünften Grades in der Variablen, und des dritten in den Coefficienten von f.

Bestimmung der Ordnung von $S_1{}^6$.

22. Die Ordnung von $S_1{}^6$ lässt sich dadurch bestimmen, dass man die Punkte abzählt, in denen $S_1{}^6$ von ihrer dreifachen Tangente γ geschnitten wird. Sechs der gesuchten Punkte sind durch die drei Berührungspunkte von γ gegeben; die übrigen Punkte haben die Ei-

genschaft, dass von den drei (ausser γ) durch sie gelegten Tangenten an $S_1{}^6$, mindestens zwei zusammenfallen; und umgekehrt, wenn zwei der von einem Punkte g von γ an $S_1{}^6$ gelegten Tangenten zusammenfallen, so ist g im Allgemeinen ein Punkt von $S_1{}^6$; im Besonderen kann dieser Punkt, ohne auf $S_1{}^6$ zu liegen, einer Doppeltangente von $S_1{}^6$ angehören; das lässt sich leicht entscheiden, sobald man sich $S_1{}^6$ durch die Bewegung einer Tangente entstanden denkt, und nachsieht, ob die beiden zusammenfallenden oder unendlich nahen Tangenten durch eine unendlich kleine oder eine endliche Bewegung der umhüllenden Geraden erschöpft werden.

Die drei Tangenten, ausser der dreifachen Tangente selbst, welche von einem Punkte g von γ an $S_1{}^6$ möglich sind, werden nach der vorigen Nummer gefunden, indem man die Polargerade von g construirt und durch ihre Schnittpunkte mit C^3 von g aus Strahlen zieht; daher werden im Allgemeinen zwei dieser Strahlen zusammenfallen, und wird g ein Punkt von $S_1{}^6$ werden, wenn die Polargerade von g eine Tangente von C^3 ist; nur wenn dieselbe durch g selbst geht, ist eine besondere Betrachtung nöthig, weil alsdann die angegebene Construction unbrauchbar wird. Die Polargeraden von γ umhüllen den Kegelschnitt E^2; C^3 ist von der sechsten Classe, folglich giebt es 12 Polargeraden, welche C^3 berühren und deren Pole auf γ liegen; aber drei dieser Pole gehören zu den eben erwähnten Punkten, welche auf ihrer eigenen Polargeraden liegen; es sind dies die Punkte a_γ, deren Tangenten A_γ an C^3 gleichzeitig ihre Polargeraden sind. A_γ schneidet C^3 in a_γ, dem benachbarten, und einem dritten, endlich entfernten Punkte; die Verbindungslinien dieser Punkte mit a_γ würden nach der allgemeinen Construction die drei Tangenten von $S_1{}^6$ liefern; das hat aber nur einen Sinn für den zweiten und dritten Schnittpunkt von A_γ mit C^3, und lehrt, dass A_γ mindestens eine Doppeltangente von $S_1{}^6$ ist; über die Richtung der dritten Tangente giebt diese Betrachtung keine Auskunft; es wird aber in der Nummer 24. vermittelst der Rechnung, ganz unabhängig von vorangehenden Betrachtungen gezeigt werden, dass drei durch a_γ gehende Tangenten von $S_1{}^6$ nach A_γ fallen; nun kann A_γ keine dreifache Tangente von $S_1{}^6$ sein, weil sonst eine Curve sechster Classe vier dreifache Tangenten hätte, welche, da sie für zwölf Doppeltangenten zählen, das Maximum der möglichen Doppeltangenten um zwei überschreiten; A_γ muss deshalb eine Doppeltangente von $S_1{}^6$ sein, während also im Allgemeinen für jeden Punkt von A_γ zwei von den sechs an $S_1{}^6$ gelegten Tangenten zusammenfallen, ist a_γ derjenige ausgezeichnete Punkt auf A_γ, von welchem aus nicht zwei, sondern drei Tangenten nach A_γ fallen, d. h. a_γ ist ein Punkt von $S_1{}^6$. Die neun übrigen Pole g, deren Polargeraden die Basis C^3 in Punkten berühren, die wir mit d_0 bezeichnen

wollen, während jene Punkte g selbst d_γ heissen mögen, liefern ohne Weiteres Punkte von $S_1{}^6$ auf γ. Weitere Punkte verbietet die Construction der Tangenten. — Die drei Berührungspunkte g_γ der dreifachen Tangente γ sind offenbar die Pole, deren Polargeraden durch einen der drei Punkte von a_γ gehen; denn stets und nur dann fällt noch eine vierte Tangente nach γ.

Wir haben also im Ganzen 18 Punkte auf γ erhalten. Die drei Punkte a_γ, die neun Punkte d_γ und die drei doppelt zu rechnenden Punkte g_γ, und somit können wir folgenden Satz aussprechen [Steiner § 15; II, 1; pag. 38]:

Bewegt sich ein Pol P auf C^3, so umhüllt seine in ein Geradenpaar SS_1 zerfallende innere Polare J^2 eine Curve sechster Classe und 18ten Grades; welche γ zur dreifachen, und die in den drei Punkten a_γ an C^3 gezogenen Tangenten A_γ zu Doppeltangenten hat.

23. Bekanntlich bestimmen die Punkte irgend einer Geraden A einen Büschel Polarkegelschnitte in Bezug auf C^3; irgend zwei der vier Grundpunkte dieses Büschels bestimmen eine Seite B eines der drei, zum Büschel gehörigen Geradenpaare; die Tangenten in den Schnittpunkten dieser Geraden B mit C^3 schneiden sich in einem der Punkte, in welchen A die Hesse'sche Determinante schneidet. — Wenden wir dies auf unsern Fall an, indem wir die Polargerade D_0 eines der Punkte d_γ zur Geraden A machen; die Polarkegelschnitte aller Punkte dieser Geraden müssen alsdann durch d_γ gehen; sie müssen aber auch sämmtlich durch den Punkt d_0 (22.) gehen, in welchen C^3 von D_0 berührt wird, daher sind d_γ, d_0 2 von den 4 Grundpunkten des Büschels, also ist $\overline{d_\gamma d_0} = \mathfrak{D}_0$ eine solche Gerade B, deren im Schnitt mit C^3 an C^3 gelegte Tangenten durch einen auf der Hesse'schen Curve gelegenen Punkt Q gehen. Also die neun Polargeraden D_0 der Punkte d_γ berühren C^3 in Punkten d_0; die Verbindungslinien $d_0 d_\gamma = \mathfrak{D}_0$ schneiden C^3 in je drei Punkten, deren Tangenten sich in je einem einzigen Punkte der Hesse'schen Curve schneiden [Steiner, § 15; II, 5, p. 40.].

Die gemeinsamen Tangenten von C^3 und $S_1{}^6$.

24. Die Frage nach den gemeinsamen Tangenten einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve $f = 0$ mit einer in Liniencoordinaten gegebenen $\Phi(u) = 0$ lässt sich dadurch erledigen, dass man die Werthe

$$\varrho u_i = f_i = \frac{1}{n} \frac{\partial f(x^n)}{\partial x_i}$$

in die Gleichung von $\Phi(u) = 0$ einsetzt; man erhält dann eine Gleichung $\psi = 0$ für die x, welche mit $f = 0$ zusammen die Punkte von

f liefert, deren Tangenten auch Tangenten an $\Phi = 0$ sind; erhält $\psi = 0$ unter Anwendung von $f = 0$ einen quadratisch auftretenden Factor $\chi^2(x) = 0$, so berühren sich entweder die Curven $f = 0$, $\Phi(u) = 0$ in dem Schnitt von f und χ, oder die in jenem Durchschnitt an f gezogenen Tangenten sind Doppel- resp. Wendetangenten für eine der beiden Curven $f = 0$, $\Phi(u) = 0$; geht $\psi = 0$ durch die Wendepunkte von $f = 0$, so wird Δ ein solcher Factor χ werden; der Factor Δ^2 in ψ zeigt also an, dass f und Φ die Wendetangente von f gemein haben; enthält aber ψ den Factor Δ dreimal, und ist der Wendepunkt, wie im Folgenden immer der Fall ist, ein gewöhnlicher, d. h. kein höherer Wendepunkt, dessen Wendetangente für mehr als zwei Tangenten zu zählen ist, so kann dies nichts Anderes bedeuten, als die Berührung von $\Phi(u)$ und $f = 0$ in dem Schnitt von f und Δ, d. h. in den Wendepunkten.

Wenden wir dies an auf die Curven C^3 und $S_1{}^6$, so handelt es sich darum, den Ausdruck:

$$\Phi = (abu)^2\,(c\gamma u)^2\,(acu)\,(b\gamma u),$$

wenn man darin die u_i durch f_i ersetzt, unter Anwendung von $f = 0$ umzuformen und in eine für die geometrische Interpretation geeignete Gestalt zu bringen.

Nach dem Productsatze (3) hat man nach Einführung der symbolischen Bezeichnung

$$f_i = g_x^2\,g_i = h_x^2\,h_i:$$

$$\begin{aligned}(abf)^2\,a_y\,b_z &= (abg)\,(abh)\,g_x^2\,h_x^2\,a_y\,b_z \\ &= a_y\,b_z\,g_x\,h_x\left\{(abh)^2 g_x^2 - \tfrac{1}{2}(agh)^2 b_x^2 - \tfrac{1}{2}(bgh)^2 a_x^2\right. \\ &\qquad\left. + (agh)\,(bgh)\,a_x\,b_x\right\}.\end{aligned}$$

Wendet man dies auf Φ an, indem man setzt

$$a_y = (acu) \qquad\qquad b_z = (b\gamma u)$$

und berücksichtigt, dass

$$(acu)\,a_x^2 \equiv (fcu) \equiv 0 \quad , \quad (b\gamma u)\,b_x^2 \equiv (f\gamma u) \equiv 0$$

wegen $u_i = f_i$, so geht Φ über in:

$$(agh)\,(bgh)\,(acu)\,(c\gamma u^2)\,(b\gamma u)\,a_x\,b_x\,g_x\,h_x.$$

Vertauscht man hierin einmal b mit g, das andere Mal b mit h und addirt das Resultat beider Vertauschungen zu unserem Ausdruck hinzu, so erhält man:

$$\begin{aligned}\Phi = \tfrac{1}{3}\,(bgh)\,(acu)\,(c\gamma u)^2 &\left\{(agh)\,(b\gamma u) - (abh)\,(g\gamma u)\right. \\ &\left. - (agb)\,(h\gamma u)\right\} a_x b_x g_x h_x,\end{aligned}$$

was unter Anwendung der zweiten Form der Identität liefert:

$$\begin{aligned}\Phi &= \tfrac{1}{3}\,(bgh)^2\,(acu)\,(c\gamma u)^2\,(a\gamma u)\,a_x\,b_x\,g_x\,h_x \\ &= \tfrac{1}{3}\,\Delta\cdot(acu)\,(c\gamma u)^2\,(a\gamma u)\,a_x \qquad [\Delta = (bgh)^2\,b_x\,g_x\,h_x].\end{aligned}$$

Ich wende den Productsatz nochmals an auf

$$
\begin{aligned}
(c\gamma u)^2\, c_y &= (c\gamma g)\,(c\gamma h)\, g_x^2\, h_x^2\, c_y \\
&= (c\gamma g)^2\, g_x\, c_y f - \tfrac{1}{2}(cgh)^2\, \gamma_x^2\, c_y\, g_x\, h_x \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(\gamma gh)^2\, c_x^2\, g_x\, h_x\, c_y + (cgh)\,(\gamma gh)\, c_x\, g_x\, h_x\, c_y\, \gamma_x,
\end{aligned}
$$

vermöge welcher Formel Φ übergeht in:

$$
\begin{aligned}
\Phi = &- \tfrac{1}{6}\,\Delta\, \gamma_x^2\,(acu)\,(a\gamma u)\,(cgh)^2\, a_x\, g_x\, h_x \\
&+ \tfrac{1}{3}\,\Delta\, \gamma_x\,(acu)\,(a\gamma u)\,(cgh)\,(\gamma gh)\, a_x\, c_x\, g_x\, h_x,
\end{aligned}
$$

wobei das mit dem verschwindenden Factor f behaftete Glied ausgelassen ist, ebenso wie das Glied

$$
- \tfrac{1}{2}(\gamma gh)^2\,(acu)\, c_x^2\, g_x\, h_x\,(a\gamma u)\, a_x = - \tfrac{1}{2}(\gamma gh)^2\,(afu)\, g_x\, h_x\,(a\gamma u)\, a_x,
$$

welches wegen $u_i = f_i$ verschwindet.

Verstehe ich unter Δ_i den Differentialquotienten

$$
\frac{1}{3}\,\frac{\partial \Delta}{\partial x_i},
$$

so liefert die Vertauschung von a mit g, Anwendung der Identität und Weglassen des mit $u_x = f$ behafteten Gliedes:

$$
\begin{aligned}
&- (acu)\,(a\gamma u)\,(cgh)^2\, a_x\, g_x\, h_x = (\Delta a u)\,(a\gamma u)\, a_x \\
&= (\Delta a g)\,(a\gamma u)\, a_x\, g_x^2 = \tfrac{1}{2}\,\gamma_x\,(\Delta a g)\,(agu)\, a_x\, g_x \\
&= \tfrac{1}{2}\,\gamma_x\,(\Delta a g)\,(agh)\, a_x\, g_x\, h_x^2 = \tfrac{1}{6}\,\gamma_x\,\Delta_x^2\,.
\end{aligned}
$$

Also wird der erste Term des zuletzt für Φ aufgestellten Ausdrucks

$$
= \frac{1}{36}\,\Delta^3\,\gamma_x^3\,.
$$

Der zweite Term geht durch successive Vertauschung von c mit g, c mit h und Anwendung der Identität über in

$$
\frac{1}{9}\,\Delta^2\cdot\gamma_x\,(a\gamma u)^2\, a_x = - \frac{1}{54}\,\Delta^3\cdot\gamma_x^3\,,
$$

denn es ist:

$$
\begin{aligned}
(a\gamma u)^2\, a_x &= - \tfrac{1}{2}\,\Delta\,\gamma_x^2 + (agh)\,(\gamma gh)\, a_x^2\, g_x\, h_x\, \gamma_x \\
&= - \tfrac{1}{6}\,\Delta\,\gamma_x^2,
\end{aligned}
$$

so dass ich also schliesslich erhalte:

$$
\Phi = \frac{1}{108}\,\Delta^3\,\gamma_x^3\,.
$$

Diese Gleichung lehrt zunächst wegen des Factors Δ^3, dass die Curven $C^3 = K^6$ und $S_1{}^6$ sich in den neun Wendepunkten von C^3 berühren; der Factor γ_x^3 lehrt, dass die im Schnitt a_γ von γ und C^3 an C^3 gelegten Tangenten A_γ je drei gemeinsame Tangenten von C^3 und $S_1{}^6$ repräsentiren. Da nun die A_γ einfache Tangenten von C^3 sind, so müssen von den durch die a_γ gehenden Tangenten von $S_1{}^6$ jedesmal drei in die entsprechende A_γ fallen; hieraus haben wir in

22. den Schluss gezogen, dass die A_γ Doppeltangenten von S_1^6 sind, welche in den a_γ berühren.

Somit sehen wir, dass die 36 gemeinschaftlichen Tangenten von C^3 und S_1^6 aus den neun Wendetangenten und den drei Tangenten A_γ (bei Steiner Asymptoten), jede derselben dreifach gezählt, bestehen [§ 15, II, 2].

25. Die mittleren Punkte der sechs Sehnen S oder Tangenten von S_1^6, welche durch einen Punkt x der Ebene gehen, sind nach 21. bestimmt durch den Schnitt von C^3 mit dem Kegelschnitt Q^2

$$(1) \qquad Q^2 \equiv \gamma_z f(zx^2) - 2\gamma_x f(xz^2) = 0;$$

x soll der Pol von Q^2 heissen.

Daraus folgt, dass wenn S eine bestimmte der sechs Sehnen bedeutet, und ε ihren mittleren Punkt, dass alsdann die Schaar der Kegelschnitte, welche durch Bewegung des Poles x auf S erzeugt wird, durch den Punkt ε geht; diese Schaar $S(Q^2)$ können wir durch Einführung zweier festen Punkte auf S vermittels eines Parameters ausdrücken; wählen wir hierzu die beiden Endpunkte von S und bezeichnen den einen durch ξ, den andern durch η, so wird die $S(Q^2)$ aus (1) entstehen, wenn man darin setzt $x = \xi + \lambda\eta$; auf diese Weise erhält man:

$$(2) \qquad \begin{aligned} 0 = &\{\gamma_z f(z\xi^2) - 2\gamma_\xi f(\xi z^2)\} \\ &+ 2\lambda\{\gamma_z f(z\xi\eta) - \gamma_\xi f(\eta z^2) - \gamma_\xi f(\xi z^2)\} \\ &+ \lambda^2\{\gamma_z f(z\eta^2) - 2\gamma_\eta f(\eta z^2)\}, \end{aligned}$$

als Gleichung des dem Pol $\xi + \lambda\eta$ entsprechenden Kegelschnitts Q^2. Den Festsetzungen gemäss finden dann noch folgende Gleichungen statt:

$$f(\xi^3) = 0 \qquad f(\eta^3) = 0 \qquad f(\varepsilon^3) = 0$$

$$\varepsilon = \xi + \frac{\gamma_\xi}{\gamma_\eta}\eta$$

also:

$$\gamma_\varepsilon = 2\gamma_\xi.$$

Da der Parameter λ quadratisch in (2) auftritt, so gehen durch jeden Punkt der Ebene zwei Kegelschnitte der Schaar, und da die Gesammtheit jener Kegelschnitte durch den Punkt ε geht, so berührt jede durch ε gelegte Gerade zwei Kegelschnitte der Schaar in ε, und bestimmt so zwei Pole $\xi + \lambda\eta$ auf S. Es sei nun T die Tangente von C^3 im Punkte ε, und δ der Schnittpunkt von T mit γ, also

$$f(\varepsilon^2\delta) = 0 \quad , \quad \gamma_\delta = 0;$$

die beiden Kegelschnitte Q^2, welche die Gerade T in ε berühren, berühren alsdann die Curve C^3 und bestimmen auf S zwei Pole $\xi + \lambda_0\eta$ und $\xi + \lambda_1\eta$. Diese beiden Pole haben also die Eigenschaft, dass zu

ihnen ein und derselbe Kegelschnitt Q^2 gehört und dass derselbe die Curve C^3 in ε berührt; aus 21. wissen wir, dass einer dieser Pole, etwa $\xi + \lambda_1 \eta$ der Punkt ε ist, also

$$\lambda_1 = \frac{\gamma_\xi}{\gamma_\eta}$$

sein muss; der zweite Punkt $\xi + \lambda_0 \eta$ hat alsdann die ausgezeichnete Eigenschaft, dass von den sechs durch seinen zugehörigen Q^2 bestimmten Sehnen zwei in die Sehne S fallen, weil eben Q^2 und C^3 sich in ε berühren, also ist derselbe der Berührungspunkt von S mit S_1^6. — Um den Werth von λ_0 zu bestimmen, stellen wir die Bedingung auf, dass die Tangente im Punkte ε des durch (2) gegebenen Kegelschnitts durch den Punkt δ gehe; dies geschieht, indem wir in den Termen der rechten Seite von (2), welche symbolisch geschrieben, das z in der Form enthalten

$$a_z \; b_z ,$$

an Stelle dieses Ausdrucks setzen:

$$a_\varepsilon \, b_\delta + a_\delta \, b_\varepsilon$$

und dabei die Glieder, welche mit γ_δ und $f(\varepsilon^2\delta)$ behaftet erscheinen, fortlassen. — Auf diese Weise erhält man eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln $\lambda_1 = \frac{\gamma_\xi}{\gamma_\eta}$ und λ_0 sind; man hat also nach bekannten Relationen zwischen Wurzeln und Coefficienten einer Gleichung

$$-(\lambda_0 + \lambda_1) = \frac{2\gamma_\varepsilon f(\delta\xi\eta) - 4\gamma_\xi f(\delta\varepsilon\eta) - 4\gamma_\eta f(\delta\varepsilon\xi)}{\gamma_\varepsilon f(\delta\eta^2) - 4\gamma_\eta f(\delta\varepsilon\eta)},$$

indem man nun für λ_1 seinen Werth setzt und

$$\varepsilon = \xi + \frac{\gamma_\xi}{\gamma_\eta}\,\eta$$

einführt, erhält man:

$$(3) \quad \lambda_0 = \frac{\gamma_\eta f(\delta\xi^2) + 2\gamma_\xi f(\delta\xi\eta)}{\gamma_\xi f(\delta\eta^2) + 2\gamma_\eta f(\delta\xi\eta)},$$

wo δ durch die Identität bestimmt ist:

$$u_\delta \equiv (\gamma_\eta a_\xi + \gamma_\xi a_\eta)^2 (a\gamma u).$$

Daher sind die Coordinaten des Berührungspunktes s einer durch ihre Endpunkte ξ und η gegebenen Sehne S mit S_1^6:

$$(4) \quad s_i = \{\gamma_\xi f(\delta\eta^2) + 2\gamma_\eta f(\delta\xi\eta)\}\, \xi_i + \{\gamma_\eta f(\delta\xi^2) + 2\gamma_\xi f(\delta\xi\eta)\}\, \eta_i.$$

Da δ symmetrisch für ξ und η ist, so bleiben die Ausdrücke für s_i unverändert, wenn man die ξ_i mit den η_i vertauscht, was auch nicht anders sein darf, da ja ξ und η als ganz gleichberechtigte Punkte bei der Betrachtung auftreten.

Steiner findet den Punkt s durch eine Construction, die von denselben gegebenen Stücken, d. h. den Punkten ξ $(= a)$, η $(= a_1)$, ε $(= c)$ ausgeht [§ 15, II, 7; pag. 40.].

Unter der Voraussetzung $f(\delta\xi^2) = 0$ wird der Coefficient von ξ_i, unter der Voraussetzung $f(\delta\eta^2) = 0$ der von η_i in (4) gleich Null; denn z. B. geht der Coefficient von ξ_i durch Anwendung von

$$\gamma_\xi \eta = \varepsilon - \gamma_\eta \xi$$

über in

$$\frac{1}{\gamma_\xi}\left\{f(\delta\varepsilon^2) + \frac{\gamma_\eta^2}{\gamma_\xi} f(\delta\xi^2)\right\},$$

ein Ausdruck, der wegen $f(\delta\varepsilon^2) = 0$ für $f(\delta\xi^2) = 0$ verschwindet, d. h. wenn es solche Sehnen S giebt, bei denen die Tangenten von C^3 in dem mittleren Punkte und dem einen Endpunkte sich auf γ schneiden $[f(\delta\varepsilon^2) = 0, f(\delta\xi^2) = 0]$, so fällt der Berührungspunkt dieser Sehne mit S_1^6 in den andern Endpunkt. — Diese Bemerkung wird in 40. von Nutzen sein.

Bestimmung der gemeinsamen Tangenten der Curven S_1^6 und E^2.

26. Zur Bestimmung der den Curven S_1^6 und E^2 gemeinschaftlichen Tangenten, benutzen wir die Eigenschaft, dass die Tangenten von E^2 die Polargeraden eines auf γ fortrückenden Poles η sind, während je zwei Tangenten von S_1^6, welche einen gemeinsamen, auf C^3 gelegenen mittleren Punkt z besitzen, die Gerade γ in ihrem Durchschnitt mit dem Polarkegelschnitt von z schneiden; ist ξ der Durchschnitt einer solchen den Curven E^2 und S_1^6 gemeinsamen Tangente mit γ, so haben wir die Gleichungen:

$$1)\ f(z^3) = a_z^3 = 0\ ,\quad 2)\ f(\eta^2 z) = a_\eta^2 a_z = 0\ ,\quad 3)\ \gamma_\eta = 0,$$
$$4)\ f(\eta^2\xi) = a_\eta^2 a_\xi = 0\ ,\quad 5)\ f(\xi^2 z) = a_\xi^2 a_z = 0\ ,\quad 6)\ \gamma_\xi = 0.$$

Die Elimination von ξ aus den letzten drei Gleichungen liefert symbolisch:

$$(ab\gamma)\,(ac\gamma)\; b_\eta^2\, c_\eta^2\, a_z = 0,$$

eine Gleichung, die mit Hülfe des Productsatzes übergeht in:

$$\left.\begin{aligned}(ab\gamma)^2 a_z b_\eta f(\eta^3) - \tfrac{1}{2}(abc)^2 a_z b_\eta c_\eta \gamma_\eta^2 \\ - \tfrac{1}{2}(\gamma bc)^2 b_\eta c_\eta a_\eta^2 a_z - (abc)(\gamma bc)\, a_z a_\eta b_\eta c_\eta \gamma_\eta\end{aligned}\right\} = 0,$$

und unter Anwendung von (2) und (3) in:

$$f(\eta^3)\,(ab\gamma)^2 a_z b_\eta = f(\eta^3)\,\vartheta_\eta\,\vartheta_z = 0,$$

wo
$$\Theta(z^2, \gamma^2) = \vartheta_z^2 = \vartheta_z'^2.$$

Diese Gleichung giebt 2 Fälle:

$$f(\eta^3) = 0, \qquad \vartheta_\eta\,\vartheta_z = 0;$$

der erste Fall in Gemeinschaft mit den Gleichungen (1), (2), (3) liefert ein Resultat, das sich nach dem Vorhergehenden auch ohne Rechnung ohne Weiteres aussprechen lässt, dass die drei Tangenten A_γ von C^3

sechs gemeinsame Tangenten von $S_1{}^6$ und E^2 repräsentiren, weil die A_γ Doppeltangenten von $S_1{}^6$ und einfache Tangenten von E^2 sind.

Der zweite Fall giebt für η und z die Gleichungen:

$$f(z^3) = 0 \quad , \quad f(\eta^2 z) = 0 \quad , \quad \gamma_\eta. = 0 \quad , \quad \vartheta_\eta \vartheta_z = 0.$$

Die Elimination von η aus den letzten drei Gleichungen führt zunächst auf:

$$(a\vartheta\gamma)\,(a\vartheta'\gamma)\;a_z\vartheta_z\vartheta_z' = 0 \qquad (\vartheta_\zeta^2 = \vartheta_\zeta'^2),$$

oder unter Anwendung des Productsatzes auf

$$(a\vartheta\gamma)\,(a\vartheta'\gamma)\;\vartheta_z\vartheta'_z$$

und Unterdrückung des mit $f(z^3)$ behafteten Gliedes:

$$\vartheta_z'^2\cdot(a\vartheta\gamma)^2\,a_z - \tfrac{1}{2}\gamma_z^2\,(a\vartheta\vartheta')^2\,a_z + (f\vartheta\vartheta')\,(\gamma\vartheta\vartheta')\,\gamma_z = 0,$$

wo $$(f\vartheta\vartheta') = (a\vartheta\vartheta')\;a_z^2\,.$$

Führt man die von Herrn Aronhold mit S_f bezeichnete Zwischenform:

$$S_f = \tfrac{1}{6}\,(abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu) = \tfrac{1}{6}\,S(u^3)$$

ein, und setzt weiter:

$$\tfrac{1}{3}\,\Sigma\,\frac{\partial S}{\partial u_i}\,v_i = S(u^2 v),$$

$$\tfrac{1}{6}\,\Sigma\,\frac{\partial^2 f}{\partial u_i\,\partial u_k}\,v_i v_k = S(uv^2),$$

so kann man schreiben:

$$(a\vartheta\gamma)^2\,a_z = \tfrac{1}{3}\,\gamma_z\,S(\gamma^3)$$
$$(a\vartheta\vartheta')^2 a_z = \tfrac{1}{3}\,\gamma_z\,S(\vartheta^2\gamma)$$

und kann die obige Eliminationsgleichung in die Form bringen:

$$\gamma_z\left\{\tfrac{1}{3}\,\Theta(z^2)\,S(\gamma^3) - \tfrac{1}{6}\,\gamma_z^2\,S(\vartheta^2,\gamma) + (f\vartheta\vartheta')(\gamma\vartheta\vartheta')\right\} = 0.$$

Da der Fall $(f(\eta^3) = 0$ hier ausgeschlossen, so kann z nicht auf A_γ liegen, also auch γ_z nicht verschwinden, und daher sehen wir, dass die sechs übrigen, $S_1{}^6$ und E^2 gemeinsamen Tangenten S_1 ihre mittleren Punkte z auf einem Kegelschnitte C^2 haben, der nach Unterdrückung des Factors γ_z in der letzten Gleichung gegeben ist. Also [§ 15, II, 4.]:

Die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven $S_1{}^6$ und E^2 bestehen: 1) aus den 3 A_γ der Basis C^3, jede doppelt gezählt, und 2) aus sechs Sehnen S_1, deren mittlere Punkte auf dem Kegelschnitte

$$2\cdot\Theta(z^2)\,S(\gamma^3) - \gamma_z^2\,S(\vartheta^2\gamma) + 6\,(f\vartheta\vartheta')\,(\gamma\vartheta\vartheta') = 0$$

liegen.

Fall, wo der Pol der inneren Polare in den Kegelschnitt E^2 rückt.

27. Liegt der Pol P oder x auf dem Kegelschnitt E^2, so zerfällt die innere Polare in ein Geradenpaar JJ_1, das seinen Doppelpunkt

auf γ hat in dem Punkte y, welcher dem Punkte x auf E^2 entspricht (18), wie dies auch die allgemeine Theorie (10. IV.) verlangt.

Besondere Pole auf E^2 haben wir bereits in den sechs Schnittpunkten P_0 und C^3 kennen gelernt (19); ferner erwähnt Steiner drei Punkte, X, Y, Z; es sind dies die bereits erwähnten Berührungspunkte von E^2 mit der Hesse'schen Curve $\Delta = 0$, deren entsprechende auf γ die drei Schnittpunkte von Δ und γ sind (18.).

Aus 7. I. folgt, dass die Gerade J_0, welche einen Punkt x auf E^2 mit dem entsprechenden y auf γ verbindet, mit der Geraden γ das Paar JJ_1 harmonisch trennt. Es ist gut, dies auch analytisch einzusehen, was so geschehen kann:

Aus der ersten der in der 18ten Nummer angegebenen Identitäten: nämlich:

$$\sigma u_y \equiv ab\gamma \cdot abu \cdot a_x b_x$$

folgen die drei Gleichungen:

$$\varrho y_i = \sum_k U_{ik} \gamma_k ,$$

wo die U_{ik} die Unterdeterminanten von f_{ik} der Hesse'schen Determinante bedeuten. — Also hat man für die Gerade $\overline{xy}$ oder J_0 die Gleichung:

$$\varrho\,(xyz) = \Sigma\, U_{ik}\, \gamma_k\, (xz)_i .$$

Wendet man nun auf

$$\sum_i U_{ik}\,(xz)_i$$

den Satz an, dass die Summe der drei Producte entsprechender Unterdeterminanten der Reihenpaare:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

gleich ist:

$$a_x b_z - a_z b_x ,$$

so erhält man:

$$\sum_{ik} U_{ik}\,(xz)_i\,\gamma_k = \begin{vmatrix} \gamma_1 & f_1 & a_x a_z a_1 \\ \gamma_2 & f_2 & a_x a_z a_2 \\ \gamma_3 & f_3 & a_x a_z a_3 \end{vmatrix}$$

oder symbolisch:

$$\varrho\,(xyz) = (\gamma f a) \cdot a_x \cdot a_z .$$

Schreibt man das Quadrat dieses Ausdrucks in der Form:

$$\varrho^2 (xyz)^2 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & f_1 & a_x a_z a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & f_2 & a_x a_z a_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_3 & f_3 & a_x a_z a_3 & 0 & 0 & 0 \\ f_{11} & f_{12} & f_{13} & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & a_x a_z a_1 & a_x a_z a_2 & a_x a_z a_3 \end{vmatrix},$$

so lässt sich durch Umformung der Determinante folgende Form erreichen:

$$\varrho^2 (xyz)^2 = \left\{ \begin{array}{l} \quad \Delta \; \{\gamma_x^2 f(xz^2) - 2\gamma_x \gamma_z f(x^2 z) + \gamma_z^2 f(x^3)\} \\ + \Theta \; \{f(x^3) f(xz^2) - f^2(x^2 z)\}. \end{array} \right.$$

Da aber in unserem Falle $\Theta = 0$ ist, so lässt sich das Quadrat der Linie J_0 in der Form geben:

(3) $$J_0^2 \equiv \gamma_x^2 f(xz^2) - 2\gamma_x \gamma_z f(x^2 z) + \gamma_z^2 f(x^3) = 0,$$

eine Form, aus der unmittelbar hervorgeht, dass die innere Polare für die Schnittpunkte P_0 von C^3 und E^2 eine Doppelgerade wird; denn sobald ich $f(x^3) = 0$ setze, geht die vorstehende Gleichung in die der inneren Polare eines auf C^3 gelegenen Poles über.

Es ist nun leicht, die Gleichung für JJ_1 in die Form zu kleiden:

$$\gamma_z^2 - \lambda^2 (xyz)^2 = 0,$$

denn für

$$\lambda^2 = -\frac{2}{f \cdot \Delta}$$

geht die vorstehende Gleichung durch Unterdrückung des Factors Δ über in:

$$3\gamma_x^2 f(xz^2) - 6\gamma_x \gamma_z f(x^2 z) + 4\gamma_z^2 f(x^3) = 0,$$

und damit ist bewiesen, dass J, J_1 durch γ, S_0 harmonisch getrennt werden.

Aus dieser neuen Form:

$$f_x \gamma_z^2 + \frac{3}{\Delta_x} (xyz)^2 = 0$$

der Geradenpaare JJ_1 erkennt man, dass ein Zusammenfallen derselben in eine Gerade im Allgemeinen nur dann stattfinden kann, wenn entweder $f = 0$ ist, was die sechs Geraden S_0 liefert, oder wenn $(xyz)^2 = 0$ ist, d. h. wenn x auf γ rückt, also einer der beiden Schnittpunkte ω, ω' von E^2 und γ ist; für diesen letzteren Fall geht JJ_1 in die doppelt zu rechnende Gerade γ über.

Dem Punkte ω, als Punkt von E^2 betrachtet, entspricht der Punkt ω', als Punkt von γ betrachtet, und umgekehrt, denn: ω, ω' sind die einzigen Punkte auf γ, deren Polarkegelschnitt von dieser Geraden berührt wird; es seien ω_1, ω_1' diese beiden Berührungspunkte, dann geht die erste und zweite Polare von ω bezüglich ω'

durch ω_1 bez. ω_1', also auch die zweite und erste Polare von ω_1, ω_1', durch bez. ω, ω'; daher müssen ω_1, ω_1' Punkte von E^2 sein, d. h. mit ω, ω' zusammenfallen, und zwar muss, da ω, ω' beliebig gegen C^3 liegen und deshalb nicht von ihren eigenen Polargeraden aufgenommen werden, ω_1 nach ω', ω_1' nach ω fallen.

Von der Curve J_1^6, welche von der inneren Polare umhüllt wird, wenn der Pol sich auf dem Kegelschnitte E^2 fortbewegt.

28. Wie die Sehnenpaare SS_1 eine Curve umhüllten, wenn ihr Pol auf C^3 sich fortbewegt, so umhüllen auch die Paare JJ_1 eine Curve, wenn der Pol sich auf E^2 fortbewegt. Zur Herstellung der Gleichung dieser Curve dient uns das System:

$$(1) \qquad 3\gamma_x^2\, a_x\, a_z^2 - 6\gamma_x\, \gamma_z\, a_z\, a_x^2 + 4\gamma_z^2\, a_x^3 = 0,$$

$$(2) \qquad v_x \equiv (\gamma_v)_y \equiv (ab\gamma)\,(abv)\, a_y\, b_y,$$

$$(3) \qquad u_y = 0 \quad , \quad \gamma_y = 0,$$

$$(4) \qquad u_z = 0 \quad , \quad m_z = 0\,.$$

Die Identität (2) ersetzt mit Hülfe von $\gamma_y = 0$ die Gleichung des Kegelschnitts E^2; drückt man vermittelst derselben die x_i in (1) durch die y_i aus, und vermittelst (3) die y_i durch die $(u\gamma)_i$, so hängt (1) nur noch von den u_i und z_i ab; die z_i aber drücken sich wegen (4) durch $(mu)_i$ aus, wo $m_z = 0$ eine ganz beliebige Gerade bedeutet; durch diese Operationen wird (1) in eine Gleichung achten Grades für die u_i und zweiten Grades für die m_i übergeführt; wir werden zeigen, dass dieselbe den Factor $(\gamma mu)^2$ enthält, die durch JJ_1 umhüllte Curve also von der sechsten Classe ist*). Betrachten wir die drei Terme in (1) einzeln: der letzte Term der Gleichung (1): $4\gamma_z^2\, a_x^3$ erhält den Factor $(\gamma mu)^2$ direct; die beiden Terme

$$\begin{aligned} &3\gamma_x^2\, a_x\, a_z^2 - 6\,\gamma_x\, \gamma_z\, a_z\, a_x^2 \\ &= 3\,\gamma_x^2\, a_x\, (amu)^2 - 6\,\gamma_x\, a_x^2\, (\gamma mu)\, (amu) \end{aligned}$$

kann ich mir entstanden denken aus

$$P = a_x\, a_z\, (amu),$$

indem ich einmal darin setze $a_z = (amu)$, das andere Mal $a_z = a_x$ und mit bez. $3\gamma_x^2$, $-\,6\gamma_x\,(\gamma mu)$ multiplicire.

Diesen Ausdruck P wollen wir betrachten: mit Hülfe von (2), wo ich an Stelle der symbolischen Buchstaben a, b die symbolischen Buchstaben b, c geschrieben denke, wird

$$P = a_x\, (amu)\, a_z = (abc)\, (\gamma bc)\, (amu)\, b_y\, c_y\, a_z\,;$$

---

*) Die Herausschaffung des quadratischen Factors $(\gamma mu)^2$ verdanke ich wesentlich einer Mittheilung des Herrn Clebsch.

setzt man symbolisch

$$\Delta(y^3) = \alpha_y^3 = (abc)^2\, a_y b_y c_y\,,$$

so wird

$$(amu)\,(\gamma bc)\,(abc)\,a_y b_y c_y = \tfrac{1}{3}\,(\gamma mu)\,\alpha_y^3.$$

Polarisire ich die beiden Seiten dieses Ausdrucks nach z, d. h. bilde ich die Summe ihrer nach den y_i genommenen Differentialquotienten, jeden multiplicirt in das entsprechende z_i, so spaltet sich die linke Seite in drei Theile, von denen aber zwei sich nur durch die verschiedene Bezeichnung ihrer symbolischen Buchstaben unterscheiden, und deshalb einander gleich sind, und setze ich weiter:

$$Q = (abc)\,(\gamma bc)\,(amu)\,b_y\,c_z\,a_y\,,$$

so erhalte ich

$$P + 2Q = \alpha_y^2\,\alpha_z\,(\gamma mu).$$

Die directe Betrachtung von P und Q giebt aber:

$$P - Q = (abc)\,(\gamma bc)\,(amu)\,b_y\,\{c_y\,a_z - c_z\,a_y\}$$

und, indem ich den Werth von y in die Klammer einführe und die Identität benutze:

$$P - Q = (abc)\,(\gamma bc)\,(amu)\,b_y\,\{(cau)\,\gamma_z + (ac\gamma)\,u_z\}\,.$$

Durch Vertauschung von a mit b im zweiten Term der rechten Seite, Anwendung der Identität, und Einführung des Werthes von y aus (3) erleidet derselbe folgende Umänderungen:

$$\begin{aligned}(abc)\,(\gamma bc)\,(amu)\,b_y\,(ac\gamma)u_z \\ &= \tfrac{1}{2}(abc)\,(\gamma bc)\,(ac\gamma)u_z\,\{(amu)b_y - (bmu)a_y\} \\ &= \tfrac{1}{2}(abc)\,(\gamma bc)\,(ac\gamma)u_z\,\{(abu)m_y + (amb)u_y)\} \\ &= \tfrac{1}{2}(abc)\,(\gamma bc)\,(ac\gamma)\,(bau)\,(\gamma mu)u_z\end{aligned}$$

und es wird nun:

$$P - Q = (abc)(\gamma bc)\,(amu)(cau)b_y\gamma_z + \tfrac{1}{2}(abc)\,(\gamma bc)(ac\gamma)(\gamma mu)(bau)u_z\,,$$

woraus sich nach der Bezeichnung in N°. 26 ergibt:

$$3P = (\gamma mu)\alpha_y^2\alpha_z + u_z(m\gamma u)S(u\gamma^2) + 2\gamma_z(abc)\,(bc\gamma)\,(amu)\,(cau)\,b_y;$$

leitet man hieraus die Werthe für

$$(amu)^2 a_x\,, \qquad a_x^2(amu)$$

ab, so gehen die beiden ersten Terme von (1) über in:

$$\gamma_x^2(\gamma mu)(P_2 - 2P_3) + 2\gamma_x(\gamma mu)^2[u_x S(u\gamma^2) - \Delta(y^2x)]$$

wo:

$$\begin{aligned}P_2 &= \alpha_y^2\,(amu)\,,\\ P_3 &= (abc)(bc\gamma)(amu)(cau)(b\gamma u).\end{aligned}$$

Es bleibt nur übrig aus

$$P_2 - 2P_3$$

den Factor (γmu) herauszuschaffen. Nun ist:

$$P_2 = \alpha_y^2(\alpha mu) = (abc)^2 \,.\, (b\gamma u) \,.\, (amu) \,.\, (c\gamma u).$$

Ist ferner M der identisch verschwindende Ausdruck

$$M = (abc)(b\gamma u)(amu)\left\{(abc)(c\gamma u) - (bc\gamma)(cau) - (ubc)(c\gamma u)\right\}$$
$$= (abc)(b\gamma u)(amu)(cbc)\,(a\gamma u) \equiv 0\,,$$

so dürfen wir setzen:

$$P_2 - 2P_3 \equiv M - P_3 + (abc)(b\gamma u)(amu)\,(ubc)(c\gamma a)$$
$$= (abc)(a\gamma c)(cbu)(bau)(\gamma mu) = -(\gamma mu)S(u^2\gamma)$$

und nach Vertauschung von a und b in P_3:

$$= (abc)(ubc)(c\gamma a)\left\{(b\gamma u)(amu) - (a\gamma u)(bmu)\right\}$$
$$= (abc)(ubc)(c\gamma u)(\gamma mu)(bau)\,,$$

also geht (1) über in:

$$(\gamma mu)^2\left\{2\gamma_x[u_x S(u\gamma^2) - \Delta(y^2x)] - \gamma_x^2 S(u^2\gamma) + 4f(x^3)\right\}.$$

Die Gleichung für die umhüllte Curve $J_1{}^6$ wird erhalten, wenn man den zweiten Factor mit 0 vergleicht, und die x_i darin durch die y_i, letztere aber durch die γ_i, u_i ausdrückt, d. h. wenn man das System der Gleichungen (1) . . (4) ersetzt durch das folgende:

$$2\gamma_x[u_x S(u\gamma^2) - \Delta(xy^2)] - \gamma_x^2 S(u^2\gamma) + 4f(x^3) = 0\,,$$
$$\mu x_i = (ab\gamma)\,a_y b_y\,(ab)_i\,,$$
$$u_y = 0\,, \qquad \gamma_y = 0\,,$$

dann liefert die Elimination der x_i und y_i als Gleichung für $J_1{}^6$:

$$0 = \begin{cases} \{(ab\gamma)(abu)(a\gamma u)(b\gamma u)S(u\gamma^2) \\ -(\alpha\gamma u)^2(ab\gamma)(ab\alpha)(a\gamma u)(b\gamma u)\}\,2(cd\gamma)^2(c\gamma u)(d\gamma u) \\ -S(u^2\gamma)(ab\gamma)^2(a\gamma u)(b\gamma u)(cd\gamma)^2(c\gamma u)(d\gamma u) \\ +4(abc)(ade)(agh)(\gamma bc)(\gamma de)(\gamma gh)(b\gamma u)(c\gamma u)(d\gamma u)\,.\,(e\gamma u)(g\gamma u)(h\gamma u). \end{cases}$$

Dies lehrt, dass die von den Geradenpaaren JJ_1 umhüllte Curve von der sechsten Klasse ist: $J_1{}^6$.

Die Gleichung der Curve nimmt eine viel bessere Gestalt an, wenn man die y nicht durch ihre aus (3) gegebenen Werthe ersetzt. Indem man zwei der symbolischen Factoren von a_x^3 durch (2) behandelt, erhält man:

$$a_x^3 = \tfrac{1}{3}\vartheta_y^2\,\alpha_y^2\,\alpha_x - \tfrac{2}{9}\alpha_y^3\,\vartheta_y\,\vartheta_x \quad \text{wo } \vartheta_x^2 = (ab\gamma)^2 a_x b_x.$$

Führt man die Zwischenform ein:

$$\tau_u = t_y^2 = (abu)\,(ab\gamma)\,a_y\,b_y$$

und setzt $\Delta(x^3) = \alpha_x^3$, so geht nun die Gleichung für $J_1{}^6$ über in:

$$\left\{\tau_u S(u\gamma^2) - \tfrac{1}{3}\alpha_y^2\tau_\alpha\right\}2\vartheta_y^2 - S(u^2,\gamma)\,\vartheta_y^2\vartheta_y'^2 = \tfrac{8}{9}\,\alpha_y^3\,\vartheta_y\,\tau_\vartheta$$

oder:

$$0 = \left\{\tau_u S(u\gamma^2) - \tfrac{1}{3}(\alpha\gamma u)^2\tau_\alpha\right\}2(\vartheta\gamma u)^2 - S(u^2\gamma)(\vartheta\gamma u^2)(\vartheta'\gamma u)^2$$
$$- \tfrac{8}{9}(\alpha\gamma u)^3(\vartheta\gamma u)\,\tau_\vartheta.$$

Bestimmung des Grades von J_1^6.

29. Da J^6 von der sechsten Classe ist, durch einen Punkt von γ aber nur 2 Tangenten von J^6, nämlich das Paar JJ_1 gehen, so ist γ eine vierfache Tangente; dies lehrt auch die in 28. abgeleitete Form der Gleichung für J_1^6, worin jeder Term mindestens 4 Determinanten mit den Reihen γ_i, u_i besitzt. Wir haben nun oben (Nr. 27.) gesehen, dass nur für die beiden Punkte ω, ω' das entsprechende Paar JJ_1 in die Gerade γ fällt, folglich hat J^6 mit γ keine anderen Berührungspunkte ω, ω'; in jedem dieser Punkte muss man sich also 2 Berührungspunkte von γ vereinigt denken. Nun sind ω, ω' entweder höhere Wendepunkte von J^6, oder Punkte, in denen sich 2 Zweige der Curve berühren; der charakteristische Unterschied beider Fälle besteht darin, dass im ersten eine durch ω oder ω' gelegte Gerade G, die nicht mit γ zusammenfällt, die J^6 in ω oder ω' in einem einfach zu rechnenden, im zweiten Falle in einem doppelt zu rechnenden Punkte schneidet. Es muss der letztere Fall eintreten, weil bei der Annahme des ersteren γ sich als höhere als vierfache Tangente ergeben würde. Die Punkte $\omega\omega'$ zählen für 8 Schnittpunkte von γ mit J^6; nun haben wir oben gesehen, dass es noch 6 Geraden S_0 gibt, in welche 6 Paare JJ_1 hineinfallen, dieselben können keine Doppeltangenten sein, weil eine Curve sechster Classe nicht eine vierfache (= 6 Doppeltangenten) und noch 6 Doppeltangenten besitzen kann; daher sind die Schnittpunkte dieser 6 Geraden S_0 mit γ die Punkte, in denen J_1^6 von den S_0 berührt wird; andere Punkte von J^6 kann es nicht auf γ geben, weil durch diese dann ein zusammenfallendes Paar JJ_1 gehen müsste, was aber, wie oben gezeigt worden, unmöglich ist. Also schneidet γ die J^6 in 14 Punkten, d. h. J^6 ist vom vierzehnten Grade.

Die Curve, welche umhüllt wird durch die Verbindungslinie J_0 eines auf E^2 gelegenen Poles P und den Scheitel des zugehörigen Geradenpaares JJ_1.

30. Die Geraden J_0, d. h. die Verbindungslinien der Punkte x auf E^2 mit den entsprechenden y auf γ (18.) umhüllen eine Curve, deren Gleichung sich leicht aus folgendem System ergibt:

$$a_x a_y a_i = \mu\gamma_i,$$
$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad \gamma_y = 0,$$

woraus man zunächst durch Elimination der x erhält

$$t_y^2 = (abu)(ab\gamma)a_y b_y = 0$$

und dann

$$(t\gamma u)^2 = (abu)(ab\gamma)(a\gamma u)(b\gamma u) = 0,$$

was eine Curve dritter Classe J_0^3 vorstellt, welche γ zur Doppeltan-

gente haben muss; das lehrt erstens die Gleichung direkt und ferner die Betrachtung, dass durch jeden Punkt von γ nur eine Tangente J_0 geht; die Punkte ω, ω' sind die Berührungspunkte der Doppeltangente, weil wir am Ende von Nr. 27. gesehen haben, dass dem Punkte ω, als Punkt auf E^2 betrachtet, der Punkt ω_1, als Punkt auf γ betrachtet, entspricht, und umgekehrt; daher ist $\overline{\omega\omega_1}$ die durch ω bestimmte Gerade J_0, und $\overline{\omega_1\omega}$ die durch ω_1 bestimmte Gerade; ω, ω_1 sind also die beiden Punkte auf γ, deren Gerade J_0 in die Doppeltangente γ fällt, d. h. die Berührungspunkte derselben. Da $J_0{}^3$ eine Doppeltangente hat, so muss sie nothwendiger Weise von der vierten Ordnung sein.

Anmerkung. Durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene gehen also drei Geraden J_0; ein Kegelschnitt, bezüglich dessen γ harmonische Polare von $\mathfrak{P}$ sein soll, enthält noch drei Willkürlichkeiten, da die Coefficienten dieses Kegelschnitts zwei linearen Bedingungen unterworfen sind; daher sind irgend 3 Geraden der Ebene stets Tangenten eines bestimmten Kegelschnitts, bezüglich dessen $\mathfrak{P}$ der Pol von γ ist; wählen wir hierzu je eine Gerade der 3 Geradenpaare JJ_1, welche zu den drei durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden J_0 gehören, etwa J; ist alsdann J' die zweite Tangente, welche sich von dem Schnittpunkt der Geraden JJ_1 an den Kegelschnitt ziehen lässt, so sind $JJ_0J'\gamma$ 4 harmonische Strahlen; aber $JJ_0J_1\gamma$ sind es ebenfalls, folglich ist $J' = J_1$ d. h. die Geradenpaare JJ_1, welche dreien durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene gehenden Geraden J_0 entsprechen, berühren einen Kegelschnitt, für welchen γ die Polargerade von $\mathfrak{P}$ ist.

31. Fassen wir die in den beiden letzten Nummern erhaltenen Resultate zusammen, so können wir sagen [St. § 15, III; pag. 41]:

Alle Paare von Geraden J und J_1, in welche die innere Polare J^2 zerfällt, wenn der Pol P in der Curve E^2 liegt, berühren eine Curve sechster Classe J^6 und 14ten Grades, welche die sechs Sehnen S_0 zu Tangenten, ihren Schnitt mit γ zu Berührungspunkten, und die Gerade γ zur vierfachen Tangente hat. Die Curve J^6 berührt jedoch die Gerade γ nicht in vier, sondern nur in zwei verschiedenen Punkten, aber in jedem doppelt, so dass sie sich in jedem derselben selbst berührt, und zwar sind diese zwei Punkte zugleich die gemeinschaftlichen Punkte der Curve E^2 und der Geraden γ. Wird eine dritte Gerade, J_0, durch den Pol P (mit den zugehörigen Geraden J und J_1) und durch den Schnittpunkt von J und J_1 gezogen, so ist ihr Ort eine Curve dritter Classe und vierten Grades, welche die Gerade γ zur Doppeltangente hat, und zwar sie in den eben

genannten zwei Punkten berührt. Daher ist das ganze System der verschiedenen Paare Gerade J und J_1 auch so beschaffen, dass jeder Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene im Allgemeinen der Pol von γ in Bezug auf einen Kegelschnitt ist, welcher 3 der genannten Paare berührt, und zwar diejenigen 3 Paare, welche den durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gehenden drei Geraden J_0 entsprechen.

Die gemeinsamen Tangenten von J^6 und C^3 [St. § 15, III; pag. 42].

32. Wenn J eine Gerade der inneren Polare JJ_1 eines auf E^2 gelegenen Poles ist, welche gleichzeitig C^3 berührt, so folgt aus 15. II., dass die zu J conjugirte Gerade, d. h. J_1, ebenfalls eine Tangente von C^3, d. h. eine gemeinsame Tangente von J^6 und C^3 ist. Also:

I. Die 36 gemeinschaftlichen Tangenten der Curve J^6 und der Basis C^3 bestehen aus 18 Paar zusammengehörigen Geraden J und J_1, denen auf E^2 18 Punkte P_1 entsprechen, als Pole der mit jenen Geradenpaaren zusammenfallenden inneren Polaren.

Die 18 Verbindungslinien der Punktepaare, in denen C^3 von den JJ_1 berührt wird, sind Sehnen $\mathfrak{S}$, deren Pole oder mittlere Punkte auf E^2 liegen; es sind dies die eben erwähnten Punkte P; diese 18 Sehnen $\mathfrak{S}$ haben mit den in 19. erwähnten Sehnen S_0 die Eigenschaft gemein, dass die in ihren Endpunkten gelegten Tangenten von C^3 sich auf γ schneiden. Andere Punkte auf E^2, durch welche Sehnen der eben beschriebenen Art gehen, kann es nicht geben; denn die Annahme der Existenz führt stets darauf, dass diese Punkte entweder unter die bereits gefundenen Punkte P_0 oder unter die Punkte P_1 zu rechnen sind.

II. Die sechs Punkte P_0 (19.) und die 18 P_1 sind also diejenigen ausgezeichneten Punkte auf E^2, durch welche Berührungssehnen gehen.

Endlich können wir sagen, in Anbetracht des Umstandes, dass die Lage der Geraden γ gegen C^3 eine ganz willkürliche ist:

III. Auf jeder beliebigen Geraden G in der Ebene schneiden sich 18 Paare von Tangenten einer C^3 der Art, dass die 18 Geraden, welche die Tangentenpaare mit G harmonisch trennen, die entsprechenden 18 Verbindungslinien der Berührungspunkte eines Paares in 18 Punkten schneiden, die auf einem Kegelschnitt liegen, welcher die zweite Polare von G in Bezug auf C^3 ist.

Die gemeinsamen Tangenten von J^6 und S_1^6.

33. Es ist oben gezeigt, dass γ eine vierfache Tangente von J^6 und eine dreifache von S_1^6 ist, also 12 gemeinsame Tangenten beider Curven repräsentirt; dass ferner die sechs Geraden S_0 gemeinschaftliche Tangenten beider Curven sind; die fehlenden 18 gemeinsamen Tangenten ordnen sich zu 9 Paaren JJ_1 zusammen. Denn wenn die Gerade J gleichzeitig eine Sehne S_1, d. h. eine Tangente von S_1^6 ist, also $J = S_1$, und a, c die Endpunkte, b den mittleren Punkt von S_1 auf C^3 bedeuten, und ferner $a_1\, b_1\, c_1$ die entsprechenden Schnittpunkte von J_1 mit C^3 sind, und P der zu JJ_1 gehörige Pol, so liegen bPb_1 auf einer Geraden und diese ist die Polargerade des Punktes P_1, in welchem sich JJ_1 schneiden; denn b als mittlerer Punkt von S_1 (21.) und P als entsprechender Punkt von P_1 in Bezug auf E^2 und γ (18.) gehören der Polargeraden von P_1 an, also auch b_1, folglich ist $P_1 b_1$, d. h. die Gerade J_1, eine Tangente von S_1^6 gemäss der früher angegebenen Construction. Also können wir sagen:

Von den 36 gemeinschaftlichen Tangenten der Curve J^6 und der obigen Curve S_1^6 fallen 12 auf die Gerade γ, 6 andere sind jene besonderen Sehnen S_0, und die noch übrigen 18 bestehen aus 9 Paar zusammengehöriger Geraden J und J_1,

und in Hinblick auf die Entstehung von E^2 als Umhüllte sämmtlicher Polargeraden der Pole, die auf γ liegen:

Es giebt 9 Punkte P auf E^2, für welche eine der drei durch sie gelegten Sehnen mit der Tangente in diesen Punkten zusammenfällt.

34. Wir haben im Vorhergehenden sechs Sehnen S_0 und 18 Sehnen $\mathfrak{S}$ kennen gelernt, deren Pole oder mittlere Punkte auf E^2 liegen, und für welche die in den Endpunkten gezogenen Tangenten sich auf γ schneiden. Suchen wir allgemein die Curve zu bestimmen, welche von den durch die Berührungspunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ irgend zweier auf γ sich schneidenden Tangenten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ von C^3 gelegten Sehnen $\mathfrak{S}$ umhüllt wird.

Bedeuten x, z die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$, y den Schnittpunkt ihrer Tangenten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ auf γ, also $\overline{xz}$ die Sehne $\mathfrak{S}$, deren Coordinaten mit u_i bezeichnet werden mögen, so ist:

$$a_x^3 = 0, \qquad b_z^3 = 0, \qquad u_x = 0, \qquad u_z = 0,$$
$$a_x^2\, a_y = 0, \qquad b_z^2\, b_y = 0, \qquad \gamma_y = 0.$$

Die Elimination von y aus den letzten drei Gleichungen liefert:

$$0 = (ab\gamma)\; a_x^2\, b_z^2 = \tfrac{1}{2}\, (a_x^2\, b_z^2 - a_z^2\, b_x^2)\, (ab\gamma)$$
$$0 = a_x\, b_z\, (a_x\, b_z - b_x\, a_z)\, (ab\gamma),$$

oder, da vermöge $u_x = 0$, $u_z = 0$:

$$\mu\,(a_x b_z - b_x a_z) \equiv (abu)\cdot$$
$$0 = a_x b_z\,(abu)\,(ab\gamma),$$

d. h. die Punkte x, z sind harmonische Pole des bereits früher eingeführten Kegelschnitts:

$$t_x^2 = (abu)\,(ab\gamma)\,a_x b_x = 0.$$

Dieser Kegelschnitt ist für jede Sehne u ein anderer; wir können also sagen:

Jede Sehne $u = \mathfrak{S}$ schneidet die Basis C^3 so, dass eines ihrer drei Schnittpunktenpaare harmonische Pole von $t_x^2 = 0$ werden.

Diese Eigenschaft nun reicht hin, um die Gleichung mit Hülfe des von Herrn Clebsch im 68ten Bande des Crelle'schen Journals pag. 162 gegebenen simultanen Formensystems zweier binären Formen bez. 2ten und 3ten Grades auf elegante Weise abzuleiten. Hierzu schalten wir folgende Betrachtung ein:

Es sei w eine binäre Form dritten, und $v = \alpha x + 2\beta xy + \gamma y^2$ eine solche des zweiten Grades; sie mögen symbolisch dargestellt sein durch:

$$w = (w_1 x + w_2 y)^3 = (w_1' x + w_2' y)^3$$
$$v = (v_1 x + v_2 y)^2 = (v_1' x + v_2' y)^2 = (v_1'' x + v_2'' y)^2$$

Durch Einführung der linearen Transformation:

$$\sqrt{2\alpha}\cdot\xi = \alpha x + (\beta - \sqrt{D})y,$$
$$\sqrt{2\alpha}\cdot\eta = \alpha x + (\beta + \sqrt{D})y,$$

deren Determinante

$$R = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

ist, wo

(1) $$D = \beta^2 - \alpha\gamma = \tfrac{1}{2}\,(vv')^2 = (v_1 v_2' - v_2 v_1')^2$$

erhält man

$$v = 2\,\xi\eta$$
$$w = a\xi^3 + 3b\xi^2\eta + 3c\xi\eta^2 + d\eta^3.$$

Diese beiden Formen stellen uns, mit 0 verglichen, ein Punktepaar $v = 0$ und drei Punkte, also auch drei Punktepaare $w = 0$ vor; die Bedingung, dass eines der letzteren das erstere harmonisch trenne, ergiebt sich daraus, dass in diesem Falle

$$a\xi^3 + 3b\xi^2\eta + 3c\xi\eta^2 + d\eta^3 = 0$$

für $\pm\frac{\xi}{\eta}$ bestehen muss; das liefert

$$a\xi + 3c\eta = 0$$
$$\underline{3b\xi + d\eta = 0}$$

(2) $$ad = 9bc.$$

Die letzte Coefficientengleichung giebt also die gesuchte Bedingung.

Herr Clebsch bezeichnet symbolisch:

$$(3) \qquad \begin{cases} K = (wv)^2\,(w'v')^2\,(wv'')\,(w'v'') \\ J = \frac{1}{2}\,(wv')^2\,(wv)\,(w'v) \end{cases}$$

wo
$$(wv) = w_1 v_2 - v_1 w_2 \text{ etc.}$$
zu setzen ist. Bildet man sich diese Invarianten nach der für dieselben in nicht-symbolischer Form gegebenen Definition für unsere transformirten Formen, und bezeichnet dieselben mit K', J', so erhält man:

$$K' = 8bc \quad , \quad J' = bc - ad,$$

woraus man nach Elimination der Grössen ad und bc mit Hülfe von $ad - 9bc = 0$ die Gleichung erhält:

$$-J' = K'.$$

Da aber nun R die Transformationsdeterminante ist, K aus 6 und J aus 4 symbolischen Determinantenfactoren besteht, so hat man:

$$K' = R^6 K \quad , \quad J' = R^4 J,$$

so dass man unter Benutzung von

$$R^2 D = 1$$

erhält:

$$(4) \qquad JD + K = 0$$

als Bedingung, dass irgend zwei der Punktepaare $v = 0$, $w = 0$ sich harmonisch trennen. Nun folgt aus der Theorie der symbolischen Darstellung algebraischer Formen die Gültigkeit folgender Betrachtung:

Ist $v_x^2 = 0$ ein Kegelschnitt und $w_x^3 = 0$ eine Curve dritter Ordnung, welche bezüglich durch das auf $u_x = 0$ gelegene Punktpaar $v = 0$ und den auf $u_x = 0$ gelegenen Punkttripel $w = 0$ gehen, so wird die Bedingung, der die Coefficienten von v_x^2 und w_x^3 zu genügen haben, aus

$$JD + K = 0$$

erhalten, wenn man in dieser, vermöge (1), (3) in symbolischer Form dargestellten Gleichung die zweireihigen Determinanten (wv), $(w'v')$, (wv'') etc. durch bezüglich die dreireihigen (wvu), $(w'v'u)$, $(wv''u)$ etc. ersetzt. Auf diese Weise geht (4) über in:

$$(5) \qquad \left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{4}\,(vv'u)^2\cdot(ww'u)^2\,(wv''u)\,(w'v''u) \\ &+ (wvu)^2\,(w'v'u)^2\,(wv''u)\,(w'v''u) \end{aligned}\right\} = 0,$$

eine Gleichung, die, wenn man die u_i als laufende Liniencoordinaten ansieht, eine Curve sechster Classe vorstellt, und den Satz enthält:

Die Gerade, welche eine gegebene Curve dritter Ordnung C^3 stets so schneidet, dass irgend zwei der Schnittpunkte harmonische Pole eines gegebenen Kegelschnitts C^2 sind, umhüllt eine Curve sechster Classe.

In unserm Falle nun ist der gegebene Kegelschnitt C^2 ersetzt durch

$$t_x^2 = t_x'^2 = t_x''^2 = (abu)\,(ab\gamma)\,a_x\,b_x = 0,$$

dessen Coefficienten selbst noch linear von der Geraden u abhängen, wogegen die Curve dritter Ordnung unsere gegebene Curve ist. Behalten wir daher für letztere die alte Bezeichnung durch $a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = 0$ bei, so geht (5) über in:

$$(6)\qquad \left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{4}\,(tt'u)^2\cdot(abu)^2\,(at''u)\,(bt''u)\\ &+(atu)^2\,(bt'u)^2\,(at''u)\,(bt''u)\end{aligned}\right\} = 0,$$

und diese Gleichung ist, da sie vom dritten Grade in den Coefficienten von t_x^2 ist und diese linear von den u_i abhängen, vom neunten in den u_i und stellt die Umhüllte der oben definirten Sehnen $\mathfrak{S}$ dar.

Wir haben also den Satz [St. § 15, IV; pag. 43]:

Alle Sehnen $\mathfrak{S}$, welche die Berührungspunkte je zweier, auf γ sich schneidenden Tangenten von C^3 verbinden, umhüllen eine Curve neunter Classe $\mathfrak{S}^9$.

35. Betrachtet man den Büschel der der Geraden γ zugeordneten Polarkegelschnitte mit den Grundpunkten q, r, s, t, so sind die sechs Seiten des hierdurch bestimmten vollständigen Vierecks die drei, dem Schnitt X', Y', Z' der Hesse'schen Determinante $\Delta = 0$ mit γ entsprechenden Polarkegelschnitte, welche ja in Geradenpaare zerfallen, deren Scheitel bezüglich die Punkte X, Y, Z, d. h. die Punkte sind, in denen $\Delta = 0$ und E^2 sich berühren (27.). Die Berührungspunkte der Tangenten, welche sich von einem der Punkte X', Y', Z' an C^3 legen lassen, liegen also zu je 3 auf zwei Geraden; jede dieser Geraden wird daher bei Umhüllung von $\mathfrak{S}^9$ dreimal erzeugt werden, weil dieselbe nicht ein, sondern drei Punktepaare aufweist, deren Tangenten sich auf γ schneiden. Diese sechs dreifachen Tangenten ordnen sich paarweise zusammen; die Schnittpunkte der drei Paare sind die Punkte X, Y, Z, in denen Δ und E^2 sich berühren, und von denen wir wissen, dass sie die den Punkten X', Y', Z' conjugirten Punkte von Δ sind, d. h. die Punkte, in welchen Δ von den Polargeraden von X', Y', Z' berührt wird.

Gemeinsame Tangenten von C^3 und $\mathfrak{S}^9$.

36. Um nun einen Einblick in die gemeinsamen Tangenten und etwaige Berührung der Basis C^3 und $\mathfrak{S}^9$ zu erhalten, schlagen wir

ein analoges Verfahren, wie in 24. ein, d. h. wir ersetzen in der Gleichung von $\mathfrak{S}^9$

$$JD + K = 0,$$

$$\text{wo } D = \tfrac{1}{2}(tt'u)^2 \quad , \quad J = \tfrac{1}{2}(abu)^2 (atu)(btu)$$

$$K = (atu)^2 (bt'u)^2 (at''u)(bt''u)$$

die u_i durch $f_i = \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$ und transformiren die erhaltenen Ausdrücke unter steter Berücksichtigung von

$$a_x^3 = f(x^3) = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung wird

$$t_x^2 = (abf)(ab\gamma)\, a_x b_x = \tfrac{1}{3}\, \Delta\gamma_x$$

$$t_x t_y = \tfrac{1}{2}\, \Delta_y \gamma_x - \tfrac{1}{6}\, \gamma_y \Delta,$$

wo

$$\Delta_y = \tfrac{1}{3}\, \Sigma \frac{\partial \Delta}{\partial x_i}\, y_i.$$

Ferner setzen wir symbolisch:

$$A^2 = (ab\Delta)^2\, a_x b_x \gamma_x^2$$

$$AB = (ab\Delta)(ab\gamma)\, a_x b_x \gamma_x \Delta$$

$$B^2 = (ab\gamma)^2\, a_x b_x \Delta^2.$$

Dann wird:

$$J = -\frac{1}{108}\, \Delta^3 \gamma_x$$

$$D = \tfrac{1}{8}\left(A - \frac{B}{3}\right)^2$$

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{4}\, t_x^2 t_x'^2 (\Delta t''f)^2 - \tfrac{1}{3}\, \Delta t_x^2 t_x' (t't''f)(\Delta t''f) + \tfrac{1}{9}\, \Delta^2 t_x t_x' (tt''f)(t't''f) \\ &= \tfrac{1}{36}\, \Delta^2 \gamma_x^2 (\Delta tf)^2 - \tfrac{1}{9}\, \Delta^2 \gamma_x t_x (tt'f)(\Delta t'f) + \tfrac{1}{9}\, \Delta^2 t_x t_x' (tt''f)(t't''f) \\ &= \tfrac{1}{36}\, \Delta^2 \gamma_x^2 (\Delta tf)^2 - \tfrac{1}{108}\left(A - \frac{B}{3}\right)^2 \Delta^3 \cdot \gamma_x. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} (\Delta tf)^2 \gamma_x &= (\Delta tb)(\Delta tc)\, b_x^2 c_x^2 \cdot \gamma_x \\ &= \left\{(bc\Delta)(bct)\, t_x \cdot \Delta - \tfrac{1}{2}(bc\Delta)^2 t_x^2 - \tfrac{1}{2}(bct)^2 \Delta^2\right\} b_x c_x \gamma_x \\ &= \left(\frac{A^2}{2} - \frac{AB}{6} - \frac{A^2}{6}\right)\Delta = \left(\frac{A^2}{1} - \frac{AB}{2}\right)\frac{\Delta}{3}. \end{aligned}$$

Setzt man diese transformirten Werthe von D, J, K in

$$JD + K = 0$$

ein, so erhält man

$$JD + K = -\frac{\Delta^3 \gamma_x}{8 \cdot 108}(A - B)^2 = 0;$$

$(A - B)^2$ ist aber bis auf einen numerischen Factor weiter nichts, als das Quadrat der mittelst $f = 0$ umgestalteten Functionaldeterminante φ von

$$f(x^3),\ \Delta(x^3),\ \gamma_x,$$

d. h. es ist

$$\varphi^2 = (\gamma\Delta f)^2 = -\tfrac{1}{2}(A-B)^2.$$

Diese Curve $\varphi(x^4) = 0$ schneidet, wie Herr Hesse angegeben, und wie wir auch direct zeigen wollen, die Curve C^3 in den Berührungspunkten $\mathfrak{a}_0$ der 12 von a_γ, d. h. dem Schnitt von γ und C^3 möglichen Tangenten $\mathfrak{A}_0$, deren Berührungspunkte nicht auf γ liegen. Dieser Nachweis lässt sich so führen:

Das Product der drei Polarkegelschnitte des Schnittes von γ mit C^3 ist das Eliminationsresultat aus den Gleichungen:

$$a_y^3 = 0 \quad , \quad \gamma_y = 0 \quad , \quad a_x^2 a_y = 0,$$

und ist demgemäss dargestellt durch:

$$(a\gamma f)^3 = (a\gamma b)\,(a\gamma c)\,(a\gamma d)\,b_x^2\,c_x^2\,d_x^2,$$

indem man auf $(a\gamma c)\,(a\gamma d)\,c_x\,d_x$ den Productsatz anwendet und

$$f(x^3) = 0$$

berücksichtigt, erhält man:

$$(a\gamma f)^3 = (a\gamma b)\,b_x^2\,c_x\,d_x \begin{Bmatrix} (cd\gamma)\,(cda)\,a_x\cdot\gamma_x \\ -\tfrac{1}{2}(cd\gamma)^2\cdot a_x^2 - \tfrac{1}{2}(cda)^2\cdot\gamma_x^2 \end{Bmatrix}$$

Vertauscht man im ersten Term dieses Ausdrucks successive a mit c, a mit d, addirt die neu entstandenen Terme zu dem ursprünglichen und dividirt durch 3, so nimmt der erste Term die Gestalt an:

$$\tfrac{1}{3}\left\{(a\gamma b)\,(cd\gamma) - (c\gamma b)\,(ad\gamma) - (d\gamma b)\,(ca\gamma)\right\}\,(cda)\,a_x c_x d_x b_x^2 \gamma_x$$

verschwindet also, da nach der zweiten Form der Identität die $\{\ \}$ übergeht in

$$(\gamma\gamma b)\,(cda) \equiv 0.$$

Der zweite Term

$$-\tfrac{1}{2}(a\gamma b)\,(cd\gamma)^2\,a_x^2\,b_x^2\,c_x\,d_x$$

verschwindet ebenfalls, weil er in Folge von $b_x^2\,b_i = a_x^2\,a_i = f_i$ übergeht in

$$-\tfrac{1}{2}(f\gamma f)\,(cd\gamma)^2\,a_x^2\,b_x^2\,c_x\,d_x = 0.$$

Es wird also:

$$(a\gamma f)^3 = \tfrac{1}{2}\gamma_x^2\cdot(acd)^2\,(ab\gamma)\cdot b_x^2\,c_x\,d_x$$

und da

$$\Delta = (acd)^2\,a_x\,c_x\,d_x$$

also

$$\Delta_i = (acd)^2\,c_x\,d_x\,a_i,$$

so wird:

$$(a\gamma f)^3 = \tfrac{1}{2}\gamma_x^2\,(\Delta f\gamma).$$

$(\Delta f\gamma) = 0$, d. h. die $= 0$ gesetzte Functionaldeterminante von f, Δ, γ_x geht durch die 12 Punkte, in denen die 12 Tangenten, welche durch

die drei u_γ gehen und ihre Berührungspunkte nicht daselbst haben, berühren. Die Berührung der drei Polarkegelschnitte der u_γ mit C^3 in den Punkten a_γ selbst, wird durch den quadratischen Factor γ_x^2 in $(a\gamma f)^3$ angezeigt. Nun ist

$$\varphi^2 = (\Delta f \gamma)^2 = (a \Delta \gamma)\,(b \Delta \gamma)\; a_x^2 b_x^2,$$

was unter Anwendung des Productsatzes übergeht in:

$$-\tfrac{1}{2}(ab\Delta)^2 \cdot a_x b_x \gamma_x^2 - \tfrac{1}{2}(ab\gamma)^2\, a_x b_x \cdot \Delta^2 + (ab\Delta)\,(ab\gamma)\, a_x\, b_x\, \gamma_x\, \Delta$$
$$= -\tfrac{1}{2} A^2 - \tfrac{1}{2} B^2 + AB = -\tfrac{1}{2}(A-B)^2.$$

Also ist die Behauptung erwiesen:

$$\varphi^2 = (\gamma\Delta f)^2 = -\tfrac{1}{2}(A-B)^2.$$

Somit ist der Ausdruck $JD + K$ vermöge $f = 0$ bis auf einen numerischen Factor übergeführt in

$$\Delta^3 \gamma_x\; \varphi^2,$$

und diese Transformation lehrt, dass, weil Δ in der dritten Potenz auftritt, C^3 und S^9 sich in den Wendepunkten von C^3 berühren; dass ferner wegen des quadratischen Factors φ^2, die beiden Curven sich in jenen eben definirten Punkten a_0 berühren, und endlich wegen des Factors γ_x, dass beiden Curven die Tangenten A_γ in den Punkten a_γ gemeinsam sind. — An sich sagt der Factor φ^2 nur aus, dass die $\mathfrak{A}_0$ unter den gemeinschaftlichen Tangenten von C^3 und $\mathfrak{S}^9$ doppelt zählen; es wäre also denkbar, dass die $\mathfrak{A}_0$ Doppeltangenten von $\mathfrak{S}^9$ sind, deren Berührungspunkte nicht auf C^3 liegen; dann aber hätte $\mathfrak{S}^9$ 6 dreifache und 12 Doppeltangenten, was zusammen 30 Doppeltangenten repräsentirt, und das Maximum der möglichen Doppeltangenten um 2 überschreitet. Daher haben wir das Resultat [St. § 15, IV; pag. 44]:

Die Curve $\mathfrak{S}^9$ berührt die Basis C^3 in ihren 9 Wendepunkten w, sowie in den 12 Wendepunkten a_0. — Die 54 gemeinschaftlichen Tangenten beider Curven bestehen: 1) aus den 9 Wendetangenten $\mathfrak{W}$ der C^3, jede dreifach gezählt; 2) aus den 12 Tangenten $\mathfrak{A}_0$, jede doppelt gezählt, und 3) aus den drei Tangenten A_γ der C^3 in ihrem Durchschnitt mit γ, was zusammen 54 ausmacht.

Die gemeinsamen Tangenten von S_1^6 und $\mathfrak{S}^9$.

37. Die Curven S_1^6 und $\mathfrak{S}^9$ berühren beide die Basis C^3 in den Wendepunkten, daher zählen die neun Wendetangenten für 18 gemeinsame Tangenten jener Curven; ferner sind die drei A_γ Doppeltangenten von S_1^6 und einfache Tangenten von $\mathfrak{S}^9$, also gleich 6 gemeinsamen; endlich sahen wir gleich zu

Anfang (19.), dass die in den Endpunkten der Sehnen S_0 gezogenen Tangenten sich auf γ schneiden, oder, was dasselbe ist, Tangenten von $\mathfrak{S}^9$ sind, und die Berührungssehne S_0 Tangente von $S_1{}^6$ ist, also sind die 6 S_0 gemeinsame Tangenten von S^6 und $\mathfrak{S}^9$. Daher kennen wir im Ganzen 30 gemeinsame Tangenten; die übrigen 24 sind die von Steiner erwähnten Sehnen $\mathfrak{S}_0$ [St. § 15, II, 3; pag. 39 und § 15, IV; pag. 44.], von denen unten (40.) die Rede sein wird, von denen wir jedoch schon das aussagen können, dass dieselben C^3 so schneiden, dass eines der drei durch den Durchschnitt bestimmten Tangentenpaare von C^3 seinen Schnittpunkt auf γ hat.

38. Zieht man von einem auf γ gelegenen Punkte q die sechs Tangenten, so bestimmen die 15 Verbindungslinien der sechs Berührungspunkte p 15 Tangenten von $\mathfrak{S}^9$; man kann also auf diese Weise für jeden Punkt von C^3 fünf Tangenten von $\mathfrak{S}^9$ construiren, indem man die Tangente in diesem Punkte construirt, ihren Schnittpunkt mit γ sucht, und die Berührungspunkte der fünf andern durch den Schnittpunkt gehenden Tangenten mit dem auf C^3 angenommenen Punkte verbindet; ist q der Schnittpunkt einer Wendetangente mit γ, so fallen von den sechs Punkten p zwei zusammen, in den Wendepunkt $\mathfrak{w}$; die vier übrigen seien mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet; daher fallen auch von den fünf Tangenten, welche die obige Construction für die Punkte $\mathfrak{v}$ liefert, jedesmal zwei zusammen in die Gerade $\overline{\mathfrak{w}\mathfrak{v}}$, d. h. die $\mathfrak{v}$ sind Punkte von $\mathfrak{S}^9$ und $\overline{\mathfrak{w}\mathfrak{v}}$ ist ihre Tangente; da es neun Punkte $\mathfrak{w}$ giebt, und sich jedem derselben vier Punkte $\mathfrak{v}$ zuordnen, so erhalten wir durch diese Betrachtung im Ganzen 36 Punkte von $\mathfrak{S}^9$. Also erhalten wir das Steiner'sche Resultat:

Wird jede Tangente der C^3, welche sich mit einer ihrer neun Wendetangenten $\mathfrak{W}$ auf γ schneidet, durch $\mathfrak{V}$, und ihr Berührungspunkt durch $\mathfrak{v}$ bezeichnet, so giebt es im Ganzen 36 Punkte $\mathfrak{v}$, und somit auch 36 Sehnen $\overline{\mathfrak{w}\mathfrak{v}} = \mathfrak{S}$, welche die besondere Eigenschaft haben, dass sie die Curve $\mathfrak{S}^9$ gerade in den Punkten $\mathfrak{v}$ berühren.

Von der Ortscurve $\mathfrak{M}^{12}$.

39. Ist $\mathfrak{S}$ eine Tangente von $\mathfrak{S}^9$, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ die beiden auf C^3 gelegenen Punkte von $\mathfrak{S}$, deren Tangenten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ sich auf γ schneiden, so giebt es auf jeder $\mathfrak{S}$ einen Punkt $\mathfrak{x}$, welcher mit ihrem auf γ gelegenen Schnittpunkte das Punktepaar $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ harmonisch trennt. Daher sind $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ conjugirte Punkte in Bezug auf $\mathfrak{x}$ und γ, ebenso wie $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ conjugirte Gerade sind in Bezug auf dieselben Stücke; folglich ist $\mathfrak{x}$ ein Punkt, dessen innere Polare die C^3 berührt (15, III); umgekehrt

kommt auch jedem Pol, dessen innere Polare die Basis C^3 berührt, die Eigenschaft des Punktes $\mathfrak{x}$ zu, also ergiebt sich das Resultat [St. § 15, IV; pag. 45]:

Der Ort, den der Punkt $\mathfrak{x}$ beschreibt, wenn die Sehne $\mathfrak{S}$ die Curve $\mathfrak{S}^9$ umhüllt, ist identisch mit dem Orte des Pols, dessen innere Polare J^2 die Basis C^3 berühren soll; dabei berühren sich die Curven J^2 und C^3 zugleich in zwei Punkten, und die zugehörigen beiden Berührungstangenten schneiden sich auf γ.

Mit Hülfe dieser Eigenschaft von $\mathfrak{x}$ lässt sich der Ort bestimmen, den $\mathfrak{x}$ durchläuft, wenn $\mathfrak{S}$ die Curve $\mathfrak{S}^9$ umhüllt. Wir thun dies, indem wir die Schnittpunkte des fraglichen Orts mit dem oft erwähnten Kegelschnitt E^2 bestimmen. Für diese Punkte zerfällt die innere Polare in Geradenpaare JJ_1, welche die Curve J^6 umhüllen; die gemeinsamen Tangenten von J^6 und C^3, welche, wie wir gesehen haben (32), aus 18 Geradepaaren JJ_1 bestehen, liefern 18 auf E^2 gelegene Pole P_1, deren innere Polaren die C^3 berühren; ausser diesen Punkten kann nur noch den sechs Punkten P_0 (19.), deren innere Polaren ja in die doppelt zu rechnende Gerade S_0 übergehen, die Eigenschaft des Punktes $\mathfrak{x}$ zukommen, dass von den drei conjugirten Punktepaaren, welche die innere Polare aus C^3 herausschneidet, zwei in eines zusammenfallen, und so sehen wir, dass der gesuchte Ort den Kegelschnitt E^2 in 24 Punkten schneidet, also von der zwölften Ordnung $= \mathfrak{M}^{12}$ ist. Die Curve $\mathfrak{M}^{12}$ kann ausserhalb der Geraden γ keinen Doppelpunkt $\mathfrak{x}$ haben; denn diesem Punkte entsprächen zwei Sehnen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ und ihre vier Endpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}_1'$ müssten die doppelt zu rechnenden Schnittpunkte von C^3 mit der innern Polare von $\mathfrak{x}$ sein, d. h. ein Kegelschnitt und eine Curve dritter Ordnung hätten acht Punkte gemein.

Da jede Tangente von S_1^6 mit einer ganz bestimmten andern die innere Polare eines auf C^3 befindlichen Pols zusammensetzt (19.), so werden die gemeinsamen Tangenten von C^3 und S_1^6 im Allgemeinen (d. h. wenn der Pol nicht nach γ fällt), ebenso viel auf C^3 gelegene Punkte von $\mathfrak{M}^{12}$ bestimmen, deren innere Polaren die C^3 berühren; hat ausserdem die gemeinsame Tangente von S_1^6 und C^3 mit den beiden Curven denselben Berührungspunkt, d. h. haben C^3 und S_1^6 dort zwei aufeinander folgende Tangenten gemein, so werden ihre Pole auch zwei aufeinander folgende Punkte von $\mathfrak{M}^{12}$ auf C^3 bestimmen, d. h. C^3 und $\mathfrak{M}^{12}$ werden sich in dem dieser gemeinsamen Tangente entsprechenden Pole berühren. Nun wissen wir aus 24., dass C^3 und S_1^6 sich in den Wendepunkten berühren, und aus 19., dass der Pol, dessen innere Polare zum einen Theil aus der Wendetangente besteht, der Wendepunkt selbst ist; also sind die Wendepunkte solche Punkte

von $\mathfrak{M}^{12}$, in denen C^3 und $\mathfrak{M}^{12}$ sich berühren. — C^3 und S_1^6 berühren sich ferner in den drei Punkten a_γ, die auf γ liegen; aber in diesen berühren $\mathfrak{M}^{12}$ und C^3 einander nicht, sondern die a_γ sind vierfache Punkte von $\mathfrak{M}^{12}$; denn ist A_γ die in a_γ berührende Tangente, und $\mathfrak{A}_0$ eine der vier übrigen durch a_γ gelegten Tangenten, mit dem Berührungspunkte a_0, so ist $\mathfrak{A}_0$ eine Sehne $\mathfrak{S}$, deren Endpunkte a_0, a_γ sind; da nun a_γ auf γ liegt, so muss der zu construirende Punkt $\mathfrak{x}$ ebenfalls auf γ nach a_γ fallen, und da es vier Tangenten $\mathfrak{A}_0$ giebt: viermal, also ist jeder Punkt a_γ ein vierfacher Punkt. Da die sechs Punkte P_0 auch Punkte von C^3 sind, so sind dieselben auch gemeinsame Schnittpunkte von C^3 und $\mathfrak{M}^{12}$; wir haben also

$$2 \cdot 9 + 4 \cdot 3 + 6 = 36$$

gemeinsame Schnittpunkte von $\mathfrak{M}^{12}$ und C^3, was gerade die volle Zahl der Durchschnitte ausmacht.

Da $\mathfrak{M}^{12}$ ausserhalb der Geraden γ keine Doppel- oder vielfache Punkte haben kann, und wir auf der Geraden γ selbst drei vierfache Punkte von $\mathfrak{M}^{12}$ nachgewiesen haben, also die sämmtlichen Schnittpunkte mit $\mathfrak{M}^{12}$, so reducirt sich die Classe von $\mathfrak{M}^{12}$ um $3 \cdot 3 \cdot 4$ Einheiten und $\mathfrak{M}^{12}$ ist eine Curve der 96^ten^ Classe. Wir können also mit Steiner sagen [§ 15, IV; pag. 44]:

Der Ort der Pole, deren innere Polaren die C^3 berühren, ist eine Curve 12^ten^ Grades $\mathfrak{M}^{12}$ und 96^ter^ Classe, welche die Basis C^3 in ihren neun Wendepunkten $\mathfrak{w}$ berührt, in den sechs Punkten P_0 schneidet, und ihre drei Schnittpunkte a_γ mit γ zu vierfachen Punkten hat, was zusammen die volle Zahl $= 36$ gemeinschaftliche Punkte beider Curven ausmacht.

Ferner gemäss der Herleitung des Grades von $\mathfrak{M}^{12}$:

Die Curve $\mathfrak{M}^{12}$ schneidet die Curve E^2 in den nämlichen sechs Punkten P_0 und nebstdem in den 18 Punkten P_1.

40. Wir haben bei Betrachtung der gemeinsamen Tangenten von $\mathfrak{S}^9$ und S^6 (37.) eingesehen, dass es 24 Sehnen $\mathfrak{S}_0$ giebt, welche C^3 so schneiden, dass zwei der drei Tangenten des Durchschnitts sich auf γ schneiden. Aus der eben gemachten Herleitung der 36 Schnittpunkte von C^3 und $\mathfrak{M}^{12}$ folgt, dass das Tangentenpaar, dessen Schnittpunkt auf γ liegt, nicht conjugirt sein kann in Bezug auf γ und den Punkt, in welchem die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte des Tangentenpaares die C^3 noch schneidet, d. h. dass die Berührungspunkte nicht die beiden Endpunkte der Sehne $\mathfrak{S}_0$ sein können, denn wäre dies der Fall, so wäre der mittlere Punkt ein Punkt von $\mathfrak{M}^{12}$, was nicht möglich ist. Das Tangentenpaar ist also der Art, dass eine Tangente in dem einen Endpunkte der Sehne, die andere im mittleren Punkte der Sehne $\mathfrak{S}_0$ berührt. Nun haben wir

oben (25.) eingesehen, dass in diesem Falle die Sehne $\mathfrak{S}_0$ und die Curve S_1^6 sich in dem andern Endpunkte berühren, dass es also 24 Sehnen $\mathfrak{S}_0$ giebt, welche S^6 in ihrem einen Endpunkte a_1 berühren, und bei denen die Tangenten im zweiten Endpunkte a und dem zugehörigen Pol oder mittleren Punkte c sich auf γ schneiden [St. § 15, II, 3].

Durchschnitt von C^3 und S_1^6.

41. Wir haben in 24. gesehen, dass C^3 und S^6 sich in den Punkten a_γ und in den Wendepunkten w berühren, und in 19., dass für die sechs Punkte P_0 zwei der sechs durch jeden Punkt gehenden Tangenten von S_1^6 zusammenfallen, also dass die P_0 Punkte von S_1^6 sind; folglich bestehen die 54 Schnittpunkte von C^3 und $S_1^6 = G^{18}$ aus den drei doppelt zu rechnenden Punkten a_γ, den neun doppelt zu rechnenden w, den sechs P_0 und den 24 Punkten a_1 (40.) [St. § 15, II, 3; pag. 39].

Schlussbemerkung. In den vorstehenden Nummern 17. bis 41. ist im Wesentlichen die ganze Reihe der Resultate erwiesen, die Steiner im § 15 seiner Abhandlung giebt, und welche einen so wichtigen Beitrag zur Theorie der Curven dritter Ordnung liefert, mit Ausnahme des auf pag. 44 der c. Abhandlung befindlichen Satzes, welcher den Berührungspunkt einer Sehne $\mathfrak{S}$ mit der Curve $\mathfrak{S}^9$ vermittelst der Krümmungs-Mittelpunkte der auf C^3 befindlichen Endpunkte von $\mathfrak{S}$ finden lehrt.

Bonn, im December 1868.

Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe.

Von v. Drach in Marburg.

Die aus den jedesmaligen Constanten der Gleichungen

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$
$$v_0 y_0 + v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0,$$

(welche, mag man die rechtwinkligen Verhältnisscoordinaten der Punkte x und y, oder die der Ebenen u und v variabel annehmen, eine Gerade im Raume darstellen) gebildeten Ausdrücke:

$$u_0 v_1 - u_1 v_0 \;,\; u_1 v_2 - u_2 v_1 \;,\; u_2 v_0 - u_0 v_2,$$
$$u_0 v_3 - u_3 v_0 \;,\; u_1 v_3 - u_3 v_1 \;,\; u_2 v_3 - u_3 v_2$$

respective

$$x_0 y_1 - x_1 y_0 \;,\; x_1 y_2 - x_2 y_1 \;,\; x_2 y_0 - x_0 y_2,$$
$$x_0 y_3 - x_3 y_0 \;,\; x_1 y_3 - x_3 y_1 \;,\; x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

die man abkürzend bezeichnet hat mit

$$q_{ik} \equiv u_i v_k - u_k v_i \text{, wobei also } q_{ik} = - q_{ki}$$

und

$$p_{ik} \equiv x_i y_k - x_k y_i \text{, wobei auch } p_{ik} = - p_{ki},$$

sind bekanntlich die von Plücker zur Bestimmung der Geraden als Raumelement eingeführten homogenen Coordinaten derselben. Es bestehen zwischen ihnen die Identitäten

$$q_{01} q_{23} + q_{20} q_{13} + q_{03} q_{12} \equiv 0,$$
$$p_{01} p_{23} + p_{20} p_{13} + p_{03} p_{12} \equiv 0.$$

Zugleich lassen die Verhältnisse der p und q eine geometrische Deutung zu; man hat, wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die Gerade mit den Coordinatenachsen macht:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = q_{12} : q_{20} : q_{01} = p_{03} : p_{13} : p_{23}$$

und

$$n \cos \lambda : n \cos \mu : n \cos \nu = q_{03} : q_{13} : q_{23} = p_{12} : p_{20} : p_{01},$$

wobei λ, μ, ν die Winkel bedeuten, welche eine durch die Gerade und den Coordinatenanfang gelegte Ebene mit den Coordinatenebenen oder eine auf ihr errichtete Senkrechte s mit den Achsen macht, während n die Länge der vom Coordinatenursprung auf die Gerade gefällten Normale ist. Zugleich sind dann auch die entsprechenden

Glieder beider Reihen untereinander proportional und wird ihre Zusammengehörigkeit, was die p und q anlangt, bestimmt durch die Gleichungen

$$f \cdot p_{ik} = \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} \equiv q_{i'k'}$$

und

$$\varphi \cdot q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} \equiv p_{i'k'},$$

worin f und φ Proportionalitätsfactoren, P und Q aber die linken Seiten der obigen Identitäten bezeichnen. Es können daher in jeder homogenen Gleichung zwischen p dieselben mit Berücksichtigung dieser Beziehungen durch die q ersetzt werden und umgekehrt.

Jede sechs Grössen, welche den obigen Identitäten genügen, dürfen zu homogenen Coordinaten einer Geraden gemacht werden, die durch sie vollkommen bestimmt ist; sind dieselben von der Beschaffenheit, dass

$$q_{12}^2 + q_{20}^2 + q_{01}^2 = 1$$

ist, so stellen sie für diese Gerade wirklich cos α, ... dar, und sollen dann ihre homogenen rechtwinkligen Coordinaten heissen. Es können solche aus den allgemeinen homogenen Coordinaten immer durch Division mit $\sqrt{q_{12}^2 + q_{20}^2 + q_{01}^2}$ hergestellt werden.

Von den allgemeinen Coordinaten q werden $q_{12} = q_{20} = q_{01} = 0$ für eine unendlich entfernte Gerade, während ihre übrigen drei Coordinaten in cos λ, cos μ, cos ν übergehen, wodurch dann die Ebene bestimmt ist, deren unendlich entfernten Theil die betreffende Gerade bildet; ist andrerseits $q_{03} = q_{13} = q_{23} = 0$, so geht die zugehörige Gerade durch den Coordinatenanfang, und ist dann durch die drei übrigen Coordinaten, welche ihre Richtungscosinus ausdrücken, gegeben.

Diejenigen Geraden, deren Coordinaten einer Gleichung n^{ten} Grades zwischen veränderlichen p oder q genügen, bilden nach Plücker einen Complex n^{ten} Grades; diejenigen, welche zwei Complexen gemein sind, gehören zu einer Congruenz, und endlich die drei Complexen gemeinsamen erzeugen eine Regelfläche.

Von den vielen in der analytischen Geometrie vorkommenden Ausdrücken, in welchen die obigen Coordinaten der Geraden schon vorkommen oder durch Transformation sofort eingeführt werden können, und die also Complexe darstellen, ist einer der nächstliegenden die Bedingungsgleichung, unter welcher zwei Gerade, dargestellt durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} u_0x + u_1y + u_2z + u_3p = 0 \\ v_0x + v_1y + v_2z + v_3p = 0 \end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{l} w_0 x + w_1 y + w_2 z + w_3 p = 0 \\ r_0 x + r_1 y + r_2 z + r_3 p = 0 \end{array}\right\}$$

sich schneiden, nämlich

$$\Sigma \pm u_0\, v_1\, w_2\, r_3 = 0.$$

Die Minoren zweiter Ordnung, in welche diese Determinante zerlegt werden kann, sind die Coordinaten jener beiden Geraden und es kann daher die vorige Bedingungsgleichung geschrieben werden:

$$q'_{03}\, q_{12} + q'_{13}\, q_{20} + q'_{23}\, q_{01} + q'_{12}\, q_{03} + q'_{20}\, q_{13} + q'_{01}\, q_{23} = 0,$$

wenn die Grössen q die obige Bedeutung haben und analog

$$q'_{ik} = w_i\, r_k - w_k\, r_i$$

gesetzt ist. Werden in dieser letzten Gleichung die Coordinaten q der einen Geraden variabel angenommen, so stellt sie einen Complex ersten Grades dar und zwar den sogenannten speciellen linearen Complex, der also aus allen Geraden besteht, welche eine gegebene feste Gerade, die Axe des Complexes schneiden. Sind die als constant angenommenen Grössen q' die homogenen rechtwinkligen Coordinaten der Axe, so soll die Gleichung

$$\begin{aligned} n_1 \left\{\cos\lambda_1 \cdot q_{12} + \cos\mu_1 \cdot q_{20} + \cos\nu_1 \cdot q_{01}\right\} \\ + \cos\alpha_1 \cdot q_{03} + \cos\beta_1 \cdot q_{13} + \cos\gamma_1 \cdot q_{23} = 0 \end{aligned}$$

die Gleichung des speciellen Complexes ersten Grades in der Normalform heissen und es kann daher die Gleichung desselben Complexes in der allgemeinen Form immer auf diese Normalform reducirt werden durch Multiplication mit

$$\frac{1}{\sqrt{q'^2_{12} + q'^2_{20} + q'^2_{01}}}\,.$$

Bleiben wir nun zunächst bei der Gleichung des speciellen Complexes erster Ordnung in der Normalform stehen, so wird die linke Seite derselben im Allgemeinen von Null verschieden sein, wenn darin die homogenen rechtwinkligen Coordinaten einer Geraden eingesetzt werden, und es liegt die Frage nahe, ob nicht für den Werth, welchen sie annimmt, eine geometrische Bedeutung gewonnen werden kann in ähnlicher Weise, wie das Substitutionsresultat der Coordinaten eines Punktes in die linke Seite einer in der Normalform gegebenen Gleichung einer Ebene die Entfernung des Punktes von der Ebene ausdrückt. Es ergiebt sich eine solche ganz einfach, wenn man den Grösen q die ihnen als rechtwinkligen homogenen Coordinaten zukommenden Werthe giebt, wodurch die linke Seite der Complexgleichung übergeht in

$$\begin{aligned} n_1 \left\{\cos\alpha\cos\lambda_1 + \cos\beta\cos\mu_1 + \cos\gamma\cos\nu_1\right\} \\ + n \left\{\cos\alpha_1\cos\lambda + \cos\beta_1\cos\mu + \cos\gamma_1\cos\nu\right\}. \end{aligned}$$

Die Coefficienten der n stellen dann die Cosinus der Winkel dar, welche jede der gegebenen Geraden g und g_1 mit einer auf der durch die anderen und den Coordinatenanfang gelegten Ebene errichteten Senkrechten s_1 resp. s macht, sodass also für jenes Substitutionsresultat geschrieben werden kann

$$n_1 \cos(g, s_1) \pm n \cos(g_1, s),$$

wo, wie auch im Folgenden, das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem beide Gerade auf verschiedenen oder auf derselben Seite des Coordinatenanfangs liegen. Man erhält jedoch noch eine andere vom Coordinatensystem unabhängige Interpretation, aus der Lösung der Aufgabe die kürzeste Entfernung N zweier Geraden g_0 und g_1 durch ihre rechtwinkligen homogenen Coordinaten auszudrücken. Wenn die Gleichungen der beiden Geraden in der Form

$$\frac{x-\xi}{\cos\alpha} = \frac{y-\eta}{\cos\beta} = \frac{z-\zeta}{\cos\gamma}$$

vorausgesetzt werden, so ist

$$\begin{aligned} N = \{&(\xi_0 \pm \xi_1)(\cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\beta_1 \cos\gamma_0) \\ &+ (\eta_0 \pm \eta_1)(\cos\gamma_0 \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1 \cos\alpha_0) \\ &+ (\zeta_0 \pm \zeta_1)(\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\alpha_1 \cos\beta_0)\} : \sin\Theta, \end{aligned}$$

wo Θ den Neigungswinkel beider Geraden bedeutet. Führt man nun für die Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 und ξ_1, η_1, ζ_1 der beiden auf jenen Geraden beliebig zu wählenden Punkte die der Fusspunkte der vom Coordinatenanfang auf sie gefällten Perpendikel ein, setzt also

$$\xi = n\cos\varrho, \; \eta = n\cos\sigma, \; \zeta = n\cos\tau,$$

wo ϱ, σ, τ die Winkel sind, welche diese Perpendikel mit den Axen machen, so geht der vorige Ausdruck für N über in

$$\begin{aligned} [&n_1 \{\alpha_0(\sigma_1\gamma_1 - \tau_1\beta_1) + \beta_0(\tau_1\alpha_1 - \varrho_1\gamma_1) + \gamma_0(\varrho_1\beta_1 - \sigma_1\alpha_1)\} \\ &\pm n_0 \{\alpha_1(\sigma_0\gamma_0 - \tau_0\beta_0) + \beta_1(\tau_0\alpha_0 - \varrho_0\gamma_0) + \gamma_1(\varrho_0\beta_0 - \sigma_0\alpha_0)\}] : \sin\Theta \end{aligned}$$

mit Weglassung der cos-Zeichen. Da nun die Senkrechten n in den durch die Geraden und den Anfangspunkt gehenden Ebenen liegen, also

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$$

$$= \cos\sigma\cos\gamma - \cos\tau\cos\beta : \cos\tau\cos\alpha - \cos\varrho\cos\gamma : \cos\varrho\cos\beta - \cos\sigma\cos\alpha$$

ist, ausserdem

$$\begin{aligned} &(\sigma\gamma - \tau\beta)^2 + (\tau\alpha - \varrho\gamma)^2 + (\varrho\beta - \sigma\alpha)^2 \\ &\equiv (\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\varrho\alpha + \sigma\beta + \tau\gamma)^2 \equiv 1 \end{aligned}$$

ist, so stellen jene Ausdrücke $\cos\sigma\cos\gamma - \cos\tau\cos\beta, \ldots$ wirklich $\cos\lambda, \ldots$ dar und man erhält also

$$\begin{aligned} &N \sin\Theta \\ &= n_1(\cos\alpha_0\cos\lambda_1 + \cos\beta_0\cos\mu_1 + \cos\gamma_0\cos\nu_1) \\ &\pm n_0(\cos\alpha_1\cos\lambda_0 + \cos\beta_1\cos\mu_0 + \cos\gamma_1\cos\nu_0) \end{aligned}$$

eine Gleichung, deren rechte Seite mit der linken Seite der Gleichung eines speciellen Complexes in der Normalform übsreinstimmt, in welche rechtwinklige homogene Coordinaten einer Geraden substituirt sind. Hiermit ist denn Folgendes bewiesen:

Werden in die linke Seite der Gleichung eines speciellen Complexes erster Ordnung in der Normalform die rechtwinkligen homogenen Coordinaten einer beliebigen Geraden eingesetzt, so stellt sie das Product aus der Entfernung jener Geraden von der Axe des Complexes in den Sinus ihres Neigungswinkels gegen die Axe dar*).

Durch Vergleichung dieser Deutung mit der vorhergehenden folgt der Satz:

Fällt man von einem beliebigen Punkte Perpendikel auf zwei gegebene Gerade, so ist die Summe der Producte aus der Länge eines jeden derselben in den Cosinus des Winkels, welchen eine zu ihm und der Geraden, worauf es gefällt ist, construirte Normale mit der jedesmaligen andern macht, constant, und gleich dem Product aus der Entfernung beider Geraden in den Sinus ihres Neigungswinkels.

Es lässt sich derselbe auch leicht mittelst trigonometrischer Betrachtungen darthun; auch ist er in besonderen Fällen, z. B. wenn beide Gerade parallel sind, ohne Weiteres evident. Ein für uns später wichtiger Specialfall ergiebt sich, wenn der angenommene Punkt auf einer der beiden Geraden selbst liegt, nämlich:

Durchläuft ein Punkt eine feste Gerade, so ist das Product aus seiner Entfernung von einer andern festen Geraden in den Sinus des Winkels, welchen die erstere mit einer durch den Punkt und die zweite Gerade gelegten Ebene macht, constant,

oder anders ausgedrückt:

Wird eine Gerade parallel zu sich selbst so verschoben, dass ihre Entfernung von einer festen Geraden unverändert bleibt, so ist für einen beliebig auf der letzteren gewählten Punkt das Product aus dem von ihm auf die sich bewegende Gerade gefällten Perpendikel in den Cosinus des Winkels, den eine zu diesem Perpendikel und der sich bewegenden Geraden gedachte Normale mit der festen Geraden macht, constant.

---

*) Dieser Satz bringt eine gewisse Gruppirung in die zu dem speciellen Complex erster Ordnung gehörigen Geraden; denn soll

$$N \sin \Theta = 0$$

sein, so muss entweder $\sin \Theta = 0$ sein, d. h. die Gerade parallel zur Axe des Complexes, oder $N = 0$, d. h. die Axe von ihr in endlicher Entfernung geschnitten werden. Im letzteren Falle ordnen sich dann die Geraden, für welche $\sin \Theta$ denselben constanten Werth hat, in leicht zu übersehender Weise an.

Dadurch, dass man die bei diesem letzteren Ausdrucksweise zu denkende Raumfigur um die feste Gerade rotiren lässt, sowie endlich in dem constanten Werthe $N \sin \Theta$ beide Factoren variabel denkt, erhält man noch folgende zwei Erweiterungen des Satzes:

Wird eine Gerade um eine feste Axe so gedreht und längs ihr verschoben, dass ihre Entfernung und Neigung gegen sie dieselben bleiben, so hat das Product des von einem Punkte jener Axe auf die Gerade gefällten Perpendikels in den Cosinus des Winkels, welchen die Axe mit einer auf der durch jenen Punkt und die Gerade gelegten Ebene errichteten Normalen macht, immer denselben Werth;

endlich:

Bei allen Geraden, für die das Product aus ihrer Entfernung von einer festen Geraden in den Sinus ihres Neigungswinkels gegen dieselbe constant ist, ist auch das Product aus der von einem beliebigen Punkte der festen Geraden auf eine von ihnen gefällten Senkrechten in den Cosinus des Winkels, den die feste Gerade mit einer auf der durch jenen Punkt und die andere Gerade gelegten Ebene errichteten Normalen macht, constant.

Die zuletzt gefundene Bedeutung der linken Seite der speciellen Complexgleichung ermöglicht die Aufstellung eines tetraedrischen Coordinatensystems für die Raumgerade. Geht man nämlich aus von den Gleichungen:

$$\begin{Bmatrix} u_0 x + u_1 y + u_2 z + u_3 p = 0 \\ v_0 x + v_1 y + v_2 z + v_3 p = 0 \end{Bmatrix}$$

derselben in dem bisher benutzten rechtwinkligen System, so dienen zu ihrer Uebertragung in ein tetraedrisches Punktcoordinatensystem die Formeln:

$$\begin{aligned} x &= x_0 X + x_1 Y + x_2 Z + x_3 P, \\ y &= y_0 X + y_1 Y + y_2 Z + y_3 P, \\ z &= z_0 X + z_1 Y + z_2 Z + z_3 P, \\ p &= p_0 X + p_1 Y + p_2 Z + p_3 P, \end{aligned}$$

worin die Constanten $\frac{x_0}{p_0}, \frac{y_0}{p_0}, \dots$ die Coordinaten der Eckpunkte des Fundamentaltetraeders sind. Durch Substitution dieser Werthe für x, y, z, p in die Gleichungen unserer Geraden gehen diese über in

$$\begin{Bmatrix} U_0 X + U_1 Y + U_2 Z + U_3 P = 0 \\ V_0 X + V_1 Y + V_2 Z + V_3 P = 0 \end{Bmatrix},$$

wenn die Coefficienten U und V folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} U_n &= x_n u_0 + y_n u_1 + z_n u_2 + p_n u_3, \\ V_n &= x_n v_0 + y_n v_1 + z_n v_2 + p_n v_3. \end{aligned}$$

Werden nun aus ihnen die Coordinaten Q unserer Geraden für das

neue System gebildet, so ergiebt sich folgender Zusammenhang derselben mit den frühern q, es ist

$$Q_{ik} = (x_i y_k) q_{01} + (y_i z_k) q_{12} + (z_i x_k) q_{02} + (x_i p_k) q_{03} + (y_i p_k) q_{13} + (z_i p_k) q_{23},$$

wo $(x_i y_k) = x_i y_k - x_k y_i, \cdots$ ist und also die Coefficienten der q die Coordinaten je einer Kante des Fundamentaltetraeders im ursprünglichen System sind. Durch passende Wahl desselben wird man es einrichten können, dass diese Ausdrücke $(x_i y_k) \cdots$ für sämmtliche Kanten die homogenen rechtwinkligen Coordinaten in dem oben festgesetzten Sinne sind, sodass, wenn dann auch die q als solche angenommen werden, die Ausdrücke für die Q mit den linken Seiten von Gleichungen specieller linearer Complexe in der Normalform übereinstimmen, in welche die rechtwinkligen Coordinaten einer Geraden eingesetzt sind, und also die folgende Definition der Q aufgestellt werden kann:

> Die tetraedrischen Coordinaten einer Geraden sind die Producte aus den Entfernungen derselben von den Kanten des Fundamentaltetraeders in die Sinusse ihrer betreffenden Neigungswinkel gegen diese Kanten.

Da für sie auch wieder die identische Relation

$$Q_{01} Q_{23} + Q_{02} Q_{31} + Q_{03} Q_{12} = 0$$

besteht, so ergeben sich daraus Beziehungen zwischen einer Geraden resp. Punkten einer Geraden von den Kanten eines Tetraeders, auf welche wir hier nicht weiter eingehen. Eine Verallgemeinerung der Tetraedercoordinaten, wie wir sie eben definirt haben, sind tetraedrische Verhältnisscoordinaten, von denen man dann leicht zu den Plücker'schen Verhältnisscoordinaten gelangen kann, indem man, wie um von den tetraedrischen Punktcoordinaten auf Cartesische zu kommen, eine Seitenebene des Fundamentaltetraeders, die wir mit 012 bezeichnen wollen, in unendliche Ferne rücken lässt, während die 3 anderen zu einander senkrecht sind. Denn es können zunächst für die Verhältnisse der auf die drei Schnittlinien der letzteren, d. h. die Axen OX, OY, OZ bezüglichen Producte von der Form $N \sin \Theta$ nach einem der obigen Sätze Ausdrücke substituirt werden, welche proportional sind zu $n \cos \lambda$, $n \cos \mu$, $n \cos \nu$, wenn n, λ, μ, ν die frühere Bedeutung haben. Für die in unendliche Ferne entrückten Kanten aber ist

$$(x_0 p_1) = (y_0 p_1) = (z_0 p_1) = (x_1 p_2) = (y_1 p_2) = (z_1 p_2) = (x_2 p_0) = (y_2 p_0) = (z_2 p_0) = 0$$

und also

$$Q_{ik} = (x_i y_k) q_{01} + (y_i z_k) q_{12} + (z_i x_k) q_{02}, \qquad [ik = 01, 12, 20],$$

welche Ausdrücke den Cosinus der Winkel proportional sind, die unsere Gerade mit auf den Ebenen 301, 312, 320 errichteten Normalen,

d. h. den Axen OZ, OX, OY macht; es ist deshalb

$$Q_{01} : Q_{12} : Q_{20} = \cos\gamma : \cos\alpha : \cos\beta.$$

Wenden wir uns nun zur Untersuchung des allgemeinen linearen Complexes, so wird ein solcher repräsentirt durch die Gleichung:

$$Aq_{12} + Bq_{20} + Cq_{01} + Dq_{03} + Eq_{13} + Fq_{23} = 0,$$

wo $A, B \ldots\ldots$ beliebige Constante sind; er geht in den speciellen über, wenn zwischen ihnen die Relation

$$AD + BE + CF \equiv 0$$

stattfindet, d. h. jene Coefficienten Coordinaten einer Geraden, der Axe des speciellen Complexes sind. Die Gleichung des Complexes soll in der Normalform gegeben heissen, wenn

$$D^2 + E^2 + F^2 = 1$$

ist; dann können die Grössen D, E, F aufgefasst werden als Cosinus der Winkel, welche eine Gerade mit den Axen macht, während A, B, C angesehen werden dürfen als Producte aus der Entfernung einer andern Geraden vom Coordinatenanfang in die Cosinus der Winkel, welche eine auf der durch sie und den Anfangspunkt gelegten Ebene errichtete Normale mit den Axen einschliesst. Zur Reduction der allgemeinen Complexgleichung auf die Normalform dient der Factor

$$\frac{1}{\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}}.$$

Um nun zunächst für die einem allgemeinen Complex angehörigen Geraden ein Gesetz zu finden, entsprechend der Bestimmung des speciellen Complexes durch die Gleichung $N \sin\Theta = 0$, braucht man nur für zwei durch ihre Coordinaten q' und q'' bestimmte feste Gerade weitere Gerade zu suchen, welche der Bestimmung

$$N_1 \sin\Theta_1 = kN_{11} \sin\Theta_{11},$$

wo N und Θ die frühere Bedeutung in Bezug auf die beiden festen Geraden haben und k eine Constante ist, genügen, denn diese Bedingungsgleichung in Function der Coordinaten jener drei Geraden ausgedrückt, giebt

$$(q'_{23} - kq''_{23})\,q_{01} + (q'_{03} - kq''_{03})\,q_{12} + (q'_{13} - kq''_{13})\,q_{20} + (q'_{12} - kq''_{12})\,q_{03}$$
$$+ (q'_{20} - q''_{20})\,q_{13} + (q'_{01} - kq''_{01})\,q_{23} = 0;$$

eine Gleichung, die einen allgemeinen linearen Complex darstellt, da zwischen den Coefficienten der q die bewusste Identität

$$(q'_{03} - kq''_{03})(q'_{12} - kq''_{12}) + (q'_{13} - kq''_{13})(q'_{20} - kq''_{20}) + (q'_{23} - kq''_{23})(q'_{01} - kq''_{01}) = 0$$

im Allgemeinen nicht stattfindet. Hieraus folgt:

Ein allgemeiner linearer Complex besteht aus allen Geraden, für welche die Producte aus ihren Entfernungen von zwei festen Geraden in die Sinusse ihrer betreffenden Neigungswinkel gegen dieselben ein constantes Verhältniss haben.

Bei derartiger Bestimmung des Complexes mag dieses constante Verhältniss der Modul, die beiden gegebenen Geraden die Directricen des Complexes heissen; je nach dem Werthe des Moduls k erhält man bei denselben Directricen eine ganze Reihe von Complexen, welchen dieselbe Congruenz, bestehend aus allen die Directricen schneidenden Geraden, gemein ist, und die nach Plücker's Benennung eine zweigliederige Gruppe bilden. Hierunter befinden sich zwei specielle mit den Directricen als Axen für die Werthe $k=0$ und $k=\infty$.

Es lassen sich leicht für jeden gegebenen Complex Gerade von der angegebenen Bedeutung für ihn ermitteln; denn vergleicht man die Coefficienten seiner Gleichung mit den obigen $q'-kq''$, so müssen die q' und q'' zunächst den Gleichungen

$$q'_{03}-kq''_{03}=A\ ,\ q'_{13}-kq''_{13}=B\ ,\ q'_{23}-kq''_{23}=C,$$
$$q'_{12}-kq''_{12}=D\ ,\ q'_{20}-kq''_{20}=E\ ,\ q'_{01}-kq''_{01}=F,$$

und ausserdem den bekannten Identitäten genügen. Man findet dann, dass, wenn etwa die q'' also die eine Gerade beliebig gewählt werden, sich für k der einzige Werth

$$k=-\frac{AD+BE+CF}{Aq''_{12}+Bq''_{20}+Cq''_{01}+Dq''_{03}+Eq''_{13}+Fq''_{23}}$$

ergiebt, folglich die q' und somit die andere Gerade eindeutig bestimmt sind. Also:

Durch eine als Directrix eines gegebenen Complexes beliebig gewählte Gerade ist die andere Directrix und der zugehörige Modul bestimmt.

Bei wirklicher Bildung der q' ergiebt sich, dass jedem Paar Gerade, welche Directricen eines Complexes sind, zugleich die Eigenschaft zukommt, weshalb sie von Plücker conjugirte Polaren in Bezug auf den Complex genannt werden.

Eine der augenfälligsten Eigenschaften des speciellen linearen Complexes ist die, dass, wenn man den ganzen Complex längs seiner Axe verschiebt und um dieselbe dreht, er unverändert bleibt, indem alle ihm angehörenden Geraden nach der Verschiebung und Drehung mit anderen Geraden des Complexes zur Deckung kommen, welche vorher ihre Stelle einnahmen. Die Gleichung des Complexes kann sich bei einer diesem Vorgange entsprechenden Coordinatenänderung nur um einen constanten Factor ändern. Um nun zu untersuchen, ob auch bei dem allgemeinen Complex eine derartige Axe existirt, kehren wir zurück zu den Gleichungen, welche die Abhängigkeit der Constanten des Complexes von Directricen und Modul vermitteln. Sollen zwei beliebige Gerade Directricen eines bestimmten Complexes sein, so muss

$$q'_{12}-kq''_{12}=\varrho D\ ,\ q'_{20}-kq''_{20}=\varrho E\ ,\ q'_{01}-kq''_{01}=\varrho F$$

sein, aus welchen Gleichungen durch Elimination des Proportionalitätsfactors ϱ und des für verschiedene Directricen wechselnden Moduls k folgt:

$$(q'_{01}q''_{20} - q'_{20}q''_{01})\,D + (q'_{12}q''_{01} - q'_{01}q''_{12})\,E + (q'_{20}q''_{12} - q'_{12}q''_{20})\,F = 0,$$

d. h. als Satz:

Die Linie kürzester Entfernung von irgend zwei zusammengehörigen Directricen eines Complexes 1. Ordnung ist einer bestimmten Ebene parallel, oder was dasselbe sagt, zu einer bestimmten Richtung normal, deren Richtungscosinus bestimmt sind durch $D:E:F$.

Hieraus folgt nun für die Möglichkeit der Axe überhaupt, dass sie jener Richtung parallel sein muss, indem nur dann bei einer Verschiebung längs ihr resp. Drehung um sie auch, wie es sein muss, alle Directricenpaare des Complexes mit andern zur Deckung kommen können. Sie muss ferner alle jene Linien kürzester Entfernung schneiden. Wird nun die Gleichung des Complexes in der Normalform, und werden die Coordinaten einer zur Axenrichtung parallelen Directrix als rechtwinklige homogene vorausgesetzt, d. h. $q'_{12} = D$, $q'_{20} = E$, $q'_{01} = F$, so folgt unmittelbar für die zugehörige Directrix $q''_{12} = q''_{20} = q''_{01} = 0$. Dies giebt den Satz:

Jede zur Axe parallele Gerade hat ihre conjugirte Directrix im Unendlichen.

Der zugehörige Werth des Moduls ist:

$$k = -\frac{AD + BE + CF}{Dq''_{03} + Eq''_{13} + Fq''_{23}}$$

und wird erst dann bestimmt sein, wenn durch bestimmte Werthe von

$$q'_{03}\ ,\ q'_{13}\ ,\ q'_{23}$$

auch die entsprechenden Coordinaten der zugehörigen Directrix fixirt oder umgekehrt durch beliebige Wahl der letzteren die ersteren bedingt sind. Da, wie oben gezeigt, zu jeder Geraden in Bezug auf den Complex nur eine conjugirte gehört, so muss die zur Axe gehörige Directrix bei jeder Verschiebung und Drehung des Complexes längs resp. um die Axe immer dieselbe bleiben, welcher Bedingung sich offenbar nur dadurch genügen lässt, dass sie senkrecht zur Axenrichtung in unendlicher Ferne angenommen wird. Diese Annahme liefert die zur Bestimmung der noch unbekannten drei Coordinaten der Axe nöthigen Daten; die Axe bildet dann mit ihrer unendlich entfernten conjugirten Normalen ein Directricenpaar von der Beschaffenheit, dass der Complex bei jeder Verschiebung und Drehung längs resp. um eine von ihnen unverändert bleibt.

Setzen wir nun, um die drei noch unbekannten Coordinaten der Axe zu ermitteln, wie es, wenn die zugehörige Directrix zu ihr normal sein soll, sein muss, $q''_{03} = D$, $q''_{13} = E$, $q''_{23} = F$, so wird

$$k = -\frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2},$$

und ergeben sich für diesen besondern Werth des Moduls, den Plücker mit k bezeichnet und den Parameter des Complexes genannt hat

$$q'_{03} = (AE - BD)E - (CD - AF)F$$
$$q'_{13} = (BF - CE)F - (AE - BD)D$$
$$q'_{23} = (CD - AF)D - (BF - CE)E$$

als die gesuchten drei Coordinaten der Axe, und daraus ihre Entfernung n vom Coordinatenanfang

$$= \sqrt{q'^2_{03} + q'^2_{13} + q'^2_{23}}.$$

Ist die Gleichung des Complexes in der Normalform gegeben, wie wir eben vorausgesetzt, so ist der Werth des Parameters $AD + BE + CF$. Soll die Axe des Complexes durch den Coordinatenanfang gehen, so müssen ihre drei vorher bestimmten Coordinaten Null werden, und findet sich dann durch Vergleichung der sie liefernden Ausdrücke:

$$A - kD\ ,\ B - kE\ ,\ C - kF$$

mit Null die in diesem Falle zwischen den Constanten des Complexes stattfindende Relation

$$A : B : C = D : E : F.$$

Dieses Resultat ergiebt sich auch durch rein geometrische Betrachtungen, wenn man für die linke Seite der Complexgleichung schreibt

$$n\,(\cos a \cos \lambda + \cos b \cos \mu + \cos c \cos \nu)$$
$$+ P\,(\cos L \cos \alpha + \cos M \cos \beta + \cos N \cos \gamma),$$

wo $\cos a = A, \ldots, P \cos L = D, \ldots$ gesetzt sind, dann voraussetzt, sie werde für eine bestimmte Gerade $\equiv 0$, und endlich von den obigen Sätzen über die von Punkten einer Geraden auf eine andere gefällten Senkrechten Gebrauch macht. Dabei ergeben sich noch weitere Resultate, wie z. B. $n \operatorname{tg} \lambda = k$, wo n die Entfernung einer Geraden des Complexes von der Achse, λ den Winkel zwischen beiden und k den Parameter bezeichnet.

Um die Lage der Achse eines Complexes bei gegebenen Directricen 0 und 1, sowie gegebenem Modul k festzustellen, nehmen wir die rechtwinkligen Coordinaten jener beiden Geraden als gegeben an, dann ist

$$D : E : F = \cos \alpha_0 - k \cos \alpha_1 : \cos \beta_0 - k \cos \beta_1 : \cos \gamma_0 - k \cos \gamma_1,$$

d. h. in Worten:

> Die Axe des Complexes theilt den Winkel zwischen den Directricen so, dass das Verhältniss der Sinus der Theilwinkel dem Modul gleich ist.

Wir wissen ferner, dass sie die kürzeste Verbindungslinie jener beiden

Geraden schneidet und dass, wenn sie durch den Anfangspunkt geht, zwischen den Constanten des Complexes die Gleichung

$$A : B : C = D : E : F$$

besteht; es kann daher das Verhältniss, in welchem die Linie kürzester Entfernung von der Axe getheilt wird, am einfachsten gefunden werden, indem man einen Complex componirt für einen gegebenen Modul k, mit Zugrundelegung eines Coordinatensystems, dessen Y-Axe die Linie kürzester Entfernung der als Directricen gegebenen Geraden 0 und 1 ist, und dessen X-Axe durch einen noch zu bestimmenden Punkt auf ihr parallel zu einer jener Geraden, etwa zu 0 geht, während die Z-Axe zu beiden senkrecht ist. Die Gerade 0 hat dann die rechtwinkligen Coordinaten $1, 0, 0, 0, 0, n$ und es sind $\cos\alpha_1,\ 0,\ \sin\alpha_1,\ n_1\sin\alpha_1,\ 0,\ n_1\cos\alpha_1$ die von 1, sodass durch α_1 auch zugleich der Neigungswinkel beider Geraden ausgedrückt ist. Als Constanten des Complexes ergeben sich dann:

$$A = -kn_1 \sin\alpha_1\,,\ B = 0,\ C = n - kn_1 \cos\alpha_1\,,$$
$$D = 1 - k\cos\alpha_1,\ E = 0,\ F = -k\sin\alpha_1\,,$$

und aus der Gleichung $A : C = D : F$ folgt:

$$\frac{n}{n_1} = \frac{k(\cos\alpha - k\cos 2\alpha)}{1 - k\cos\alpha},$$

sodass nun die Lage der Axe allein abhängt von der Entfernung und Neigung der Directricen und vom Modul.

Schliesslich sei bemerkt, dass aus den gefundenen Resultaten sich sehr einfach eine Reihe von Sätzen über die zweigliederige Complexgruppe ergiebt, die sich in Plücker's Raumgeometrie pag. 62 ff. finden.

Note über ein Problem der Abbildung.

Von H. Weber in Heidelberg.

In der Abhandlung des Herrn Schwarz „Ueber einige Abbildungsaufgaben" (Borchardt's Journal Bd. 70) sind einige Beispiele der Aufgabe behandelt, ein begrenztes Flächenstück auf die Fläche eines Kreises, in den kleinsten Theilchen ähnlich, so abzubilden, dass der Peripherie des Kreises die Grenze des andern Flächenstücks und dem Mittelpunkte des Kreises ein bestimmter Punkt des andern Flächenstücks entspricht, eine Aufgabe, deren allgemeine Lösbarkeit durch Riemann nachgewiesen ist. Bei der Lectüre der erwähnten Abhandlung machte ich die Bemerkung, dass sich noch andere Beispiele durchführen lassen, und unter diesen scheint mir eines der grossen Einfachheit des Resultates wegen einer kurzen Mittheilung werth zu sein. Es ist dies die Abbildung der Fläche einer Lemniscate auf die Fläche eines Kreises, die durch algebraische, in einem Falle sogar durch rationale Functionen vermittelt wird.

I.

Sind $\xi\eta$ rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, so setze man:

$$\xi + i\eta = \zeta = \sqrt{1 + e^{t+iu}}\,.$$

Durch die Gleichung $t =$ const. ist dann ein System confocaler Lemniscaten dargestellt, deren Brennpunkte die Coordinaten $\xi = \pm 1$, $\eta = 0$ haben; $u =$ const. entspricht den orthogonalen Curven, die in einem Systeme von Hyperbeln bestehen, welche sämmtlich durch die beiden Brennpunkte der Lemniscaten hindurchgehen*).

Ist $t > 0$, so begrenzt die entsprechende Lemniscate ein einfaches Flächenstück. $t = 0$ entspricht der Lemniscate im engern Sinne, d. h. derjenigen mit einem Doppelpunkte; für $t < 0$ besteht die Lemniscate aus getrennten Theilen. Es soll nun die Lemniscate

$$t = t_0 > 0$$

auf einem Kreis mit dem Radius 1 abgebildet werden, so dass dem Mittelpunkte des Kreises der Mittelpunkt der Lemniscate entspricht. Diese Aufgabe ist nach Riemann (Doctordissertation § 21) gelöst,

---

*) Vgl. die Abhandlung des Herrn VonderMühll: Ueber die Abbildung von Ebenen auf Ebenen (Borchardt's Journal Bd. 69).

sobald eine Function U gefunden ist, welche im Innern der Lemniscate der Gleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} = 0,$$

die an der Grenze der Fläche verschwindet, im Mittelpunkt unendlich wird wie $\log \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, sonst aber in der ganzen Fläche stetig ist. Diese Aufgabe lässt sich auch durch die andere ersetzen, eine Function U zu bestimmen, die im Innern der Fläche überall stetig ist, am Rande aber mit dem Logarithmus des Radius-Vector übereinstimmt.

Zur Lösung dieses Problems führt ein bestimmt vorgezeichneter Weg durch die Fourier'sche Reihe. Man ist hier aber in der angenehmen Lage, diese Reihe summiren zu können, und gelangt zu einem Resultat, welches ich hier angeben und nachträglich verificiren werde.

Sind xy rechtwinklige Coordinaten in der Ebene des Kreises, so setze man:

$$x + iy = \frac{\xi + i\eta}{\sqrt{e^{t_0} + e^{-t_0}[(\xi + i\eta)^2 - 1]}}$$

$$z = \frac{\zeta}{\sqrt{e^{t_0} + e^{-t_0}(\zeta^2 - 1)}}.$$

Durch diese Substitution sind zwei unendliche ebene Flächen, welche resp. die ζ-Ebene und die z-Ebene doppelt bedecken, und die je zwei einfache Verzweigungspunkte besitzen, in den kleinsten Theilen ähnlich, auf einander abgebildet. Man überzeugt sich aber leicht, dass, da $t_0 > 0$ ist, die Verzweigungspunkte in der ζ-Ebene ausserhalb der Lemniscate $t = t_0$, die in der z-Ebene ausserhalb des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ liegen. Andererseits ergiebt sich, wenn man zwischen x, y die Relation bestehen lässt: $x^2 + y^2 = 1$, zwischen ξ und η die Gleichung:

$$[(\xi + 1)^2 + \eta^2]\,[(\xi - 1)^2 + \eta^2] = e^{2t_0},$$

also die Gleichung unserer Lemniscate.

Dadurch ist also das Innere der Lemniscate in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet auf das Innere eines die z-Ebene einfach bedeckenden Kreises, so dass der Peripherie des Kreises die Lemniscate, dem Mittelpunkte der Mittelpunkt der Lemniscate entspricht.

II.

Noch einfacher gestaltet sich die Abbildung des einen Theils der verschlungenen oder einer aus zwei Armen bestehenden Lemniscate

auf das Innere eines Kreises, so dass dem Mittelpunkte des Kreises der im Innern des betreffenden Theils gelegene Brennpunkt entspricht.

Es sei dies der Brennpunkt $\xi = +1$ und es werde der von einem beliebigen Punkte nach diesem und dem anderen Brennpunkt gezogene Radius-Vector resp. mit ϱ, ϱ' bezeichnet.

Die characteristische Eigenschaft aller Lemniscaten ist:

$$\varrho\varrho' = \alpha,$$

wenn α eine Constante bedeutet. Ist $\alpha > 1$, so hat man eine einfache Lemniscate, $\alpha = 1$ ist die verschlungene Lemniscate, $\alpha < 1$ entspricht einer Lemniscate mit zwei Armen.

Für $\alpha \gtreqless 1$ ergiebt sich daher die oben mit U bezeichnete Function sehr einfach:

$$U = \log \varrho + \log \varrho' - \log \alpha.$$

Die gesuchte Abbildung auf den Kreis ergiebt sich daraus leicht durch Zerlegung von $\frac{\varrho\varrho'}{\alpha}$ in Factoren, nämlich:

$$x + iy = \frac{(\xi + i\eta)^2 - 1}{\alpha}$$

$$\alpha z = \zeta^2 - 1.$$

Die unendliche ζ-Ebene wird hierdurch auf eine, die z-Ebene doppelt bedeckende Fläche mit einem im Endlichen liegenden Verzweigungspunkte abgebildet. Dieser eine Verzweigungspunkt liegt, falls $\alpha < 1$ ist, ausserhalb des Kreises $x^2 + y^2 = 1$, für $\alpha = 1$ auf der Peripherie, und für $\alpha > 1$ im Innern dieses Kreises. Der Gleichung des Kreises selbst entspricht die Gleichung der Lemniscate.

Durch die obige Substitution ist also, wenn $\alpha \leq 1$ ist, das Innere des einen Theils der Lemniscate auf das Innere eines die z-Ebene einfach bedeckenden Kreises z abgebildet.

Ist $\alpha > 1$, so wird durch dieselbe Substitution das Innere einer ganzen Lemniscate auf einen die z-Ebene doppelt bedeckenden Kreis, mit einem Verzweigungspunkte in seinem Innern, abgebildet. Der Verzweigungspunkt entspricht dann dem Mittelpunkte der Lemniscate, und den Brennpunkten entspricht der Mittelpunkt des Kreises in beiden Blättern.

Durch Combination dieser Abbildung mit der vorigen ist die Abbildung eines die z-Ebene doppelt bedeckenden Kreises mit excentrisch liegendem Verzweigungspunkte auf einen einfachen Kreis ohne Verzweigungspunkt gegeben.

Der Satz der Variationsrechnung, welcher dem Principe der kleinsten Wirkung in der Mechanik entspricht.

Von A. Mayer in Leipzig.

Wie das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft, so ist auch das Princip der kleinsten Wirkung nur der specielle Fall eines weit allgemeineren Satzes der Variationsrechnung. Dieser letztere Satz, der, soviel ich weiss, bisher noch nicht bemerkt worden ist, soll hier in elementarer Weise, d. h. ohne Benutzung der Hamilton'schen Theorie abgeleitet werden. Man wird aber ohne Schwierigkeit erkennen, dass derselbe im Grunde nichts Anderes ist, als eine Interpretation jener bekannten Zurückführung der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung für den Fall, wo dieselbe die Grundvariable nicht explicite enthält, auf eine partielle Differentialgleichung mit einer Variabeln weniger. (Vgl. hierüber Jacobi, Dynamik, 19. und 21. Vorlesung).

Es seien $y\ y_1\ y_2 \dots y_n$ unbekannte Functionen von x und zwischen ihnen die Bedingungsgleichungen:

$$\varphi_1 = 0\ ,\ \varphi_2 = 0\ ,\ \dots\dots \varphi_m = 0 \tag{1}$$

vorgeschrieben, deren Anzahl selbstverständlich $< n+1$ angenommen wird und in denen die Differentialquotienten der y nicht vorkommen sollen. Es bezeichne ferner f eine gegebene Function der Variabeln y und ihrer ersten Differentialquotienten y'.

Dann führt bekanntlich die Aufgabe:

„*Die den m Bedingungen* (1) *unterworfenen Functionen* $y\ y_1 \dots y_n$ *so zu bestimmen, dass die erste Variation des Integrales*

$$V = \int_{a_0}^{a_1} f\,dx \tag{2}$$

gleich Null wird“

auf die $n+1$ Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}, \tag{3}$$

welche in Verbindung mit den m Gleichungen (1) hinreichen, um die gesuchten Functionen y, sowie die Multiplicatoren λ bis auf eine gewisse Anzahl willkürlicher Constanten zu bestimmen.

Sind überdies, natürlich unter Beachtung der Gleichungen (1), die Werthe gegeben, welche die Variabeln y in den beiden gegebenen Grenzen a_0 und a_1 annehmen sollen, so lösen die durch Integration des Systems (1), (3) erhaltenen Functionen y das obige System vollständig, sobald man in ihnen die willkürlichen Constanten aus diesen Grenzbedingungen bestimmt hat.

Dies vorausgeschickt, nehme ich an, *dass weder die Function f, noch auch die Functionen φ die unabhängige Variable x selbst enthalten.*

Dann ist stets:

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} + y_1' \frac{\partial f}{\partial y_1'} + \cdots y_n' \frac{\partial f}{\partial y_n'} - f = h \tag{4}$$

ein Integral der Gleichungen (1), (3). In der That sieht man leicht, dass der Differentialquotient dieses Ausdruckes identisch verschwindet durch die Gleichungen (3) und durch diejenigen Gleichungen, die man aus (1) durch Differentiation erhält.

Die Variable x kommt auch in der Gleichung (4) nicht vor. Führt man daher y an Stelle von x als unabhängige Variable ein, indem man allgemein setzt:

$$y_i' = \frac{dy_i}{dy} \cdot y',$$

so wird die Gleichung (4), nach y' aufgelöst, für diese Grösse einen Werth von der Form liefern:

$$y' = w,$$

worin w eine Function ist von

$$y \; y_1 \; y_2 \ldots y_n \; \frac{dy_1}{dy} \; \frac{dy_2}{dy} \ldots \frac{dy_n}{dy}.$$

Indem man diesen Werth von y', sowie die aus ihm folgenden Werthe von:

$$y_i' = \frac{dy_i}{dy} \cdot w \tag{5}$$

in f einsetzt, wird dieses ebenfalls eine Function jener Grössen, und wenn man diese Function mit F bezeichnet, so hat man durch (5) identisch:

$$f = F. \tag{6}$$

Durch partielle Differentiation nach y_i und $\frac{dy_i}{dy}$ entsteht hieraus:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \frac{\partial y_1'}{\partial y_i} + \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n'} \frac{\partial y_n'}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{dy_i}{dy}} = \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \frac{dy_i}{dy}} + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \frac{\partial y_1'}{\partial \frac{dy_i}{dy}} + \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n'} \frac{\partial y_n'}{\partial \frac{dy_i}{dy}}.$$

Nach (5) ist aber:

$$\frac{\partial y_k'}{\partial y_i} = \frac{dy_k}{dy} \frac{\partial w}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial y_k'}{\partial \frac{dy_i}{dy}} = \frac{dy_k}{dy} \frac{\partial w}{\partial \frac{dy_i}{dy}} \quad \text{für } k \gtrless i \text{ und:}$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial \frac{dy_i}{dy}} = \frac{dy_i}{dy} \frac{\partial w}{\partial \frac{dy_i}{dy}} + w.$$

Führt man diese Werthe in die obigen Formeln ein und macht von der aus (4), (5) und (6) folgenden Relation

$$w \left\{ \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \frac{dy_1}{dy} + \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n'} \frac{dy_n}{dy} \right\} = F + h$$

Gebrauch, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \frac{F+h}{w} \frac{\partial w}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{dy_i}{dy}} = w \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \frac{F+h}{w} \frac{\partial w}{\partial \frac{dy_i}{dy}}$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = w \frac{\partial \frac{F+h}{w}}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_i'} = \frac{\partial \frac{F+h}{w}}{\partial \frac{dy_i}{dy}}.$$

Substituirt man endlich diese Werthe in die n letzten Gleichungen (3), dividirt durch w und setzt:

$$dx = \frac{1}{w} dy,$$

$$\frac{\lambda_k}{w} = \mu_k, \tag{7}$$

so gehen diese Gleichungen über in:

$$\frac{\partial \frac{F+h}{w}}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{k=m} \mu_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} = \frac{d}{dy} \frac{\partial \frac{F+h}{w}}{\partial \frac{dy_i}{dy}}. \tag{8}$$

Die Lösungen des Systems (1), (3) erfüllen mithin, nachdem man in ihnen vermittelst des Werthes von y diese Variable an Stelle von x als unabhängige Variable eingeführt hat, auch die n Gleichungen (8) identisch.

Diese Gleichungen sind aber nichts Anderes als die Differentialgleichungen des Problems:

„Unter der Voraussetzung, dass stets die Bedingungen (1) *erfüllt sein sollen, diejenigen Functionen $y_1\ y_2\ \ldots\ y_n$ zu finden, für welche die erste Variation des Integrales*

$$(9)\qquad W = \int_{b_0}^{b_1} \frac{F+h}{w}\, dy$$

verschwindet.“

Schreibt man daher in diesem zweiten Integrale den Grenzen b_0 und b_1 von y, sowie den Grenzwerthen von $y_1\ y_2\ \ldots\ y_n$ dieselben Werthe vor, die diese Variabeln in der ersten Aufgabe für $x = a_0$ und $x = a_1$ annehmen sollten, und giebt der Constanten h den Werth, den sie dort erhält, so bringen die Lösungen des ersten Problems gleichzeitig und unter denselben Beschränkungen (1) auch die erste Variation des Integrales (9) zum Verschwinden.

Das Integral (9) aber entsteht aus dem Integrale:

$$(10)\qquad \int_{a_0}^{a_1} dx \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} + y_1' \frac{\partial f}{\partial y_1'} + \cdots y_n' \frac{\partial f}{\partial y_n'}\right),$$

wenn man die unabhängige Variable x mittelst der Gleichung (4) eliminirt.

Hat man umgekehrt die allgemeinen Gleichungen (1), (8) des zweiten Problems vollständig integrirt, so braucht man, um die vollständigen Lösungen der Gleichungen des ersten Problems zu erhalten, nur noch die eine Quadratur:

$$x + \text{const.} = \int \frac{1}{w}\, dy$$

auszuführen. —

Dass dieser Satz in der That das Princip der kleinsten Wirkung als speciellen Fall enthält, zeigt sich sofort, wenn man

$$x = t \quad , \quad f = T + U$$

setzt, wo U eine Function der Coordinaten $x_1\, y_1\, z_1\ ,\ x_2\, y_2\, z_2\ ,\ \ldots,$ die jetzt an die Stelle der unbekannten Functionen y treten, und

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i\, (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

ist. Denn hierdurch verwandelt sich das Integral (2) in das Hamilton'sche Integral

$$\int (T + U)\, dt,$$

die Gleichung (4) in den Satz der lebendigen Kraft

$$T = U + h$$

und das Integral (10) in das Integral des Princips der kleinsten Wirkung

$$\int dt \cdot 2T = \int \sum_i m_i v_i ds_i \cdot \text{—}$$

Der obige Satz ist übrigens auch einer Ausdehnung auf den allgemeinen Fall der Variationsrechnung fähig, d. h. man kann entsprechende Sätze auch für den Fall aufstellen, wo die Bedingungsgleichungen (1) die Differentialquotienten y' enthalten. Nur, weil in das Integral, welches alsdann an die Stelle der Gleichung (4) tritt, auch die Multiplicatoren λ eingehen, scheint hier nichts zu existiren, was dem Principe der kleinsten Wirkung vollkommen analog wäre. Wichtiger aber als diese directe Verallgemeinerung dürfte ein damit nahe verwandter Satz sein, der Satz nämlich, dass man im Allgemeinen immer eine der Bedingungsdifferentialgleichungen ganz eliminiren kann, sobald weder in dem Integrale, noch in den Bedingungsgleichungen die unabhängige Variable explicite auftritt.

In der That, die Differentialgleichungen des Problems

$$\delta \int f dx = 0$$

zu machen, während zwischen den unbekannten Functionen y die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\varphi = 0$$

besteht, sind:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}, \tag{11}$$

worin $\Omega = f + \lambda \varphi$ ist, und wenn weder f noch φ die Variable x selbst enthält, so gilt das Integral:

$$\sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} y_i' - f = h. \tag{12}$$

Unter dieser Annahme und vorausgesetzt, dass φ nicht gerade homogen in Bezug auf die Differentialquotienten y' ist, kann man aber, wenn man wieder

$$y_i' = \frac{dy_i}{dy} y'$$

setzt, aus der Gleichung $\varphi = 0$ y' ausdrücken durch

$$y\; y_1 \ldots y_n, \frac{dy_1}{dy} \ldots \frac{dy_n}{dy},$$

und wenn man diesen Werth mit ω und mit F denjenigen Ausdruck bezeichnet, in den f durch die Substitutionen:

$$y_i' = \frac{dy_i}{dy} \cdot \omega$$

übergeht, so hat man durch diese Substitutionen identisch:

$$\Omega = F.$$

Indem man diese Identität nach y_i und $\frac{dy_i}{dy}$ differentiirt, das In-

tegral (12) anwendet und mit Hülfe der auf diese Weise erhaltenen Werthe von

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y_i'}$$

die Differentialgleichungen (11) umformt, sieht man auf ganz demselben Wege wie vorhin, dass die Lösungen der Differentialgleichungen des betrachteten Problems gleichzeitig auch die n Differentialgleichungen lösen:

$$\frac{\partial \frac{F+h}{\omega}}{\partial y_i} = \frac{d}{dy} \frac{\partial \frac{F+h}{\omega}}{\partial \frac{dy_i}{dy}}.$$

Diese Gleichungen sind aber die Differenzialgleichungen des unbeschränkten Problems: diejenigen Functionen $y_1\, y_2 \ldots y_n$ zu finden, welche die erste Variation des Integrales

$$\int \frac{F+h}{\omega}\, dy$$

zum Verschwinden bringen, und dieses Integral erhält man aus dem Integrale

$$\int \sum_i \frac{\partial\Omega}{\partial y_i'}\, y_i'\, dx,$$

indem man x mittelst der Bedingungsgleichung $\varphi = 0$ und λ mittelst des Integrales (12) eliminirt.

Wären ausser der Bedingung $\varphi = 0$ noch andere Bedingungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... gegeben, entweder zwischen den Functionen y allein, oder zwischen diesen und ihren ersten Differentialquotienten, jedoch immer ohne x, so hätte man in dem Vorhergehenden nur überall $f + \lambda_1\, \varphi_1 + \lambda_2\, \varphi_2 + \cdots$ statt f zu setzen.

Wendet man dies Resultat beispielsweise auf die Aufgabe an: x, y, z als Functionen von s so zu bestimmen, dass

$$\delta \int f(x, y, z)\, ds = 0$$

werde, während stets:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

sein soll, so erhält man mit Rücksicht auf die statische Bedeutung dieser Aufgabe den Satz:

Die Gleichgewichtslage eines unausdehnbaren Fadens, der an seinen beiden Enden befestigt ist und von Kräften gespannt wird, die eine Kräftefunction $f(x, y, z) = U$ *besitzen, bestimmt sich aus der Bedingung:*

$$\delta \int (U + h) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = 0;$$

und dies ist der wahre Ausdruck des Princips, welches Möbius in § 305 seines Lehrbuchs der Statik als Analogon des Princips der kleinsten Wirkung für das Fadengleichgewicht aufstellt und dort so ausspricht, dass das Integral $\int T\,ds$ für die Fadencurve ein Maximum oder Minimum sei. Es ist aber hinzuzufügen, dass man die Spannung T durch dasjenige Integral der statischen Gleichungen, welches dem Satze der lebendigen Kraft in der Dynamik entspricht, und ds durch die Bedingung der Unausdehnbarkeit des Fadens eliminiren muss.

Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume.

Par

L. Lindelöf à Helsingfors.

(Extrait d'un mémoire présenté à l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg).

Soit U la surface et V le volume d'un polyèdre convexe. D'un point fixe O, pris dans son intérieur, abaissons des perpendiculaires $p, q, r, \ldots$ sur toutes les faces $A, B, C, \ldots$ du polyèdre. Désignons par $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les arêtes qui forment le polygone A et par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ les angles dièdres correspondants. Pour la face B ces mêmes quantités seront désignées par $b_1, b_2, b_3, \ldots$ et $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$; pour la face C par $c_1, c_2, c_3, \ldots$ et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ et ainsi de suite. Cela posé, concevons que le plan du polygone A se déplace parallèlement à lui-même, de sorte que la distance p reçoive un accroissement infiniment petit dp; l'accroissement correspondant du volume V sera évidemment Adp et celui de la surface totale U

$$\left(a_1 \cot \frac{\alpha_1}{2} + a_2 \cot \frac{\alpha_2}{2} + a_3 \cot \frac{\alpha_3}{2} + \cdots\right) dp = dp \cdot \Sigma a \cot \frac{\alpha}{2},$$

la sommation s'étendant au contour entier du polygone A. On trouve des expressions analogues pour les accroissements de V et U que produirait un déplacement parallèle et infiniment petit de la face B ou d'une autre face quelconque, de sorte que, si toutes les perpendiculaires $p, q, r, \ldots$ étaient variables de longueur, leurs directions étant constantes, les différentielles totales de V et U seraient

$$(1) \qquad dV = Adp + Bdq + Cdr + \ldots$$

$$(2) \qquad dU = dp \cdot \Sigma a \cot \frac{\alpha}{2} + dq \cdot \Sigma b \cot \frac{\beta}{2} + dr \cdot \Sigma c \cot \frac{\gamma}{2} + \cdots$$

Pour en tirer les valeurs de U et V en termes finis, on peut supposer la dilatation du polyèdre uniforme ou telle que les perpendiculaires $p, q, r, \ldots$ croissent toutes en même proportion. On aura alors

$$\frac{dV}{3V} = \frac{dU}{2U} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \frac{dr}{r} = \cdots$$

et il sera permis de remplacer, dans les équations précédentes, les différentielles dV, dU, dp, dq, dr, ... par les quantités proportionnelles $3V$, $2U$, p, q, r, ... ce qui conduit immédiatement aux formules

$$(3) \qquad 3V = Ap + Bq + Cr + \cdots$$

$$(4) \qquad 2U = p\Sigma a \cot\frac{\alpha}{2} + q\Sigma b\cot\frac{\beta}{2} + r\Sigma c\cot\frac{\gamma}{2} + \cdots,$$

dont la première est bien connue, tandis que la seconde renferme une expression nouvelle de l'aire totale d'un polyèdre.

Pour en venir à l'objet de notre recherche, nous admettons d'abord qu'on ait fixé le nombre et les inclinaisons mutuelles des faces d'un polyèdre convexe ou, ce qui revient au même, les directions des perpendiculaires p, q, r, ... et qu'on veuille déterminer les conditions nécessaires pour que le *volume* V *soit maximum*, la surface totale U étant donnée. Elles sont contenues dans les équations simultanées $dV = 0$, $dU = 0$, qui deviennent, en prenant p, q, r, ... pour variables principales,

$$0 = A\,dp + B\,dq + C\,dr + \cdots$$

$$0 = \Sigma\left(a\cot\frac{\alpha}{2}\right)dp + \Sigma\left(b\cot\frac{\beta}{2}\right)dq + \Sigma\left(c\cot\frac{\gamma}{2}\right)dr + \cdots;$$

et comme la première équation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de dp, dq, dr, ... qui satisfont à la seconde, il faut que les coefficients soient proportionnels, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{A}{\Sigma a\cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{B}{\Sigma b\cot\frac{\beta}{2}} = \frac{C}{\Sigma c\cot\frac{\gamma}{2}} = \cdots = \frac{3V}{2U}.$$

La dernière fraction est obtenue en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs de celles qui précèdent, après avoir multiplié les deux termes de la première fraction par p, ceux de la seconde par q, etc. En faisant

$$R = \frac{3V}{U},$$

on aura donc

$$(5) \qquad \begin{aligned} 2A &= R\Sigma a\cot\frac{\alpha}{2} \\ 2B &= R\Sigma b\cot\frac{\beta}{2} \\ 2C &= R\Sigma c\cot\frac{\gamma}{2} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas du maximum d'un polyèdre, une face quelconque est proportionnelle à la somme de ses arêtes multipliées chacune par la cotangente du demi-angle dièdre correspondant.

On peut exprimer ce résultat sous une autre forme plus simple.

simple. Considérons une face particulière A et concevons une sphère inscrite à la fois dans les trois angles dièdres consécutifs α_1, α_2, α_3, et tangente, par conséquent, aux quatre faces contiguës à l'arête a_2. A chacune des arêtes a_1, a_2, a_3, ... correspond ainsi une sphère inscrite déterminée; nous désignons respectivement par ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ... les rayons de ces sphères.

Soit P un point quelconque pris dans le plan du polygone A et h_1, h_2, h_3, ... les perpendiculaires abaissées de ce point sur les droites a_1, a_2, a_3, ... Si l'on convient de regarder chacune de ces perpendiculaires comme positive ou négative, suivant qu'elle tombe du même côté que le polygone ou du côté opposé de la droite correspondante, on aura dans tous les cas

$$2A = a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots \tag{6}$$

Supposons maintenant que la droite a_2 se déplace parallèlement à elle-même de manière que la perpendiculaire h_2 reçoive un accroissement infiniment petit dh_2, les trois arêtes a_1, a_2, a_3 ainsi que la surface A seront variables, tandis que les autres arêtes et perpendiculaires resteront constantes, et l'on trouve, en prenant la différentielle sous ce point de vue,

$$2dA = a_2 dh_2 + h_1 da_1 + h_2 da_2 + h_3 da_3.$$

Mais l'on a aussi évidemment $dA = a_2 dh_2$; notre formule se réduit donc à

$$dA = h_1 da_1 + h_2 da_2 + h_3 da_3.$$

Cette équation ayant lieu quel que soit le point P, il est permis de substituer aux perpendiculaires h_1, h_2, h_3 les valeurs particulières qu'elles prendraient, si le point P coïncidait avec le point de contact de la sphère inscrite correspondante à l'arête a_2. Ces valeurs sont

$$h_1 = \varrho_2 \cot \frac{\alpha_1}{2}\ ,\quad h_2 = \varrho_2 \cot \frac{\alpha_2}{2}\ ,\quad h_3 = \varrho_2 \cot \frac{\alpha_3}{2}\ ,$$

et l'on aura par conséquent aussi

$$dA = \varrho_2 \left(\cot \frac{\alpha_1}{2}\, da_1 + \cot \frac{\alpha_2}{2}\, da_2 + \cot \frac{\alpha_3}{2}\, da_3\right)$$

ou bien, en mettant pour dA sa valeur $a_2 dh_2$, et supposant que les angles α restent constants,

$$d\Sigma a \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{a_2}{\varrho_2}\, dh_2 .$$

Telle est la différentielle de la somme $\Sigma a \cot \frac{\alpha}{2}$ prise par rapport à h_2 comme seule variable indépendante. Mais si toutes les perpendiculaires h_1, h_2, h_3, ... venaient à varier simultanément par un déplacement parallèle de tous les côtés du polygone A, l'expression précédente acquerrait d'autres termes de la même forme, et la différentielle totale de Σ serait

$$\cot\frac{\alpha_1}{2}\,da_1 + \cot\frac{\alpha_2}{2}\,da_2 + \cdots = \frac{a_1}{\varrho_1}\,dh_1 + \frac{a_2}{\varrho_2}\,dh_2 + \cdots$$

En supposant la dilatation du polygone uniforme, ou telle qu'on ait

$$\frac{da_1}{a_1} = \frac{da_2}{a_2} = \cdots = \frac{dh_1}{h_1} = \frac{dh_2}{h_2} = \cdots\cdots$$

on en déduit la relation

$$a_1\cot\frac{\alpha_1}{2} + a_2\cot\frac{\alpha_2}{2} + \cdots = \frac{a_1}{\varrho_1}\,h_1 + \frac{a_2}{\varrho_2}\,h_2 + \cdots$$

que nous écrivons plus simplement

$$(7)\qquad \Sigma\, a\cot\frac{\alpha}{2} = \Sigma\,\frac{ah}{\varrho},$$

la somme Σ étant relative au contour entier du polygone A.

Reprenons maintenant la première des équations (5) et mettons y les valeurs trouvées dans les formules (6) et (7); nous aurons

$$\Sigma\, ah = R\,\Sigma\,\frac{ah}{\varrho},$$

ou en développant et transposant

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{R}\right) a_1 h_1 + \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{R}\right) a_2 h_2 + \left(\frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{R}\right) a_3 h_3 + \cdots = 0,$$

ce que nous désignons, en abrégeant l'écriture, par

$$(8)\qquad \Sigma\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}\right) ah = 0.$$

Telle est en définitive la condition à laquelle chacune des faces doit satisfaire séparément pour que le polyèdre soit maximum, et cela quelle que soit, dans le plan que l'on considère, l'origine des perpendiculaires h.

Cette condition est évidemment remplie lorsque le polyèdre est circonscrit à une sphère, puisque R signifie alors le rayon de cette sphère, et que toutes les sphères particulières correspondantes aux différentes arêtes d'une face quelconque coïncident avec celle-ci, de sorte qu'on aura constamment $\varrho = R$. Mais il s'agit de démontrer réciproquement que si la condition (8) est remplie pour chacune des faces, le polyèdre est nécessairement circonscrit à une sphère.

A cet effet nous considérons de nouveau une face particulière A formée par un nombre d'arêtes quelconque. Pour chacune de ces arêtes la différence $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}$ a une valeur déterminée, qui peut être positive ou négative, si elle n'est pas nulle. Supposons qu'on marque sur chaque arête le signe correspondant de la différence dont il s'agit, et examinons les dispositions que peuvent présenter ces signes.

Si l'on prend l'origine P des perpendiculaires h dans l'intérieur du polygone A, toutes ces perpendiculaires et par conséquent aussi les produits ah seront positifs. Il en résulte que si la différence

$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}$ n'est pas nulle sur le contour entier du polygone, elle sera positive pour quelque côté et négative pour quelque autre, puisque sans cela la somme $\Sigma \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}\right) ah$ ne saurait être nulle. Ajoutons qu'il existe alors au moins deux côtés affectés du signe $+$ et deux autres marqués du signe $-$. Car s'il n'y avait qu'un seul côté portant un certain signe, il suffirait de placer le point P sur ce côté même pour prouver que l'équation (8) serait alors impossible.

Je dis de plus que les signes des différents côtés doivent alterner de manière à présenter au moins quatre variations, en faisant le tour du polygone. En effet, s'il n'y avait que deux suites de signes, de sorte que toutes les arêtes marquées du signe $+$ se trouveraient d'un côté d'une certaine diagonale et toutes celles marquées du signe $-$ de l'autre, il suffirait de placer l'origine P au point de rencontre des deux arêtes extrêmes soit de la suite positive, soit de la suite négative, pour faire prendre le même signe à tous les termes de l'équation (8). Cette démonstration n'est jamais en défaut, puisque, le polygone étant convexe, il est impossible que les deux couples d'arêtes dont il s'agit, soient parallèles à la fois.

Il est donc bien prouvé que si la différence $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}$ n'est pas nulle pour toutes les arêtes d'une face, elle offrira sur son contour au moins quatre variations de signe.

De là on peut conclure immédiatement: 1° que la différence dont il s'agit, est nécessairement nulle pour toutes les arêtes d'une face triangulaire, puisqu'il faudrait autrement que les trois côtés présentassent quatre variations de signe, ce qui est absurde; 2° que si cette différence est nulle pour un côté d'une face tétragonale, elle est nulle sur son contour entier; 3° qu'elle est nulle pour toutes les arêtes d'une face pentagonale, aussitôt qu'elle s'évanouit pour deux d'entre elles. En général, on peut affirmer que la quantité $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}$ est nulle le long du contour d'une face de m côtés, quand on sait seulement qu'elle s'évanouit pour $m - 3$ côtés particuliers.

Mais il faut démontrer que cette quantité est nécessairement nulle pour toutes les arêtes d'une face quelconque du polyèdre maximum. Pour cela, il est utile de faire, avant tout, la distinction suivante.

Lorsqu'un sommet ou angle solide est formé par trois plans, nous dirons qu'il est *simple*; nous l'appellerons *double*, s'il est formé par quatre plans, *triple*, s'il est formé par cinq plans, etc. En général nous regardons le degré de multiplicité d'un angle solide comme inférieur de deux unités au nombre des plans qui concourent à sa formation. Cela convenu, il peut arriver, suivant la disposition des plans

limites, que tous les sommets du polyèdre maximum soient simples, ou bien qu'il existe aussi des sommets multiples. Dans le premier cas il n'y a jamais qu'une seule valeur de ϱ correspondante à une arête donnée, tandis que, dans le second, ϱ pourrait avoir des valeurs différentes pour cette même arête dans les deux faces auxquelles elle appartient. C'est pourquoi il convient de traiter séparément ces deux cas.

I. *Cas où il n'y a que des sommets simples.* — Suivant la remarque que nous venons de faire la quantité $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}$ ne peut avoir, dans le cas actuel, qu'une seule valeur pour chaque arête du polyèdre. Si elle n'est pas constamment nulle, il existera un certain nombre d'arêtes pour lesquelles cette quantité sera essentiellement positive ou négative et qui seront, par conséquent, affectées de signes déterminés $+$ ou $-$. De telles arêtes peuvent entrer dans le contour de chaque face ou dans celui de quelques faces seulement.

Examinons d'abord la première hypothèse, par laquelle il est admis que chaque face contienne dans son périmètre quelque arête marquée d'un certain signe. Comme nous l'avons vu, l'existence d'une seule arête de cette espèce entraîne celle de plusieurs autres, de sorte que chaque face doit alors présenter au moins quatre variations de signe. Désignons par s le nombre des sommets du polyèdre, par f le nombre des faces et par k celui des arêtes; d'après le théorème d'Euler, ces nombres seront liés entre eux par la relation

$$s + f = k + 2,$$

et comme tous les sommets sont simples ou formés par trois plans, on aura en outre

$$3s = 2k,$$

d'où il résulte

$$(9) \qquad \begin{cases} s = \frac{2}{3}\, k, \\ f = \frac{1}{3}\, k + 2. \end{cases}$$

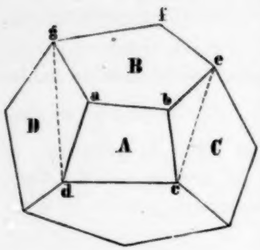
Soit v le nombre total des variations qu'on observe en faisant le tour de toutes les faces du polyèdre, après avoir donné une signe arbitraire à chacune des arêtes qui n'en portent aucun. Le même nombre doit s'obtenir évidemment en comptant les variations autour des angles solides. Or chaque angle solide ne peut présenter, sur les trois arêtes dont il est formé, que *deux* variations tout au plus. On aura donc à la fois $v > 4f$ et $v < 2s$, c'est à dire

$$v > \frac{4}{3}\, k + 8 \qquad \text{et} \qquad v < \frac{4}{3}\, k,$$

ce qui implique une contradiction évidente. Donc il est impossible

que toutes les faces contiennent des arêtes pour lesquelles la quantité $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}$ soit différente de zéro.

Voyons maintenant si cette quantité peut se réduire à zéro le long du contour de certaines faces sans être nulle pour toutes les arêtes du polyèdre. Soit $A = abcd$ (voir la figure ci-jointe) une des faces dont les arêtes ne portent aucun signe, et $B = abefg$ une face adjacente. Imaginons qu'on supprime l'arête ab commune à ces faces et qu'on redresse les lignes brisées dag et cbe en leur substituant les nouvelles arêtes rectilignes dg et ce, auxquelles on donnera les signes des arêtes supprimées ag et bc. Par là les deux faces A et B se réuniront en un seul polygone gauche $cefgd$, dont le contour présentera exactement le même nombre de variations de signe que ceux des deux faces A et B ensemble. Quant aux autres faces adjacentes C et D, chacune d'elles offrira autant de variations après qu'avant cette transformation, de manière que le nombre total des variations n'aura subi aucun changement. En continuant ce procédé, on fera disparaître une à une toutes les faces dont les arêtes ne portent aucun signe, jusqu'à ce qu'on ait transformé la figure primitive en un réseau polyédrique dans lequel chaque polygone latéral présente au moins quatre variations de signe. Or chaque fois qu'on supprimera ainsi une face, on fera disparaître en même temps deux sommets et trois arêtes, d'où il résulte qu'en désignant par k', f', s' les nombres respectifs des arêtes, des faces et des sommets de la figure transformée, on aura



$$f - f' = \frac{k - k'}{3} = \frac{s - s'}{2}.$$

On en déduit, à l'aide des formules (9),

$$s' = \frac{2}{3} k',$$

$$f' = \frac{1}{3} k' + 2.$$

Ainsi les mêmes relations (9) qui avaient lieu entre les nombres des arêtes, des sommets et des faces du polyèdre primitif, subsistent encore dans la figure transformée. D'ailleurs chaque sommet de celle-ci est aussi formé par trois plans. Donc cette figure rentre complétement dans l'hypothèse déjà examinée.

Il résulte de cette discussion que pour un polyèdre maximum dont tous les sommets sont simples, la différence $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}$ est constamment

nulle, ce qui veut dire que le polyèdre est circonscrit à une sphère au rayon R.

II. *Cas de sommets multiples.* — Lorsqu'un polyèdre a des sommets multiples, on peut le considérer comme cas limite d'un autre polyèdre à faces variables et dont tous les sommets sont simples. Soit S un sommet du degré n de multiplicité ou formé par $n + 2$ plans. Si l'on fait mouvoir un de ces plans parallèlement à lui-même vers l'intérieur du polyèdre, le sommet S se partagera évidemment en n sommets simples et en même temps le polyèdre acquerra $n - 1$ arêtes nouvelles, qui feront partie du périmètre de la face A. Si le plan A se mouvait vers l'extérieur, il n'en résulterait qu'un sommet nouveau et une arête nouvelle, qui serait commune aux deux faces adjacentes à A. Le sommet S resterait à sa place, mais son degré de multiplicité serait diminué d'une unité.

En général il est permis de regarder un sommet multiple du degré n comme la réunion de n sommets simples, confondus par l'évanouissement de $n - 1$ arêtes, qui les avaient séparés. Restituons par la pensée toutes ces arêtes disparues et nous aurons un polyèdre à sommets simples et qui rentre, par conséquent, dans le cas précédent, à cela près qu'un certain nombre de ses arêtes auront la valeur particulière *nulle*.

Or, il est aisé de vérifier que les calculs et les raisonnements que nous avons faits au sujet de polyèdres en général, subsistent encore lorsqu'une ou plusieurs arêtes sont nulles, pourvu qu'on tienne toujours compte de ces arêtes et des angles dièdres qui leur correspondent. On peut voir, en particulier, que les formules (2) et (4) ne cessent pas d'être vraies, si quelques-unes des arêtes se réduisent à des points. Il en est de même de l'équation (7); seulement il faut observer que si une arête a est nulle, le rayon correspondant ϱ peut être nul ou indéterminé, tandis que le rapport $\frac{a}{\varrho}$, qui dépend uniquement des inclinaisons mutuelles des plans, a toujours une valeur déterminée, qui est positive dans le premier cas et nulle dans le second. Partant des formules (2), (4) et (7) ainsi généralisées, on obtient la même condition de maximum (8) qu'auparavant. Cette fois il est préférable de lui donner la forme

$$\Sigma \left(\frac{a}{\varrho} - \frac{a}{R}\right) h = 0$$

et d'examiner les signes du facteur $\frac{a}{\varrho} - \frac{a}{R}$, qui est toujours fini. La question se trouve ainsi ramenée au cas déjà traité et l'on en conclut immédiatement que la différence $\frac{a}{\varrho} - \frac{a}{R}$ doit s'évanouir pour toutes les arêtes du polyèdre, y compris celles qui sont nulles. Il en résulte

d'abord qu'on aura $\varrho = R$ pour toute arête a qui diffère de zéro. Pour $a = 0$ le terme $\frac{a}{R}$ s'évanouit, et il faut qu'on ait aussi $\frac{a}{\varrho} = 0$. Cette dernière condition, qui est relative aux angles solides multiples, laisse le rayon ϱ indéterminé et elle exprime, par conséquent, que les plans qui forment un tel angle, pris à quatre, sont circonscriptibles à un cône droit. Pour satisfaire à ces différentes conditions relatives à toutes les arêtes, il faut évidemment que le polyèdre soit, dans ce cas encore, circonscrit à une sphère dont le rayon est R.

En résumant le résultat de toute notre discussion, nous pouvons, dès à présent, énoncer le théorème suivant:

Le polyèdre convexe qui sous une étendue superficielle donné renferme le plus grand volume, le nombre des faces et leurs inclinaisons mutuelles étant déterminés, est nécessairement circonscrit à une sphère.

Ce polyèdre est unique. Car si l'on prend le point O pour centre d'une sphère de rayon arbitraire, les perpendiculaires p, q, r, ..., dont les directions sont données, déterminent les points de contact du seul polyèdre circonscrit dont les faces aient les directions voulues, et il ne s'agit dès lors que de donner à cette sphère des dimensions convenables pour que la surface du polyèdre devienne ce qu'elle doit être. Or l'existence du maximum est évidente à priori, et comme il n'y a qu'un seul polyèdre qui remplisse la condition énoncée dans notre théorème, il en résulte que cette condition nécessaire est aussi suffisante, c'est-à-dire que le polyèdre circonscrit à une sphère est réellement le plus grand parmi tous ceux de même surface qu'on pourrait former avec le même nombre de plans, en conservant leurs inclinaisons mutuelles.

Jusqu'ici nous n'avons comparé entre eux que des polyèdres dont les faces ont les mêmes directions ou les mêmes inclinaisons mutuelles. Laissons maintenant cette restriction et admettons plus généralement que les faces, au nombre donné, puissent varier de toutes les manières, pourvu que leur étendue totale soit constante. Pour le maximum d'un polyèdre placé dans ces nouvelles circonstances, la condition d'être circonscrit à une sphère subsiste toujours, mais elle n'est plus suffisante. Il faut en outre que chacune des faces soit touchée au centre de gravité de son aire par la sphère inscrite.

Pour le démontrer, considérons un polyèdre P circonscrit à une sphère et supposons que le point de contact d'une certaine face ne coïncide pas avec son centre de gravité. Imaginons que cette face tourne infiniment peu autour d'une droite menée dans son plan et passant par son centre de gravité, de manière à s'éloigner de la sphère; on voit par le théorème de Guldin que l'accroissement correspondant

du volume V sera un infiniment petit du second ordre, et si l'on ramène ensuite le plan parallèlement à lui-même en contact avec la sphère, le volume diminuera d'une quantité infiniment petite du premier ordre. Par cette double transformation le polyèdre primitif P sera remplacé par un second polyèdre P' circonscrit à la même sphère et ayant un volume $V' < V$. Quant à la surface totale, elle aura diminué dans la même proportion, puisque les surfaces U et U' des deux polyèdres sont proportionnelles aux volumes V et V'. Concevons maintenant que les dimensions de la sphère et du polyèdre circonscrit P' croissent uniformement, jusqu'à ce que la surface de celui-ci reprenne la valeur primitive U; le volume V' croîtra en même temps; mais cette fois l'accroissement du volume aura lieu en plus forte proportion que celui de l'aire, puisqu'on a

$$\frac{dV'}{3V'} = \frac{dU'}{2U'}, \quad \text{ou} \quad \frac{dV'}{V'} = \frac{3}{2}\,\frac{dU'}{U'}.$$

Par conséquent le nouveau polyèdre ainsi formé aura un plus grand volume, tout en ayant la même surface, que le premier polyèdre P. Donc celui-ci n'était pas un maximum, c.q.f.d.

Ce résultat combiné avec le théorème précédemment démontré conduit à une proposition plus générale, que voici:

De tous les polyèdres convexes ayant le même nombre de faces, celui qui sous une étendue superficielle donnée renferme le plus grand volume, est circonscrit à une sphère qui touche chacune des faces dans son centre de gravité.

Ainsi se trouve établi un théorème fondamental, déjà entrevu par M. Steiner, et qui pourra, dès à présent, servir de base pour des recherches spéciales sur les maxima des figures solides.

Sur les limites entre lesquelles le caténoïde est une surface minima.

Par

L. Lindelöf à Helsingfors.

On sait depuis longtemps que la plus petite surface de révolution, terminée par deux bases circulaires données, est celle qui est engendrée par une chaînette tournant autour de sa directrice, surface à laquelle M. Plateau a donné le nom de *caténoïde*. Plus tard on a reconnu que cette propriété de minimum n'appartient à la surface dont il s'agit, qu'entre certaines limites, qu'on n'avait pourtant déterminées que pour le cas très-simple où les extrémités de la courbe méridienne se trouvent à distance égale de la directrice ou de l'axe de révolution. Dans nos *leçons de calcul des variations* (Paris 1861) nous avons traité cette question d'une manière plus générale qu'on ne l'avait fait jusqu'alors, et nous avons démontré (p. 209) que pour un arc de chaînette, dont l'une des extrémités A est prise à volonté, le minimum de la surface de révolution cesse d'avoir lieu, lorsque la seconde extrémité B, en s'éloignant suivant la courbe, arrive à une position telle que les deux tangentes menées à la chaînette en A et en B se rencontrent en un point de l'axe de révolution. C'est là, il nous semble, un des résultats les plus remarquables qu'on ait pu tirer jusqu'ici d'un examen de la variation seconde, dans les cas extrêmement rares où un pareil examen a été possible*).

Ces résultats théoriques acquièrent une signification matérielle en vertu du rapport intime qui existe entre les surfaces minima et les figures d'équilibre des fluides soustraits à l'action de la pesanteur, rapport développé par M. Plateau et mis au jour par ses belles expériences. C'est pourquoi, en lisant le mémoire**) où le célèbre physicien

*) En traitant du problème de la brachistochrone (Leçons de calc. des var. p. 231) nous avons donné un autre exemple d'une recherche semblable.

**) Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur, Série X (dans les Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, T. XXXVII).

vient de rendre compte des résultats obtenus par les géomètres au sujet de la théorie de ces figures, et où il cherche à faire soigneusement la part de chacun, j'ai été un peu étonné de ne voir aucune mention faite du théorème général que je viens de signaler. En traitant de la stabilité d'un caténoïde laminaire réalisé au moyen du liquide glycérique, M. Plateau se contente, en effet, de citer un calcul par lequel M. Goldschmidt a déterminé le plus grand écartement possible entre les deux bases du caténoïde, lorsqu'elles sont égales. Mais il ne dit rien de la stabilité d'un caténoïde dont les bases sont inégales, hors du cas extrême où l'une des bases coïncide avec le cercle de gorge, dans lequel il trouve (Série XI, No. 26) que la figure n'a point de limite de stabilité, c'est-à-dire que la seconde base peut s'éloigner (en s'agrandissant convenablement) aussi loin de la première qu'on le veut, sans que la figure tende à s'altérer spontanément.

Cette omission, sans doute involontaire, m'engage à revenir encore une fois sur le théorème déjà énoncé, pour en tirer des formules générales et des nombres exacts relatifs à la limite de stabilité d'un caténoïde liquide à bases quelconques. Les considérations employées dans le calcul des variations étant nécessairement un peu abstraites, on nous saura gré de les laisser de côté, pour le moment, et de montrer qu'on arrive au même résultat par le seul emploi de la méthode ordinaire des maxima, en cherchant directement le plus grand écartement possible des deux bases d'un caténoïde, lorsque ces bases sont données arbitrairement. Nous commençons par résoudre ce dernier problème.

Soit

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

l'équation d'une chaînette rapportée à un système de coordonnées rectangulaires, où la directrice est prise pour axe des x et l'axe des y passe par le sommet de la courbe. On en déduit successivement

$$\frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a} = \pm\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a} = e^{\pm\frac{x}{a}}$$

et par suite

$$\pm\frac{x}{a} = \log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}.$$

Dans toutes ces formules il faut prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que l'abscisse x est positive ou négative.

Soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées de deux points A et B

pris sur la chaînette des deux côtés du sommet et désignons par $2l$ la partie de l'axe des x comprise entre les ordonnées de ces points; on aura $2l = x_2 - x_1$, ou en substituant les valeurs de x_1 et x_2 d'après la formule précédente,

$$(1)\qquad \frac{2l}{a} = \log \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - a^2}}{a} + \log \frac{y_2 + \sqrt{y_2^2 - a^2}}{a}.$$

Si les ordonnées y_1 et y_2 sont données et qu'on fasse varier le paramètre a, la longueur l deviendra fonction de a et l'on pourra demander quelle est la valeur de a pour laquelle l devient maximum. Pour la déterminer, nous différentions l'équation (1), en regardant a et l comme seules variables, et dans le résultat nous faisons la dérivée

$$\frac{dl}{da} = 0;$$

nous trouvons ainsi la condition

$$(2)\qquad \frac{2l}{a} = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 - a^2}} + \frac{y_2}{\sqrt{y_2^2 - a^2}}.$$

Or il est facile de voir que

$$\frac{ay}{\sqrt{y^2 - a^2}}$$

est l'expression générale de la sous-tangente; cette condition exprime donc que la somme des sous-tangentes aux points A et B est égale à la portion de l'axe des x comprise entre ces points, c'est-à-dire que les tangentes aux extrémités de l'arc vont se couper en un point de la directrice.

La valeur de $2l$ déterminée par les équations (1) et (2) est la plus grande hauteur que puisse avoir un caténoïde dont les bases ont les rayons y_1 et y_2. Mais elle représente aussi, nous le savons par le calcul des variations, la limite à laquelle le caténoïde cesse d'être une surface minima, ou sa limite de stabilité lorsqu'il est réalisé par une lame liquide. Ainsi le caténoïde laminaire ne cesse d'être stable que lorsqu'il cesse d'être géométriquement possible par suite de l'éloignement des bases.

Nous allons maintenant développer les formules nécessaires pour calculer la hauteur $2l$ du caténoïde limite, lorsque les rayons y_1, y_2 des deux bases sont donnés. Si l'on fait

$$(3)\qquad \frac{y_1}{a} = \frac{1}{\sin\varphi_1}, \quad \frac{y_2}{a} = \frac{1}{\sin\varphi_2},$$

les équations (2) et (1) deviennent simplement

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{2l}{a} &= \frac{1}{\cos\varphi_1} + \frac{1}{\cos\varphi_2}, \\ e^{\frac{2l}{a}} &= \cot\frac{\varphi_1}{2}\cot\frac{\varphi_2}{2}. \end{aligned}$$

Admettons que $y_2 < y_1$, ou $\sin\varphi_2 > \sin\varphi_1$, et posons, pour abréger,

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = u,$$

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = v;$$

nous aurons $\varphi_1 = u - v$, $\varphi_2 = u + v$, et la première équation (4) deviendra

$$\frac{l}{a} = \frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2}{2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2} = \frac{\cos u \cos v}{\cos^2 u \cos^2 v - \sin^2 u \sin^2 v},$$

ou bien

$$(5) \qquad \cos u \cos v = \frac{l}{a}\left(\cos^2 u + \cos^2 v - 1\right).$$

La seconde équation (4) se transforme de la manière suivante:

$$\frac{\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2}}{e^{\frac{l}{a}}} = \frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}}{e^{-\frac{l}{a}}} = \frac{\cos u}{e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}} = \frac{\cos v}{e^{\frac{l}{a}} + e^{-\frac{l}{a}}};$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{\cos u}{\cos v} = \frac{e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}}{e^{\frac{l}{a}} + e^{-\frac{l}{a}}} = \cos\alpha,$$

en faisant, pour abréger,

$$(7) \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{l}{a}}.$$

Les équations (5) et (6), combinées tour à tour par multiplication et par division, donnent

$$\cos^2 u = \frac{l}{a}\cos\alpha\,(\cos^2 u + \cos^2 v - 1),$$

$$\cos^2 v = \frac{l}{a}\sec\alpha\,(\cos^2 u + \cos^2 v - 1),$$

et ces formules peuvent s'écrire

$$\frac{\cos^2 u}{\frac{l}{a}\cos\alpha} = \frac{\cos^2 v}{\frac{l}{a}\sec\alpha} = \frac{\cos^2 u + \cos^2 v - 1}{1}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 u}{\frac{l}{a}\sec\alpha - 1} = \frac{1 - \cos^2 v}{\frac{l}{a}\cos\alpha - 1},$$

d'où il résulte immédiatement

$$\tang^2 u = \frac{1 - \cos^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\frac{l}{a}\sec\alpha - 1}{\frac{l}{a}\cos\alpha},$$

$$\tang^2 v = \frac{1 - \cos^2 v}{\cos^2 v} = \frac{\frac{l}{a}\cos\alpha - 1}{\frac{l}{a}\sec\alpha},$$

ou en restituant les valeurs de u et v,

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
\operatorname{tang}\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} &= \sqrt{\frac{\frac{l}{a}\sec\alpha-1}{\frac{l}{a}\cos\alpha}}\,,\\
\operatorname{tang}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} &= \sqrt{\frac{\frac{l}{a}\cos\alpha-1}{\frac{l}{a}\sec\alpha}}\,.
\end{aligned}
$$

Ajoutons que si l'on fait encore

$$m=\frac{y_2}{y_1}=\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}\,,$$

on trouvera sans peine

$$
(9)\qquad \frac{1+m}{1-m}=\frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}=\sec\alpha\sqrt{\frac{\frac{l}{a}\sec\alpha-1}{\frac{l}{a}\cos\alpha-1}}\,.
$$

Ces formules sont assez commodes, lorsqu'il s'agit de calculer les valeurs de $\frac{y_1}{a}$ et $\frac{y_2}{a}$ correspondant à une valeur donnée de $\frac{l}{a}$. Par la formule (7) on évalue d'abord l'angle auxiliaire α, puis φ_1 et φ_2 par les formules (8), et enfin $\frac{y_1}{a}$ et $\frac{y_2}{a}$ par les équations (3). Des résultats ainsi obtenus on peut déduire les valeurs y_2 et l_2 exprimées en y_1 comme unité. Mais si l'on se donne au contraire les valeurs de y_2 et y_1, ou leur rapport m, et qu'on veuille calculer la valeur correspondante de l, on est obligé de procéder par des approximations successives. Il convient alors de déterminer d'abord par les équations (7) et (9) la valeur de $\frac{l}{a}$ de manière que la quantité $\frac{1+m}{1-m}$ reçoive la valeur qu'elle doit avoir. Ce calcul indirect est nécessairement un peu laborieux, parce qu'il exige des tâtonnements plus ou moins nombreux, avant qu'on puisse s'aider par des interpolations. De la quantité $\frac{l}{a}$ on déduit ensuite, comme nous l'avons dit, les valeurs de $\frac{y_1}{a}$ et $\frac{y_2}{a}$.

J'ai effectué ce calcul pour les dixièmes de m depuis $m=1$ jusqu'à $m=0$. Les résultats se trouvent consignés dans le tableau suivant. En fait d'explication, j'ajouterai encore que la quantité m, qui sert d'argument, n'est autre chose que le rapport des diamètres des deux bases du caténoïde limite. Les rapports $\frac{y_1}{a}$, $\frac{y_2}{a}$, $\frac{l}{a}$, $\frac{x_2}{2a}$, qui figurent à la tête des colonnes suivantes, représentent, en d'autres termes, les diamètres des deux bases, la hauteur du caténoïde et la distance de la plus petite base au cercle de gorge, le diamètre de ce cercle étant pris pour unité.

$m = \frac{y_2}{y_1}$	$\frac{y_1}{a}$	$\frac{y_2}{a}$	$\frac{l}{a}$	$\frac{x_2}{2a}$
1,0	1,81017	1,81017	1,19968	0,59984
0,9	1,91158	1,72042	1,20114	0,56897
0,8	2,04043	1,63234	1,20622	0,53622
0,7	2,20890	1,54622	1,21631	0,50134
0,6	2,43733	1,46240	1,23351	0,46400
0,5	2,76251	1,38125	1,26120	0,42381
0,4	3,25806	1,30323	1,30508	0,38015
0,3	4,09590	1,22877	1,37602	0,33207
0,2	5,79109	1,15822	1,49865	0,27768
0,1	10,91075	1,09107	1,75220	0,21181
0,0	∞	1,00000	∞	0,00000

L'aspect de ce tableau donne une idée de la variation des bases et de la hauteur d'un caténoïde limite, lorsque le paramètre a et par suite la cercle de gorge restent invariables. On voit en particulier qu'à mesure que l'une des bases s'approche du cercle de gorge, l'autre s'en éloigne indéfiniment, ainsi que M. Plateau l'avait déjà remarqué, et qu'en même temps les dimensions de celle-ci croissent avec la distance des bases, mais beaucoup plus rapidement.

Mais si l'on veut soumettre les résultats du calcul à une vérification expérimentale, il vaut mieux de considérer l'une des bases comme fixe et le caténoïde même, ou son paramètre a, comme variable avec la seconde base. Le tableau suivant est construit sur ce principe. Nous y supposons le caténoïde vertical et le diamètre de la base inférieure égal à l'unité.

Tableau des dimensions d'un caténoïde limite.

(Diamètre de la base inférieure = 1).

Diamètre de la base supérieure	Hauteur du caténoïde	Diamètre du cercle de gorge	Distance du cercle de gorge à la base sup.
1,0	0,66274	0,55243	0,33137
0,9	0,62835	0,52313	0,29765
0,8	0,59116	0,49009	0,26280
0,7	0,55064	0,45271	0,22696
0,6	0,50609	0,41028	0,19037
0,5	0,45654	0,36199	0,15341
0,4	0,40057	0,30693	0,11668
0,3	0,33595	0,24415	0,08107
0,2	0,25878	0,17268	0,04795
0,1	0,16059	0,09165	0,01941
0,0	0,00000	0,00000	0,00000

En terminant ce petit travail, j'ose exprimer le désir que M. Plateau veuille bien vérifier, par ces expériences délicates auxquelles il a su donner un si haut degré de précision, quelques-uns des nombres contenus dans ce tableau. Ce serait une confirmation importante à la fois de notre analyse et de sa théorie de l'équilibre des lames liquides.

Ueber gewisse Eigenschaften der Differentialgleichungen der Dynamik.

Von R. Radau in Paris.

Die Gleichungen, deren Integration die Aufgabe der Dynamik bildet, lassen bekanntlich von vornherein gewisse Vereinfachungen zu, die auf ihrer besonderen Form beruhen.

Da erstlich die Kräfte im Allgemeinen die Zeit nicht explicite enthalten, so kann man durch Fortschaffung von dt die $6n$ Gleichungen erster Ordnung, welche die Bewegung von n Punkten darstellen, auf $6n-1$ reduciren. Die Zeit wird dann nachträglich durch eine Quadratur gefunden. Sind die Kräfte homogene Functionen der Coordinaten von der Dimension ε, so kann man ausser der Zeit t noch eine zweite Variable eliminiren, nämlich die absolute *Längeneinheit*. Dies lässt sich folgendermassen einsehen. Bezeichnen wir durch p eine homogene Function der ersten Dimension (z. B. eine Entfernung oder eine der Coordinaten), und führen statt der Coordinaten $x, y, \ldots$ die Verhältnisse $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \ldots$ ein, indem wir $x = p\xi$, $y = p\eta, \ldots\ldots$ setzen, so wird offenbar $p = f(x, y, \ldots) = p \cdot f(\xi, \eta, \ldots)$, also $f(\xi, \eta, \ldots) = 1$. Wir haben somit eine endliche Gleichung zwischen den neuen Veränderlichen $\xi, \eta, \ldots$, wodurch die Anzahl derselben um Eins vermindert wird; dazu kommt aber die Längeneinheit p. Um nun p aus den Differentialgleichungen herauszuschaffen, führen wir noch statt der Geschwindigkeiten $x', y', \ldots$ die Grössen $\xi', \eta', \ldots$ ein, indem wir $x' = p^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \xi'$, $y' = p^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \eta', \ldots\ldots$ setzen, und statt t die fictive Zeit τ, indem wir $dt = p^{\frac{1-\varepsilon}{2}} d\tau$ setzen. Die Differentialquotienten $\frac{d\xi}{d\tau}, \frac{d\xi'}{d\tau}, \ldots$ hängen dann lediglich von den Variabeln $\xi, \xi', \ldots$ ab, und die Anzahl der Gleichungen wird durch Fortschaffung des Nenners $d\tau$ auf $6n-2$ reducirt. Für den Fall der Natur haben wir $\varepsilon = -2$, daher $\xi' = x'\sqrt{p}, \ldots$ und $dt = p\sqrt{p} \cdot d\tau$. Die Differentialgleichungen enthalten jetzt nur noch Winkelgrössen und reducirte

Geschwindigkeiten, man büsst aber dadurch ein Integral ein. Bedeutet nämlich Φ eine Function der Grössen ξ, ξ', ..., H die Constante der lebendigen Kraft, K die Constante der Flächensätze, so erscheint der Satz der lebendigen Kraft jetzt unter der Form $\Phi = H \cdot p^{1+\varepsilon}$, und ein Flächensatz unter der Form $\Phi_1 = K^2 \cdot p^{3+\varepsilon}$, so dass erst die Combination $H^{3+\varepsilon} \cdot K^{-2-2\varepsilon}$ von p unabhängig wird. Einzeln genommen, liefert jedes dieser Integrale den Werth von p in den Variabeln ξ, ξ', ... ausgedrückt. Für $\varepsilon = -2$ wird $H = p \cdot \Phi$ und $K^2 = \frac{1}{p}\Phi_1$, also $HK^2 = \Phi_2$.

Hängen die Kräfte und die Bedingungen nur von den gegenseitigen Entfernungen der Punkte ab, so können wir von der absoluten Lage des Systems im Raume absehen und uns darauf beschränken, seine Configuration zu betrachten. Vorerst dürfen wir *den Ursprung der Coordinaten in einen Punkt des Systems*, z. B. in einen der Massenpunkte oder in den Schwerpunkt verlegen (im letzteren Falle sind die Differentialgleichungen genau dieselben, als ob der Ursprung fest wäre). Dadurch, dass es sich jetzt nur um relative Bewegungen handelt, wird die Anzahl der Gleichungen um sechs vermindert.

Wir dürfen ferner *Ebenen des Systems als Coordinatenebenen benutzen*, also die Drehung des Systems um den Ursprung bei Seite lassen. Um dies einzusehen, erinnern wir uns an die Transformationsgleichungen für bewegliche Coordinatenaxen. Nennen wir x, y, z die beweglichen Coordinaten, x', y', z' ihre Differentialquotienten nach der Zeit, ξ, η, ζ die Geschwindigkeiten, X, Y, Z die Beschleunigungen nach den drei Axen, endlich x^0, y^0, z^0 die Rotationen der Axen, so ist

$$x' = \xi + yz^0 - zy^0, \quad y' = \eta + zx^0 - xz^0, \quad z' = \zeta + xy^0 - yx^0,$$
$$\xi' = X + \eta z^0 - \zeta y^0, \quad \eta' = Y + \zeta x^0 - \xi z^0, \quad \zeta' = Z + \xi y^0 - \eta x^0.$$

Die Kräfte X, Y, Z hängen hier nur von den beweglichen Coordinaten ab; eliminiren wir also die drei Grössen x^0, y^0, z^0, so haben wir $6n$ Differentialgleichungen zwischen den $3n$ Coordinaten x, y, z und den $3n$ Geschwindigkeiten ξ, η, ζ eines Systems von n Punkten, oder eigentlich blos $6n - 6$, da wir den Ursprung in einen der Massenpunkte verlegen und durch x, ξ, X, ... die *relativen* Coordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bezeichnen können. Es kommt also blos darauf an, die Rotationen zu eliminiren. Nun werden aber die beweglichen Axen durch drei Gleichungen von der Form $f(x, y, z) = 0$ bestimmt, und wenn wir dieselben differentiiren und für x', y', z' ihre obigen Werthe einsetzen, erhalten wir drei Gleichungen, mit deren Hülfe sich x^0, y^0, z^0 durch die Grössen x, y, z, ξ, η, ζ ausdrücken lassen. Wir können also x^0, y^0, z^0 eliminiren. Ausserdem aber gestatten uns die Gleichungen der Axen noch, drei Coor-

dinaten zu eliminiren, wodurch die Anzahl der Variabeln auf $6n - 9$ sinkt. Eliminiren wir auch dt und die Längeneinheit p, so bleiben nur $6n - 11$ Gleichungen übrig.

Die Bewegungsgleichungen eines freien Systems, in welchem die Kräfte homogene Functionen der relativen Coordinaten sind, lassen sich also *a priori*, und ohne Benutzung eines Integrals, um elf vermindern. Das Problem der drei Körper wird dadurch auf sieben Gleichungen erster Ordnung gebracht. Nehmen wir z. B. den Ursprung im Punkte m_0, legen die x, y Ebene durch m_1, m_2, und die x Axe durch m_1, so haben wir $y_1 = z_1 = z_2 = 0$, wodurch drei Coordinaten fortfallen. Um die Rotationen zu eliminiren, haben wir

$$\eta_1 - x_1 z^0 = 0 \quad , \quad \zeta_1 + x_1 y^0 = 0 \quad , \quad \zeta_2 + x_2 y^0 - y_2 x^0 = 0,$$

woraus

$$z^0 = \frac{\eta_1}{x_1} \; , \quad y^0 = -\frac{\zeta_1}{x_1} \; , \quad x^0 = \frac{x_1 \zeta_2 - x_2 \zeta_1}{x_1 y_2}$$

folgt. Setzen wir diese Werthe in die Differentialgleichungen, so enthalten dieselben nur noch die neun Veränderlichen

$$x_1, \; x_2, \; y_2, \; \xi_1, \; \eta_1, \; \zeta_1, \; \xi_2, \; \eta_2, \; \zeta_2.$$

Führen wir jetzt statt derselben die acht Veränderlichen

$$\frac{x_2}{x_1}, \; \frac{y_2}{x_1}, \; \sqrt{x_1}\,\xi_1, \; \sqrt{x_1}\,\eta_1, \; \sqrt{x_1}\,\zeta_1, \; \sqrt{x_1}\,\xi_2, \; \sqrt{x_1}\,\eta_2, \; \sqrt{x_1}\,\zeta_2,$$

und statt dt die Grösse

$$d\tau = \frac{dt}{x_1 \sqrt{x_1}}$$

ein, so hängen die Differentialquotienten der acht Veränderlichen, nach $d\tau$ genommen, blos von denselben acht Grössen ab; wenn wir also den Nenner $d\tau$ fortschaffen, so bleiben sieben Gleichungen erster Ordnung übrig. Von diesen Gleichungen ist nur ein Integral bekannt ($HK^2 = \text{const.}$).

Die Sache lässt sich auch folgendermassen auffassen. Sei r die Entfernung eines Planeten (m) von der Sonne (m_0), und f seine Arealgeschwindigkeit, so sind r' und $\frac{f}{r}$ die Componenten der relativen Geschwindigkeit, parallel und senkrecht zum Radiusvector; in der Richtung der Normale zur Bahn ist die Geschwindigkeit Null. Betrachten wir diese drei Richtungen als bewegliche Axen, so sind die zugehörigen Rotationen r^0, Null und $\frac{f}{r^2}$. Nennen wir R, F, N die entsprechenden relativen Beschleunigungen, so folgt aus unsern Formeln, dass

$$r'' = R + \frac{f^2}{r^3} \quad , \quad f' = rF \quad , \quad r^0 f = rN.$$

Die Producte rF, rN sind die Drehungsmomente der Störungskräfte, parallel und senkrecht zu der Bahn geschätzt; sie sind für jeden störenden Planeten (m_1) proportional mit den entsprechenden

Projectionen des Dreiecks Δ, welches derselbe mit m und m_0 bildet. Sei also η die Neigung dieses Dreiecks gegen die Bahn von m, sei ϱ die Entfernung zwischen m und m_1, ferner r_1 der Radiusvector von m_1, so wird

$$f' = \Sigma\, m_1 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \Delta \cos \eta \quad , \quad r^0 f = \Sigma\, m_1 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \Delta \sin \eta .$$

Bezeichnen wir noch mit w, w_1 die Winkelabstände der Planeten m, m_1 vom Durchschnitt ihrer Bahnen, mit λ die gegenseitige Neigung dieser Bahnen, so ist

$$\Delta \sin \eta = r r_1 \sin w_1 \sin \lambda \;,\; \Delta \cos \eta = r r_1 (\sin w \cos w_1 - \cos w \sin w_1 \cos \lambda).$$

Ferner wird

$$\lambda' = r^0 \cos w - r_1^0 \cos w_1 \quad \text{und} \quad w' = \frac{f}{r^2} + \frac{r_1^0 \sin w_1 - r_0 \sin w \cos \lambda}{\sin \lambda} .$$

Hiernach haben wir für die Grössen r, r', f, w, λ Differentialgleichungen erster Ordnung, wo rechts keine neue Unbekannte vorkommt. Dadurch können die Positionen und Geschwindigkeiten aller Planeten in Bezug auf die Bahn des ersten bestimmt werden, und es sind dazu (wenn im Ganzen n Körper vorhanden sind) $6n - 9$ Gleichungen erforderlich. Das Problem der drei Körper kommt also wieder auf 9 Gleichungen erster Ordnung zurück, die wir auf sieben bringen können, wenn wir statt der sechs Veränderlichen r, r_1, r', r_1', f, f_1 die fünf folgenden:

$$\frac{r_1}{r} \;,\; r'\sqrt{r} \;,\; r_1'\sqrt{r} \;,\; \frac{f}{\sqrt{r}} \;,\; \frac{f_1}{\sqrt{r}}$$

einführen, zu denen noch w, w_1 und λ hinzukommen. Bedeutet daher Φ eine Function der acht Winkelgrössen und reducirten Geschwindigkeiten $w, w_1, \lambda, \frac{r_1}{r}, \ldots$, so muss es sieben Integrale von der Form $\Phi = \text{const.}$ geben, und es genügen dieselben der partiellen Differentialgleichung $\frac{d\Phi}{d\tau} = 0$, wo $d\tau = \frac{dt}{r\sqrt{r}}$. Die Form $r \cdot \Phi = \text{const.}$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d \log \Phi}{d\tau} + r'\sqrt{r} = 0,$$

welche wieder dieselben acht Variabeln enthält, es entsprechen dieser Form also ebenfalls sieben Integrale. Zwei davon kennen wir (das Integral der lebendigen Kraft, $H = \text{const.}$, und einen Flächensatz, $K^2 = \text{const.}$); 5 bleiben unbekannt. Hierzu kommt ein unbekanntes Integral der Form $\Phi = \text{const.}$ (die 6 übrigen dieser Form lassen sich aus der Form $r\Phi = \text{const.}$ ableiten). Zwei Flächensätze und zwei Quadraturen, von denen sogleich die Rede sein wird, vervollständigen die zwölf Integrale, welche das Problem erfordert, wenn wir blos die Bewegung zweier Punkte in Bezug auf den dritten betrachten. Diese Classification der Integrale ist im Wesentlichen die von Herrn Bertrand gegebene.

Denken wir uns nun die Gleichungen der relativen Bewegung integrirt, so liefert das *Princip des Schwerpunkts* noch drei erste und drei zweite Integrale, aus welchen sich die geradlinige Bahn dieses Punktes als Function der Zeit ergiebt. Dadurch wird die Translation des Systems im Raume bestimmt. Die *Flächensätze* in ihrer gewöhnlichen Form sagen aus, dass die Arealbewegung des Systems um drei feste Axen constant ist. Ihre Quadratsumme ($K^2 =$ const.) enthält nur die Elemente der relativen Bewegung, ohne alle Beziehung auf feste Axen. Einzeln genommen, bestimmen sie die Lage des Systems in Bezug auf seinen *Pol*, d. h. in Bezug auf die Normale zu der sogenannten *unveränderlichen Ebene.* Denken wir uns nämlich K als eine Linie von bestimmter Länge auf diese Normale aufgetragen, so ist die Arealbewegung um eine der Coordinatenaxen gleich der Projection von K auf dieselbe Axe. Kennen wir nun die Arealbewegung, so ergiebt sich daraus die Projection von K, also der Winkel, welchen die bewegliche Coordinatenaxe mit K, d. h. mit dem Pol des Systems bildet. Nennen wir wieder ξ, η, ζ die Geschwindigkeiten nach den Axen der x, y, z, ferner I die Neigung der z Axe gegen den Pol und φ den Winkel zwischen der x Achse und dem Durchschnitt der x, y Ebene mit der unveränderlichen Ebene, so lassen die Flächensätze sich schreiben

$$\Sigma m\,(x\eta - y\xi) = K \cos I \quad , \quad \Sigma m\,(z\xi - x\zeta) = K \sin I \cos \varphi,$$
$$\Sigma m\,(y\zeta - z\eta) = K \sin I \sin \varphi;$$

man findet also I und φ, wenn die Grössen x, y, z, ξ, η, ζ, ... gegeben sind. Die Länge Ω der Knotenlinie, d. h. der Abstand des eben erwähnten Durchschnitts von einer festen Geraden in der unveränderlichen Ebene, ergiebt sich schliesslich durch eine Quadratur. Wir können nämlich, wie wir sahen, die Rotationen x^0, y^0, z^0 durch die Geschwindigkeiten ausdrücken, und wir haben dann

$$x^0 \sin \varphi + y^0 \cos \varphi = \Omega' \sin I,$$

woraus Ω' folgt. Eine letzte Quadratur giebt die Zeit als Function der Coordinaten.

Wenn die Polaraxe *feste Centra* enthält, so gilt das Princip des Schwerpunkts nicht mehr, und wir haben nur *einen* Flächensatz. Nehmen wir jetzt die Polaraxe zur z Axe und bestimmen die Meridianebenen der beweglichen x Axe und y Axe durch eine Gleichung $f(x, y) = 0$, so können wir wieder mit Hülfe dieser Gleichung eine Coordinate, und mit Hülfe der Gleichung $f' = 0$ eine Rotation eliminiren. Legen wir z. B. den Meridian der x Axe durch den Punkt m_1, indem wir $y_1 = 0$ setzen, so wird $z^0 = \frac{\eta_1}{x_1}$. Die Differentialgleichungen sind in diesem Fall:

$$x' = \xi + y z^0 \quad , \quad y' = \eta - x z^0 \quad , \quad z' = \zeta ,$$
$$\xi' = X + \eta z^0 \quad , \quad \eta' = Y - \xi z^0 \quad , \quad \zeta' = Z ,$$

und wenn wir für z^0 seinen Werth setzen, so enthalten sie nur $6n - 1$ Veränderliche, da y_1 fortfällt. Eliminiren wir noch η_1 durch den Flächensatz, $\Sigma m\,(x\eta - y\xi) = K$, so bleiben nur $6n - 2$ Gleichungen übrig. Der Winkel Ω, welchen der bewegliche Meridian mit einem festen macht, wird durch eine Quadratur gefunden, denn es ist $\Omega' = z^0$.

Wir können also immer (was schon Jacobi bemerkt hat), durch *einen* Flächensatz *zwei* Variable eliminiren. Drei Flächensätze erlauben uns daher, vier Variable fortzuschaffen. Behalten wir nämlich die Polaraxe als z Achse bei, so kommen zu dem vorstehenden Flächensatz noch die beiden folgenden:

$$\Sigma m\,(y\zeta - z\eta) = 0 \quad , \quad \Sigma m\,(z\xi - x\zeta) = 0 ,$$

durch welche die Anzahl der Variabeln auf $6n - 4$ reducirt wird. Gilt ausserdem der Satz von der lebendigen Kraft, und schaffen wir auch dt fort, so kommen wir auf $6n - 6$ Gleichungen der ersten Ordnung. Diese reduciren sich auf $6n - 12$, wenn wir blos die Differenzen der Coordinaten in Betracht zu ziehen haben, d. h. wenn das Princip des Schwerpunkts gilt. Die Bewegungsgleichungen eines freien Systems lassen sich also *mit Hülfe der bekannten Integrale* auf $6n - 12$ bringen, während sie ohne die Integrale auf $6n - 11$ kommen. Das Problem der drei Körper kommt in dieser Weise resp. auf *sechs* oder *sieben Gleichungen erster Ordnung* zurück. Eine Integration erspart ausserdem das Princip des letzten Multiplicators.

Führen wir drei bewegliche Axen und drei Rotationen x^0, y^0, z^0 ein, so hängen die Rotationen im Allgemeinen von fünf Bestimmungsstücken, nämlich von zwei Winkeln (I, φ) und drei Winkelgeschwindigkeiten (I', φ', Ω') ab. Die drei Flächensätze und die sechs Gleichungen der beweglichen Axen gestatten uns daher, ausser den fünf Grössen $I, \varphi, \ldots$ noch vier andere Variable zu eliminiren, wie dies nach dem Vorigen vorauszusehen war. Begnügen wir uns damit, die xy Ebene durch zwei Gleichungen $f = 0$, $f_1 = 0$, aus denen noch $f' = 0$, $f_1' = 0$ folgt, zu bestimmen, und nehmen die Knotenlinie zur x Achse, so wird einfach $x^0 = I'$, $y^0 = \Omega' \sin I$, $z^0 = \Omega' \cos I$; wir führen also nur die drei Unbekannten I, I', Ω' ein, haben aber auch nur vier Gleichungen ausser den drei Flächensätzen, das Resultat ist daher wieder die Elimination von vier Variabeln. Im Problem der drei Körper können wir die Körperebene zur xy Ebene nehmen, also $z_1 = z_2 = 0$, und $z_1' = z_2' = 0$ setzen, woraus $\zeta_1 = y_1 x^0 - x_1 y^0$ und $\zeta_2 = y_2 x^0 - x_2 y^0$ folgt. Hierdurch eliminiren sich die 4 Grössen z_1, z_2, ζ_1, ζ_2, es bleiben also für die relative Bewegung nur acht

Gleichungen erster Ordnung, aus denen noch die Rotationen durch die Flächensätze zu eliminiren sind. Es lässt sich aber Ω' (wie weiter unten gezeigt werden soll) durch die blossen Coordinaten x, y ausdrücken; ferner können wir x^0, y^0 durch die Coordinaten und den Winkel I, endlich $\cos I$ durch die Grösse x, y, ξ, η ausdrücken. Wir können daher x^0, y^0, z^0 durch die Flächensätze eliminiren, und zwar, wie man leicht übersieht, auf rationale Weise. So erhalten wir schliesslich acht Gleichungen erster Ordnung, die sich durch den Satz von der lebendigen Kraft und durch Fortschaffung von dt auf sechs reduciren.

II.

Ich will nun zeigen, wie sich die Eliminationen vereinfachen lassen. Beschäftigen wir uns zuerst mit dem Princip des Schwerpunkts, so ist hier die *orthogonale Substitution* von grossem Nutzen. Man bezeichnet mit diesem Namen eine lineare Transformation, deren Coefficienten so gewählt sind, dass

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$$

wird. Es folgt hieraus, dass die Productsumme der Coefficienten aus zwei Linien oder zwei Colonnen verschwindet, und dass die Quadratsumme der Coefficienten derselben Linie oder Colonne der Einheit gleich ist. Ferner wird $\Sigma x^2 = \Sigma \xi^2$; oder allgemeiner, wenn zwischen den Variabeln y und η *dieselbe* Substitution besteht, welche zwischen den Variabeln x und ξ stattfindet, so wird $\Sigma x_i y_i = \Sigma \xi_i \eta_i$, weil die Coefficienten der Producte $\xi_i \eta_k$ verschwinden. Da es sich hier um lineare Transformationen handelt, so können wir statt der Variabeln selber auch ihre Differentiale oder Variationen hinschreiben, ja sogar (für orthogonale Transformationen) die Charakteristik D_x oder D_ξ. Ferner können wir mehrere Gleichungen von der Form $\Sigma x^2 = \Sigma \xi^2$ zusammenaddiren. Hieraus ergiebt sich, dass allgemein durch eine orthogonale Substitution, welche gleichzeitig zwischen den Variabeln x und ξ, zwischen y und η, zwischen z und ζ,.. besteht, $\Sigma((x)) = \Sigma((\xi))$ wird, wo das Symbol $((x))$ irgend eine der quadratischen Formen

$$\begin{gathered}
x^2, xy, y^2 \quad , \quad x^2+y^2 \quad , \quad x^2+y^2+z^2 \quad , \quad xdx \quad , \quad xdy - ydx, \\
dx^2+dy^2+dz^2 \quad , \quad d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z, \; dx\,\delta x' - dx'\,\delta x, \\
xD_x \quad , \quad D_x D_x \quad , \quad D_x^2, \ldots\ldots.
\end{gathered}$$

bedeutet, und $((\xi))$ die entsprechende Form in den griechischen Buchstaben. Die Zeichen d, δ, D gehen hier nur als Factoren ein. Schreiben wir überall $\sqrt{m}\,x$ statt x, $\sqrt{\mu}\,\xi$ statt ξ, u. s. w., so wird die symbolische Formel $\Sigma m((x)) = \Sigma \mu((\xi))$. Wir wollen dann sagen: die orthogonale Substitution *besteht zwischen den Punkten* m und μ, d. h.

zwischen den Entfernungen beider Punktsysteme von einer beliebigen Ebene, zwischen ihren Coordinaten x und ξ, y und η, z und ζ. Eine solche Transformation lässt offenbar die Richtung der Coordinatenaxen unverändert, sie ersetzt die Punkte m durch die Punkte μ. Bedeuten die m gegebene, die μ fictive Massen, so sagt die Gleichung

$$\Sigma m\,((x)) = \Sigma \mu\,((\xi))$$

aus, dass quadratische Formen von der Art der *Trägheitsmomente*, der *lebendigen Kraft*, der *Arealgeschwindigkeiten* u. dgl. durch die orthogonale Substitution nicht verändert werden. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Flächensätze und der Satz von der lebendigen Kraft ihre einfache Form behalten, ferner, dass die *Polaraxe* und die *Hauptträgheitsaxen* in beiden Systemen dieselben sind. Weiter gehören zu den unveränderlichen Formen auch die *Variationen der Kräftefunction U und der Grösse $H = T - U$*, wenn wir dieselben durch die Bewegungsgleichungen ausdrücken, also

$$dt^2 . \delta U = \Sigma m\,(d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z)$$

und

$$dt\,.\,\delta H = \Sigma m\,(dx\,\delta x' - dx'\,\delta x)$$

setzen. Hieraus folgt aber, dass die *kanonische Form der Bewegungsgleichungen* durch die orthogonale Substitution nicht alterirt wird, und dass wir auch in den neuen Variabeln

$$\mu\,\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\,,\quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi'}\,,\quad \frac{d\xi'}{dt} = -\,\frac{\partial H}{\partial \xi}\,,$$

u. s. w. haben müssen. Endlich bleiben auch die Differentialparameter

$$\Delta^2 = \Sigma \frac{1}{m}\left(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2\right) \text{ und } \nabla = \Sigma\,\frac{1}{2m}\left(D_xD_x + D_yD_y + D_zD_z\right)$$

ungeändert, so dass die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung $\nabla W = U + h$ ebenfalls fortbesteht.

Der Vortheil, den wir aus der orthogonalen Transformation ziehen können, liegt nun darin, dass wir für die Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 des Punktes μ_0 die Coordinaten X, Y, Z des Schwerpunkts der Massen m wählen können. Nehmen wir zugleich $\mu_0 = M$, wo M die Summe der Massen m bedeutet, so reducirt sich

$$\sum_0^n \mu_i\,((\xi_i)) \quad \text{auf} \quad \sum_1^n \mu_i\,((\xi_i)) + M\,((X)),$$

der letzte Term ist jetzt aber Null oder eine Constante. Daraus folgt, dass die $n + 1$ Punkte m durch n Punkte μ ersetzt sind, ohne dass die Form der Differentialgleichungen oder diejenige der Integrale dadurch gelitten hätte. Man sieht leicht, dass die Grössen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ blos von den relativen Coordinaten $x - X$ oder von den Differenzen $x_i - x_h$ abhängen, so dass also X, Y, Z in der Kräftefunction gar

nicht vorkommen, und dass die Constanten H, K der lebendigen Kraft und der Flächensätze, ferner die Polaraxe, die Trägheitsaxen, u. s. w. für die Punkte μ dieselben sind, wie für die auf ihren Schwerpunkt bezogenen Punkte m. Die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung wird ebenfalls auf $3n$ Variable reducirt, ohne ihre Form zu verlieren. Hierin liegt das Princip der Transformation, welche Jacobi im Jahre 1842 für das Problem der drei Körper vorgeschlagen hat.

Um die Coefficienten der hier erforderlichen Substitution allgemein anzugeben, erinnern wir uns, dass nach Cayley die Coefficienten der orthogonalen Substitution vom Grade n sich aus einer Determinante $B = (b_{11}\, b_{22} \ldots b_{nn})$ ableiten lassen, deren Elemente blos den Bedingungen unterworfen sind, dass $b_{ii} = 1$ und $b_{ih} + b_{hi} = 0$ sein muss. Bedeutet β_{ih} den Coefficienten von b_{ih} in B, so sind die gesuchten orthogonalen Coefficienten:

$$\gamma_{ih} = \frac{2\beta_{ih}}{B}\ , \quad \gamma_{ii} = \frac{2\beta_{ii}}{B} - 1.$$

Aus diesen können wir aber die Coefficienten einer orthogonalen Substitution vom Grade $n+1$ ableiten, welche der speciellen Bedingung genügt, dass $\mu_0\, \xi_0 = \Sigma m x$ werden soll. Ziehen wir die Factoren $\sqrt{\mu}$ in die ξ hinein, da ja eben nur die Producte $\sqrt{\mu}\,\xi$ bestimmt werden, und setzen $m_0 = 1$, so sind die Transformationsgleichungen:

$$\sqrt{m_i}\,(x_i - X) = \sum_{h=1}^{h=n} c_{ih}\, \xi_h \quad , \quad \xi_i = \sum_{h=1}^{h=n} c_{hi} \sqrt{m_h}\,(x_h - x_0),$$

und die Coefficienten c bestimmen sich durch die Formeln

$$c_{0h} = -\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{p=1}^{p=n} \sqrt{m_p}\ \gamma_{ph} \quad , \quad c_{ih} = \gamma_{ih} + \frac{\sqrt{m_i}}{1+\sqrt{M}}\, c_{0h}\ ,$$

deren Ableitung ich an einem andern Orte gegeben habe*). Die Substitution für das Problem der drei Körper enthält also, wie die gewöhnliche binäre Substitution, nur eine willkürliche Grösse. Man kann derselben beiläufig die Form geben:

$$\sqrt{\frac{M m_0}{m_1 + m_2}}\,(x_0 - X) = \xi_1 \sin\beta_0 + \xi_2 \cos\beta_0,$$

$$\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}\,(x_1 - x_2) = \xi_1 \cos\beta_0 - \xi_2 \sin\beta_0,$$

woraus durch Vertauschung der Indices die übrigen Gleichungen folgen. Von den drei Constanten β_0, β_1, β_2 bleibt eine willkürlich, man kann z. B. $\beta_0 = 0$ setzen, aber die *Differenzen* der β werden durch die Gleichungen $\operatorname{tang}(\beta_1 - \beta_2) = \sqrt{\frac{M m_0}{m_1 m_2}}$, u. s. w. bestimmt.

*) *Annales de l' Ecole normale supérieure.* Décembre 1868.

Ohne von diesen allgemeinen Formeln auszugehen, kann man übrigens zwei specielle Transformationen angeben, welche die erwähnten Bedingungen erfüllen. Bezeichnen wir durch S die auf n Glieder reducirte Summe $\Sigma\mu((\xi))$, so ist, wie leicht zu beweisen:

$$S = \frac{1}{M}\sum_0^n m_i m_k((x_i - x_k)) = \sum_0^n m_i((x_i)) - M((X)) = \sum_0^n m_i((x_i - X)).$$

Für die Punkte m bedeutet also S die lebendige Kraft, die Arealbewegung, die Variation der Kräftefunction, *um den Schwerpunkt;* für die μ bedeutet S dieselben Grössen in Bezug auf den Anfangspunkt. Es lässt sich ferner S durch die *Differenzen* aller Coordinaten x ausdrücken. Hierauf folgt, dass wir von allen x eine gewisse Grösse abziehen können, d. h. dass wir den Ursprung veränderlich annehmen dürfen. Bestimmen wir ihn durch die Gleichung $\sqrt{m_0}x_0 \pm \sqrt{M}X = 0$, so hebt sich $m_0((x_0))$ gegen $M((X))$ fort, und es bleibt $S = \sum_1^n m_i((x_i))$. Ich nehme für $\sqrt{M}$ das obere Zeichen; dann ist der neue Ursprung der Schwerpunkt der Massen $\sqrt{m_0}$ und $\sqrt{M}$, die erstere im Punkte m_0, die letztere im Punkte M, d. h. im Schwerpunkt des Systemes gedacht. Sei wieder $m_0 = 1$, so wird

$$(1 + \sqrt{M})\, x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots\ldots = 0,$$

also:

$$x_i - x_0 = x_i + \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots\ldots}{1 + \sqrt{M}}.$$

Die Entfernungen der Punkte m_1, m_2, ... von m_0 lassen sich also durch die Coordinaten derselben n Punkte, bezogen auf den neuen Ursprung, ausdrücken. Die Kräftefunction und das Symbol S enthalten ebenfalls nur die Coordinaten x_1, x_2 ..., *der Punkt m_0 ist also ganz ausgeschlossen*, ohne dass dadurch die Bewegungsgleichungen oder die Integrale geändert wären. Ich nenne den neuen Ursprung einen *kanonischen Punkt*, und wir haben folgenden Satz. *In jedem freien System von $n+1$ Körpern giebt es $n+1$* (oder eigentlich $2n+2$) *Punkte, um welche sich je n Körper wie um feste Centra bewegen.* Die kanonischen Punkte findet man, wenn man den Punkten m_i die Massen $\sqrt{m_i}$, dem Punkte M die Masse $\pm\sqrt{M}$ beilegt, und zwischen dieser letzteren und jeder der vorigen den Schwerpunkt sucht. Bedeutet $m_0 = 1$ die Sonne, so ist für das Sonnensystem $\sqrt{M} = 1{,}0067$, es liegt also der kanonische Punkt beständig im Innern des Sonnenkörpers. Um diesen Punkt bewegen sich die Planeten, wie um ein fixes Centrum.

Eine andere Transformation des symbolischen Ausdrucks S erhält man so. Sei M_i die Summe der Massen m_0 bis m_i, und X_i die Coordinate ihres Schwerpunktes (also $X_0 = x_0$ und $M_0 = m_0$); dann ist, wie leicht bewiesen wird,

$$S = \sum_1^n m_i \frac{M_{i-1}}{M_i}((x_i - X_{i-1})).$$

Wir dürfen daher $\xi_i = x_i - X_{i-1}$ und $\mu_i = m_i \frac{M_{i-1}}{M_i}$ setzen. Das Symbol S reducirt sich also auf n Glieder, wenn wir den Körper m_1 auf m_0, den Körper m_2 auf den Schwerpunkt von m_1 und m_0, überhaupt jeden neu hinzukommenden auf den Schwerpunkt aller vorhergehenden beziehen. Dabei muss m_1 die Masse $\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}$, m_2 die Masse $\mu_2 = \frac{(m_0 + m_1) m_2}{m_0 + m_1 + m_2}$, u. s. w. erhalten. Ist m_0 die Sonne, so weichen μ_1, μ_2 nur sehr wenig von m_1, m_2 ab. Ist m_0 die Erde, m_1 der Mond und m_2 die Sonne, so weicht μ_1 wenig von m_1 ab, dagegen wird die Masse μ_2 der fingirten Sonne jetzt nicht nahezu $= m_2$, sondern nahezu m_0, d. h. gleich der Erdmasse.

Statt den Körper m_1 auf m_0 zu beziehen, kann man ihn natürlich ebenso wie m_2 auf den Schwerpunkt von m_1 und m_0 beziehen, indem man ihm die Masse $\mu_1 = \frac{m_0 + m_1}{m_0} m_1$ giebt, denn das Product $\mu_1 \xi_1^2$, worauf es allein ankommt, ist in beiden Fällen dasselbe. Dies ist eine bereits von Jacobi angegebene Umformung, die sich mit Vortheil auf die Mondtheorie anwenden lässt. Sei wieder $m_0 = 1$ die Erdmasse, und schreiben wir m, m_1 statt m_1, m_2, so wird $\mu = m\,(1 + m)$ die fictive Mondmasse, und $\mu_1 = \frac{m_1 (1 + m)}{1 + m + m_1}$ die fictive Sonnenmasse. Nennen wir endlich r, r_1 die Abstände des Mondes und der Sonne von dem Schwerpunkt der Erde und des Mondes, so wird:

$$U = \frac{1}{r}\,\frac{m}{1 + m} + \frac{m m_1}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2 r r_1 \sigma}} + \frac{m_1}{\sqrt{r_1^2 + m^2 r^2 + 2 m r r_1 \sigma}},$$

wo σ den Cosinus des Winkels (r, r_1) bedeutet. Die Entwickelungen der beiden Wurzelgrössen nach Potenzen des Verhältnisses $\frac{r}{r_1}$ unterscheiden sich nur durch Potenzen der Mondmasse m, wir erhalten daher:

$$U = \frac{1}{r}\,\frac{m}{1 + m} + \frac{m_1 (1 + m)}{r_1} + R,$$

und

$$R = m m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \left[A\,(1 + m) + A_1 \frac{r}{r_1} (1 - m^2) + A_2 \frac{r^2}{r_1^2} (1 + m^3) + \ldots \right],$$

wo A, A_1, A_2, ... die Coefficienten der gewöhnlichen Störungsfunction sind. Der Vortheil der neuen Störungsfunction besteht darin, dass die Knoten hier nicht mehr vorkommen, weil σ bloss von den Argumenten der Breiten und von der gegenseitigen Neigung der Bahnen abhängt; die Flächensätze zeigen nämlich, dass sich die Bahnen der Punkte μ, μ_1 beständig in der unveränderlichen Ebene schneiden. Hierauf beruht die werthvolle Arbeit von H. Weiler über die Mondtheorie. Ferner ist Folgendes zu bemerken: Nennen wir u, u_1 die Argumente der Breiten und f, f_1 die Arealgeschwindigkeiten, so können wir mit Hülfe der Flächensätze die Neigungen durch f, f_1 ausdrücken, und

$$\sigma = \cos u \cos u_1 + \sin u \sin u_1 \frac{K^2 - f^2 - f_1^2}{2 f f_1}$$

setzen. Sei noch $\gamma = \mu r'$, $\gamma_1 = \mu_1 r_1'$, so wird die lebendige Kraft

$$2T = \frac{1}{\mu}\left(\gamma^2 + \frac{f^2}{r^2}\right) + \frac{1}{\mu_1}\left(\gamma_1^2 + \frac{f_1^2}{r_1^2}\right),$$

und die Gleichungen der Bewegung lassen sich auf die Form bringen:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial f}, \quad \frac{df}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u}.$$

Setzen wir zuerst $R = 0$ und integriren durch zwei Ellipsen mit je vier willkührlichen Constanten: α (die reciproke grosse Axe), β (die Quadratwurzel aus dem Parameter), τ (die Zeit des Perigeums) und π (das Argument der Breite des Perigeums), so ist in der ersten Annäherung $f = \beta$, und die Variation der Constanten erhält man durch je vier Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \pi}, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \beta}.$$

Das Princip der lebendigen Kraft liefert das Integral

$$R + \alpha + \alpha_1 + H = 0.$$

Ich sehe hier von den numerischen Factoren ab, welche in die Constanten α, β eingehen.

III.

Wir wollen nun zu der Betrachtung der Flächensätze übergehen. Sei also ein System gegeben, welches durch Drehung um einen festen Pol sich nicht ändert. Wir können nach dem Vorigen die absoluten Geschwindigkeiten in der xy-Ebene durch $x' - y\Omega'$ und $y' + x\Omega'$ ausdrücken, wo Ω den Winkel zwischen dem Meridian der x Axe und einem festen Meridian bedeutet; die Geschwindigkeit längs der unbeweglichen Polaraxe ist z'. Also

$$2T = \Sigma m(x' - y\Omega')^2 + \Sigma m(y' + x\Omega')^2 + \Sigma m z'^2.$$

Der Meridian der x Axe bestimmt sich durch eine Gleichung $f = 0$, woraus noch $f' = 0$ folgt. Denken wir uns alle Bedingungsgleichungen berücksichtigt, und setzen:

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = p, \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = q, \quad \frac{\partial T}{\partial z'} = r; \quad \frac{\partial T}{\partial \Omega'} = K,$$

so liefert die Hamilton'sche Methode das kanonische System:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

. . . .

$$\frac{\partial \Omega}{dt} = \frac{\partial H}{\partial K}, \quad \frac{dK}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \Omega} = 0.$$

Die letzte dieser Gleichungen giebt ein Integral, $K = \text{const.}$; dies ist der Flächensatz. Dadurch sondert sich auch die vorletzte Gleichung von dem System ab, *sie hat nur noch die Bedeutung einer Quadratur,*

durch welche Ω nachträglich gefunden werden kann. Die Anzahl der Variabeln x, y, z, p, q, r ist aber durch die Gleichungen $f=0$, $f'=0$, *um zwei vermindert.* Sind diese Gleichungen noch nicht berücksichtigt, so addiren wir zu T den Ausdruck $\alpha f'$, und bestimmen den Multiplicator α so, dass eine der Grössen p, q, r identisch verschwindet. Wir haben jetzt:

$$p = m(x' - y\Omega') + \alpha f'_x,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$K = \Sigma\, m(xy' - x'y) + \Omega'\,\Sigma\, m(x^2 + y^2),$$

und hieraus:

$$2T = \Sigma \frac{1}{m}\left\{(p - \alpha f'_x)^2 + (q - \alpha f'_y)^2 + (r - \alpha f'_z)^2\right\},$$

wo α durch die Gleichung $K + \alpha\,\Sigma(xf'_y - yf'_x) = \Sigma(qx - py)$ gegeben ist. Wir können nun eine der Grössen p, q, r, z. B. q_1, gleich Null setzen, und die conjugirte Veränderliche y_1 durch die Gleichung des Meridians eliminiren. Wir können auch den Meridian durch den Punkt m_1 legen, also einfach $f = y_1 = 0$ setzen, wodurch wir

$$2T = \Sigma \frac{p^2 + q^2 + r^2}{m} + \frac{1}{m_1}\left(\frac{K - \Sigma(qx - py)}{x_1}\right)^2$$

erhalten. Die Variabeln y_1, q_1 fallen also ganz fort, sie sind durch den Flächensatz eliminirt.

Ich habe bei der Ableitung dieser Formel vorausgesetzt, dass T die oben angegebene einfache Form hat; dies ist erlaubt, wenn wir einen kanonischen Punkt zum Anfangspunkte nehmen, wodurch ein Massenpunkt ausgeschlossen wird. Wollen wir die Coordinaten auf den Schwerpunkt beziehen, so müssen wir erst einen der Punkte (m_0) eliminiren. Zu diesem Behuf addiren wir zu T ausser $\alpha f'$ noch $\beta_1\,\Sigma m x' + \beta_2\,\Sigma m y' + \beta_3\,\Sigma m z'$ und bestimmen β_1, β_2, β_3 so, dass die Grössen p_0, q_0, r_0 verschwinden. Dies können wir uns indessen ersparen, indem wir, wie gesagt, den Punkt m_0 von vornherein ausschliessen, so dass T nur die Punkte $m_1, \ldots . m_n$ enthält.

Ist das System ganz frei, so haben wir drei Flächensätze. Führen wir nun drei bewegliche Axen ein, so wird

$$2T = \Sigma m(x' + y^0 z - z^0 y)^2 + \Sigma m(y' + z^0 x - x^0 z)^2 + \Sigma m(z' + x^0 y - y^0 x)^2.$$

Die Flächensätze lassen sich schreiben:

$$\frac{\partial T}{\partial x^0} = Ka\,, \quad \frac{\partial T}{\partial y^0} = Kb\,, \quad \frac{\partial T}{\partial z^0} = Kc\,,$$

wo a, b, c die Richtungscosinus der Polaraxe sind. Die lebendige Kraft ist also eine homogene Function der Geschwindigkeiten x', y', z' und der drei Rotationen x^0, y^0, z^0. Eliminiren wir diese Variabeln mit Hülfe der linearen Gleichungen $\frac{\partial T}{\partial x'} = p, \ldots$ und der Flächensätze, so wird T eine homogene Function der Variabeln p, q, r, a, b, c. Nimmt man nun in bekannter Weise das vollständige Differential dT *vor* und *nach*

der Transformation, und vergleicht die beiden Ausdrücke, so ergiebt sich, bei Berücksichtigung der Lagrangischen Gleichungen $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial x}$, dass wieder $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \ldots\ldots$ wird. Für die Grössen a, b, c erhält man aus der Betrachtung von dT die Relationen $Kx^0 = \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right), \ldots\ldots$, also wegen der bekannten Gleichungen $a' = bz^0 - cy^0, \ldots\ldots$, die Differentialgleichungen

$$K\frac{\partial a}{\partial t} = b\left(\frac{\partial T}{\partial c}\right) - c\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right), \ldots.$$

Setzen wir aber

$$a = \sin I \sin \varphi, \quad b = \sin I \cos \varphi, \quad c = \cos I,$$

wo I die Neigung der xy Ebene und φ die Länge des Knotens in dieser Ebene bedeutet, so zeigt sich, dass φ und $\pi = Kc$ conjugirte Variable sind, also

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}.$$

Diese zwei Variabeln treten an die Stelle der sechs, welche durch die Gleichungen der Axen eliminirt werden, wir haben also die Zahl der Variabeln um vier verringert.

Die drei Rotationen sind übrigens

$$x^0 = \Omega' a + I' \cos \varphi, \quad y^0 = \Omega' b - I' \sin \varphi, \quad z^0 = \Omega' c + \varphi',$$

und die Flächensätze lassen sich auch schreiben:

$$\frac{\partial T}{\partial \Omega'} = K, \quad \frac{\partial T}{\partial I'} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = Kc = \pi, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Kc'.$$

Geht man von diesen Gleichungen aus, so findet man wieder das eben erwähnte kanonische System mit den Variabeln x, y, z, φ und p, q, r, π. Der Winkel Ω wird durch eine Quadratur gegeben, denn es ist $\Omega' = \frac{\partial H}{\partial K}$. Wir können auch $\varphi = 0$, also die Knotenlinie zur x Axe nehmen; dann wird nur die xy Ebene durch zwei Gleichungen bestimmt, wir haben nur 4 Variabeln zu eliminiren, es fallen dafür aber φ und π fort. Die Gleichung $\left(\frac{\partial T}{\partial I}\right) = -\frac{\partial T}{\partial I} = 0$, wo sich die Parenthese auf die transformirte lebendige Kraft bezieht, zeigt in diesem Falle, dass es gleichgültig ist, ob wir I *vor* oder *nach* der Differentiation in Bezug auf die Variabeln x, p, ... eliminiren. Es ist aber bequemer, dies *vorher* zu thun; dann wenden wir also die drei Flächensätze wie Bedingungsgleichungen an. Wählen wir z. B. im *Problem der drei Körper* die Körperebene zur xy Ebene, indem wir $z = z' = 0$ setzen, so enthält das letzte Glied von T blos Rotationen, aber keine Geschwindigkeiten, wir können dasselbe daher durch die Flächensätze transformiren, bevor wir nach x' und y' differentiiren. Es findet sich,

dass dieses Glied $= K\Omega' \sin^2 I$ wird. Dies ist die Componente der lebendigen Kraft senkrecht zur Körperebene; wir können sie wie eine Störungsfunction in Bezug auf die Bewegung in der Ebene ansehen. Ferner wird

$$\Omega' = \frac{K}{\mu^2}\,\frac{\Sigma\, m y^2}{4\Delta^2}, \quad \text{wo } \mu^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{M}, \quad \text{und } \frac{2\Delta}{M} = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{m_3} = \text{u. s. w.}$$

Die *Variation des Knotens* (oder die Drehung um die Polaraxe) ist, bis auf einen Factor, *gleich dem Trägheitsmoment der drei Körper um die Knotenlinie, dividirt durch das Quadrat des Dreiecks der drei Körper.* Wir haben jetzt

$$2T = \Sigma m(x' - y\Omega' \cos I)^2 + \Sigma m(y' + x\Omega' \cos I)^2 + K\Omega' \sin^2 I.$$

Differentiiren wir $T + \alpha\, \Sigma m x' + \beta\, \Sigma m y'$ nach x' und y', eliminiren die Multiplicatoren α, β und setzen für $K \cos I$ den Werth $\Sigma(qx - py)$, so ergiebt sich:

$$2T = \Sigma \frac{p^2 + q^2}{m} - \frac{(\Sigma p)^2 + (\Sigma q)^2}{\Sigma m} + K\Omega' - \frac{\Omega'}{K}\,[\Sigma(qx - py)]^2,$$

wo für Ω' der obige Werth einzusetzen ist. Ferner dürfen wir $p_0 = q_0 = 0$ setzen, so dass T nur noch vier kanonische Variable mit ihren Conjugirten enthält. Die Coordinaten sind hier auf den Schwerpunkt bezogen, wir können aber statt derselben die *relativen Coordinaten* der drei Körper einführen, weil zwischen beiden Systemen eine orthogonale Substitution besteht, wie aus der Gleichung

$$S = \Sigma\, m_i((x_i)) = \mu^2\, \Sigma \frac{1}{m_1}\,((x_2 - x_3))$$

hervorgeht. Wir können deshalb in allen quadratischen Formen von der Art der lebendigen Kraft u. s. w. die Grössen $m_i x_i$, $m_i y_i$, durch $\mu \xi_i$, $\mu \eta_i$ ersetzen, wo ξ, η die Differenzen der Coordinaten bedeuten. Führen wir endlich statt der rechtwinkligen Coordinaten Radienvectoren und Azimuthe ein, so können wir eine Menge anderer kanonischer Systeme bilden. Ich habe diesen Gegenstand ausführlicher in einer Arbeit behandelt, die im Maiheft des Liouville'schen Journals erschienen ist, ferner in einer Note, die in den Comptes-rendus der Pariser Akademie vom 21. Juni d. J. steht.

Ueber die Aetherbewegung in Krystallen.

(Nachtrag zu dem Aufsatze Seite 325 im I. Bande dieser Annalen.)

Von CARL NEUMANN in LEIPZIG.

An Stelle der in jenem Aufsatz (pag. 332) genannten Voraussetzungen mögen gegenwärtig folgende gewählt werden:

I. *Voraussetzung. Die ponderablen Moleciile des Krystalles haben auf die Bewegung des Aethers keine directe Einwirkung. Demgemäss ist:*

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_3 = 0, \quad \textit{mithin:} \quad \mathfrak{i}_1 = \mathfrak{i}_2 = \mathfrak{i}_3 = 1.$$

II. *Voraussetzung. Zwischen den Coefficienten* h_{11}, h_{22}, h_{33}, h_{23}, h_{31}, h_{12} *finden die Relationen statt:*

$$\begin{aligned} h_{22} + h_{33} &= 6 h_{23}, \\ h_{33} + h_{11} &= 6 h_{31}, \\ h_{11} + h_{22} &= 6 h_{12}. \end{aligned}$$

Demgemäss kann gesetzt werden:

$$\begin{aligned} h_{23} &= a, & h_{11} &= 3(b + c - a), \\ h_{31} &= b, & h_{22} &= 3(c + a - b), \\ h_{12} &= c, & h_{33} &= 3(a + b - c). \end{aligned}$$

Zur Abkürzung mag die Bezeichnung eingeführt werden:

$$\begin{aligned} p &= (b + c)\,\alpha^2 + (c + a)\,\beta^2 + (a + b)\,\gamma^2, \\ &= (a + b + c) - (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2). \end{aligned}$$

III. *Voraussetzung. Die Coefficienten* h_1, h_2, h_3 *stehen zu* h_{23}, h_{31}, h_{12} *in folgender Beziehung:*

$$h_1 - h_{23} = h_2 - h_{31} = h_3 - h_{12}.$$

Bezeichnet man also den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Differenzen mit g*, so kann (mit Rücksicht auf die bei der* II. *Voraussetzung eingeführte Bezeichnung) gesetzt werden:*

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{23} + g = a + g, \\ h_2 &= h_{31} + g = b + g, \\ h_3 &= h_{12} + g = c + g, \end{aligned}$$

Zur Abkürzung mag die Bezeichnung eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \overline{p} &= h_1\,\alpha^2 + h_2\,\beta^2 + h_3\,\gamma^2, \\ &= g + (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2). \end{aligned}$$

Dabei ist aufmerksam zu machen auf die Relation:

$$p + \overline{p} = g + (a + b + c),$$

welche augenblicklich sich ergiebt aus den für p und $\overline{p}$ soeben angegebenen Formeln.

Von diesen drei Voraussetzungen sind die beiden ersten identisch mit den damals genannten Voraussetzungen. Hingegen ist die dritte Voraussetzung von derjenigen, welche damals in dritter Stelle aufgeführt wurde, wesentlich verschieden.

An Stelle der Formeln (l. c. pag. 334) ergeben sich nun, bei Zugrundelegung der *gegenwärtigen* Voraussetzungen, folgende Formeln:

$$(1^a)\quad A : B : C = \frac{\alpha}{(g+b+c)-m^2} : \frac{\beta}{(g+c+a)-m^2} : \frac{\gamma}{(g+a+b)-m^2},$$

$$(1^b)\qquad 0 = \frac{\alpha^2}{(g+b+c)-m^2} + \frac{\beta^2}{(g+c+a)-m^2} + \frac{\gamma^2}{(g+a+b)-m^2},$$

$$(1^c)\qquad 0 = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

Zu diesen ist noch hinzuzufügen die Formel

$$0 = \mathfrak{i}_1 AA' + \mathfrak{i}_2 BB' + \mathfrak{i}_3 CC',$$

(l. c. pag. 331), welche mit Rücksicht auf unsere I. Voraussetzung folgende einfachere Gestalt annimmt:

$$(1^d)\qquad 0 = AA' + BB' + CC'.$$

Beachtet man, dass $(g + b + c)$, $(g + c + a)$, $(g + a + b)$ drei dem Krystall eigenthümliche *Constante* sind, ferner, dass m und m' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten derjenigen beiden ebenen Lichtwellen sind, welche in der Richtung α, β, γ sich fortpflanzen, und endlich, dass A, B, C und A', B', C' die Vibrationsrichtungen in diesen beiden Wellen bezeichnen, so erkennt man leicht, dass die durch die Formeln ($1^{a,\,b,\,c,\,d}$) ausgesprochenen Gesetze völlig identisch sind mit den Fresnel'schen Gesetzen, die Vibrationsrichtung in Fresnel's Sinn genommen.

In dem citirten Aufsatz (pag. 351) ist gezeigt worden, dass die I. und II. Voraussetzung unmittelbare Consequenzen sind der beiden zu Grunde gelegten Hypothesen (l. c. pag. 325), dass Gleiches aber nicht mehr behauptet werden könne von der *damaligen* III. Voraussetzung. Es soll nun untersucht werden, ob vielleicht die *gegenwärtige* III. Voraussetzung einer solchen Anforderung besser entspricht.

Die *gegenwärtige* III. Voraussetzung lautet:

$h_1 - h_{23} = h_2 - h_{31} = h_3 - h_{12}$, wo die Grössen h_1, h_2, h_3, h_{23}, h_{31}, h_{12} die Mittelwerthe gewisser periodischer Functionen vorstellen, welche mit H_1, H_2, H_3, H_{23}, H_{31}, H_{12} bezeichnet worden sind, und welche ausdrückbar sind durch folgende Formeln (l. c. pag. 347):

$$(2)\qquad \begin{aligned} H_1 &= K + \varkappa\sigma + 2(K+\varkappa)\mu, \\ H_2 &= K + \varkappa\sigma + 2(K+\varkappa)\nu, \\ H_3 &= K + \varkappa\sigma + 2(K+\varkappa)\pi, \end{aligned}$$

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
H_{23} &= \varkappa + \varkappa'\sigma + 2(\varkappa + \varkappa')\sigma - 2(\varkappa + \varkappa')\mu,\\
H_{31} &= \varkappa + \varkappa'\sigma + 2(\varkappa + \varkappa')\sigma - 2(\varkappa + \varkappa')\nu,\\
H_{12} &= \varkappa + \varkappa'\sigma + 2(\varkappa + \varkappa')\sigma - 2(\varkappa + \varkappa')\pi.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt sofort:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
H_1 - H_{23} &= \Theta + 2\mu\,(K + 2\varkappa + \varkappa'),\\
H_2 - H_{31} &= \Theta + 2\nu\,(K + 2\varkappa + \varkappa'),\\
H_3 - H_{12} &= \Theta + 2\pi\,(K + 2\varkappa + \varkappa'),
\end{aligned}
$$

wo Θ zur Abkürzung steht für $[K + \varkappa\sigma] - [\varkappa + \varkappa'\sigma + 2(\varkappa + \varkappa')\sigma]$. Aus diesen Formeln (4) ergiebt sich, dass die drei Functionen

$$H_1 - H_{23}\quad,\quad H_2 - H_{31}\quad,\quad H_3 - H_{12},$$

folglich auch die drei Mittelwerthe dieser Functionen

$$h_1 - h_{23}\quad,\quad h_2 - h_{31}\quad,\quad h_3 - h_{12}$$

unter einander identisch sein werden, sobald $K + 2\varkappa + \varkappa' = 0$ ist. Die *gegenwärtige* III. Voraussetzung wird also erfüllt sein, sobald die Grössen K, $\varkappa$, $\varkappa'$ der Bedingung Genüge leisten:

$$(5)\qquad K + 2\varkappa + \varkappa' = 0.$$

Jene Grössen K, $\varkappa$, $\varkappa'$ besitzen (l. c. pag. 346) folgende Bedeutungen:

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
3K &= Sm_1\,\varrho^2\,\varphi',\\
\frac{3\cdot 5}{2}\,\varkappa &= Sm_1\,\varrho^4\,\varphi'',\\
\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 2}\,\varkappa' &= Sm_1\,\varrho^6\,\varphi'''.
\end{aligned}
$$

Die Bedingung (5) wird daher erfüllt sein, sobald die Function φ der Gleichung Genüge leistet:

$$(7)\qquad \frac{\varrho^2}{3}\,\varphi' + \frac{4\varrho^4}{3\cdot 5}\,\varphi'' + \frac{4\varrho^6}{3\cdot 5\cdot 7}\,\varphi''' = 0.$$

Beachtet man, dass φ durchweg als Function von ϱ^2 angesehen ist, und dass demgemäss φ', φ'', φ''' die Ableitungen von φ nach ϱ^2 vorstellen, so ergiebt sich, durch Integration der Gleichung (7), für φ folgender Werth*):

---

*) Die Gleichung (7) lautet, wenn man $\varrho^2 = \eta$ setzt:

$$\eta\varphi' + \frac{4\eta^2}{5}\,\varphi'' + \frac{4\eta^3}{5\cdot 7}\,\varphi''' = 0.$$

Hieraus folgt, wenn $\varphi = \eta^n$ angenommen wird:

$$n\eta^n + \frac{4n(n-1)}{5}\,\eta^n + \frac{4n(n-1)(n-2)}{5\cdot 7}\,\eta^n = 0,$$

d. i.

$$1 + \frac{4(n-1)}{5} + \frac{4(n-1)(n-2)}{5\cdot 7} = 0,$$

d. i.

$$\varphi = \mathsf{A} + \mathsf{B}\varrho^{-3} + \Gamma\varrho^{-5}, \text{ mithin:}$$

(8) $$-\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = 3\,\mathsf{B}\varrho^{-4} + 5\Gamma\varrho^{-6},$$

wo A, B, Γ Integrationsconstante sind.

Die Function $\varphi\,(\varrho^2)$ oder φ bezieht sich auf das Potential zweier Aethertheilchen. Sind nämlich m, m_1 die Massen der Theilchen, und repräsentirt ϱ ihre Entfernung, so ist das Potential ihrer gegenseitigen Einwirkung bezeichnet worden mit $m\,m_1\,\varphi\,(\varrho^2)$ oder $m\,m_1\,\varphi$, (l. c. pag. 336 u. 345). Demnach ist $-m m_1 \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$ die Grösse der zwischen den beiden Aethertheilchen vorhandenen Kraft. Aus (8) ersehen wir also, dass die *gegenwärtige* III. Voraussetzung erfüllt sein wird, sobald diese zwischen je zwei Aethertheilchen vorhandene Kraft den Werth besitzt: $mm_1\,(3\,\mathsf{B}\varrho^{-4} + 5\,\Gamma\varrho^{-6})$. Somit gelangen wir zu folgendem Ergebniss:

Wenn die erste der beiden zu Grunde gelegten Hypothesen (l. c. pag. 325) in eine speciellere Fassung versetzt, nämlich angenommen wird, dass die zwischen je zwei Aethertheilchen vorhandene Kraft entweder umgekehrt proportional ist mit der sechsten Potenz der Entfernung, oder aus zwei Theilen besteht, von denen der eine den genannten Charakter besitzt, der andere aber umgekehrt proportional ist mit der vierten Potenz der Entfernung: so führen jene Hypothesen, was die Bewegung ebener Lichtwellen in einem zweiundzweigliedrigen Krystall anbelangt, unmittelbar (nämlich ohne Zuziehung irgend einer weiteren Voraussetzung) zu den von Fresnel aufgestellten Gesetzen, und auch zu der von Fresnel angenommenen Orientirung der Vibrationsrichtungen.

Es scheint, als wäre hier zu bemerken vergessen, dass die in Rede stehenden beiden Hypothesen zu den Fresnel'schen Gesetzen auch dann hinleiten werden, wenn die zwischen je zwei Aethertheilchen vorhandene Kraft umgekehrt proportional ist mit der *vierten*

$$35 + 28\,(n-1) + 4\,(n^2 - 3n + 2) = 0,$$

d. i.

$$4n^2 + 16n + (35 - 28 + 8) = 0,$$

d. i.

$$(2n)^2 + 8\cdot(2n) + 15 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$2n = -4 \pm \sqrt{16 - 15},$$

d. i.

$$2n = \begin{cases} -3 \\ -5 \end{cases}.$$

Somit ergiebt sich aus der Gleichung (7) für die Function $\varphi = \eta^n = \varrho^{2n}$ folgender Werth:

$$\varphi = \mathsf{A} + \mathsf{B}\varrho^{-3} + \Gamma\varrho^{-5}.$$

Potenz der Entfernung. Aber es würde absurd sein, annehmen zu wollen, dass φ und $-\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ die Werthe hätten:

$$\varphi = \mathsf{A} + \mathsf{B}\varrho^{-3},$$
$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = 3\mathsf{B}\varrho^{-4}.$$

Denn aus einer solchen Annahme über den Werth von φ würde sofort folgen: $K + \varkappa = 0$; und hieraus würde weiter für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im *freien* Aether der Werth 0 sich ergeben (vgl. die Randnoten l. c. pag. 346 und 347).

Leipzig, den 29. März 1869.

Aus brieflichen Mittheilungen.

Von E. Heine in Halle.

.... Da Ihnen der Weg, welchen man einzuschlagen pflegt, um $\cos n\varphi$ für positive ganze Werthe von n nach Potenzen von $\cos\varphi$ zu entwickeln, für die Vorlesung unbequem ist, so schlage ich Ihnen folgende Ableitung vor:

Entwickelt man die beiden Seiten der Gleichung:

$$(1)\quad \log(1-\alpha e^{i\varphi})+\log(1-\alpha e^{-i\varphi})=\log(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)$$

nach aufsteigenden Potenzen von α, so ist der Coefficient von $-\alpha^n$ auf der linken Seite

$$\frac{2\cos n\varphi}{n};$$

den Coefficienten derselben Potenz auf der rechten Seite ermittelt man, nachdem man sie auf die Form gebracht hat:

$$-\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{\alpha^\nu}{\nu}(2\cos\varphi-\alpha)^\nu,$$

d. i. auf die Form:

$$-\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{(2\cos\varphi)^\nu}{\nu}\alpha^\nu-\frac{\nu}{1}\frac{(2\cos\varphi)^{\nu-1}}{\nu}\alpha^{\nu+1}+\frac{\nu\cdot\nu-1}{1\cdot 2}\frac{(2\cos\varphi)^{\nu-2}}{\nu}\alpha^{\nu+2}-\cdots\cdots\right].$$

Dadurch entsteht sofort die gesuchte Gleichung:

$$(2)\quad \frac{2\cos n\varphi}{n}=\frac{(2\cos\varphi)^n}{n}-\frac{n-1}{1}\frac{(2\cos\varphi)^{n-2}}{n-1}+\frac{n-2\cdot n-3}{1\cdot 2}\frac{(2\cos\varphi)^{n-4}}{n-2}$$
$$-\frac{n-3\cdot n-4\cdot n-5}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{(2\cos\varphi)^{n-6}}{n-3}+\cdots$$

in der die Reihe auf der rechten Seite mit der ersten oder nullten Potenz von $\cos\varphi$ schliesst.

Will man lieber die geometrische als die logarithmische Reihe zur Ableitung verwenden, so geht man von der Gleichung

$$(3)\quad \frac{1}{1-\alpha e^{i\varphi}}+\frac{1}{1-\alpha e^{-i\varphi}}=2\,\frac{1-\alpha\cos\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}$$

aus. Es sei

$$\frac{1}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha^n (2\cos\varphi - \alpha)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \alpha^n,$$

wodurch c_n die Bedeutung erhält:

$$(4)\quad c_n = (2\cos\varphi)^n - \frac{n-1}{1}(2\cos\varphi)^{n-2} + \frac{n-2\cdot n-3}{1\cdot 2}(2\cos\varphi)^{n-4}$$
$$- \frac{n-3\cdot n-4\cdot n-5}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cos\varphi)^{n-6} + \text{etc.},$$

wenn die Reihe, wie oben (2), bis $\cos^1\varphi$ oder $\cos^0\varphi$ fortgesetzt wird. Dann folgt aus (3):

$$\cos n\varphi = c_n - \cos\varphi \cdot c_{n-1},$$

was mit (2) übereinstimmt. Auf die ähnliche Entwickelung von $\sin n\varphi$ führt die Formel:

$$\frac{1}{1-\alpha e^{i\varphi}} - \frac{1}{1-\alpha e^{-i\varphi}} = \frac{2i\alpha\sin\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2} = 2i\sum_{n=1}^{n=\infty}\alpha^n \sin n\varphi,$$

aus der sich ergiebt:

$$(5)\qquad \sin n\varphi = \sin\varphi\; c_{n-1}.$$

..... Sie fragen, auf welche Art ich in den Vorlesungen den fundamentalen Satz zu beweisen pflege, dass für *willkürliche* Variationen δy das Integral

$$(1)\qquad \int_a^b f(x, y, y', y'', \ldots y^{(\nu)})\,\delta y\,dx,$$

in welchem y', y'', etc. die Ableitungen der Function y von x nach x vorstellen, nur dann verschwinden kann, wenn f selbst in den Integrationsgrenzen verschwindet? In den meisten Lehrbüchern wird dieser Satz als selbstverständlich betrachtet, indem man zu vergessen scheint, dass in den Fällen, auf welche man ihn anwenden will, die sogenannte willkürliche Variation δy nicht willkürlich im gewöhnlichen Sinne, sondern der Bedingung unterworfen ist, es solle δy selbst und eine endliche Anzahl seiner aufeinander folgenden Ableitungen nach x noch continuirlich bleiben; den bedeutenden Umfang der hierin liegenden Beschränkung kann man wohl nicht leicht so weit übersehen, dass man den Satz geradezu als selbstverständlich betrachten darf. Dass man hier ein unbestimmtes Gefühl an die Stelle des Beweises treten lässt, hat schon manchen Anfänger veranlasst, bei der Behandlung der Aufgabe für die kürzeste Linie aus der Gleichung

$$\delta \int \sqrt{1 + y'y'}\, dx = \int \frac{y'}{\sqrt{1 + y'y'}}\, \delta y'\, dx$$

schliessen zu wollen, dass der Factor von $\delta y'$, nämlich

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'y'}}$$

verschwindet!

So weit der obige Satz überhaupt richtig ist, lässt er sich, ebenso wie seine Ausdehnung auf mehrere Variabeln, beweisen, indem man für δy eine Function von x setzt, welche den Continuitätsbedingungen genügt, und mit f, wo es nicht Null ist, überall gleiches oder überall entgegengesetztes Zeichen besitzt; man darf aber nicht f selbst für δy nehmen, wenn auch f eine analytische Function ist, indem man nicht von vorn herein den Fall ausgeschlossen hat, dass y', y'', etc. Discontinuitäten enthalten können (s. unten). Sollte f an den Stellen

$$x = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \text{ etc.}$$

sein Zeichen ändern, so ist

(2) $$\delta y = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots$$

eine geeignete Function; setzt man diese für δy in (1) ein, so folgt sofort, *dass f — wenn es nicht unendlich viele Zeichenwechsel besitzt — im Allgemeinen*, d. h. höchstens mit Ausnahme von Werthen in einzelnen Punkten der Integrationslinie, *verschwindet.*

Bei den Untersuchungen über Maxima und Minima oder über die Integrabilität handelt es sich bekanntlich um Aufsuchung der Bedingungen, unter welchen

(3) $$\delta \int_a^b F(x, y, y', \ldots y^{(\mu)})\, dx$$

verschwindet, wenn F eine gegebene Function bezeichnet. Man kann auch dafür die Gleichung

(4) $$\Big[P\Big]_a^b + \int_a^b f(x, y, y', \ldots)\, \delta y\, dx = 0$$

setzen, in welcher P eine lineare Function von δy und seinen $\mu - 1$ Ableitungen nach x bezeichnet, und f eine auf ganz bekannte Art aus F gebildete Function ist. *Will man zeigen, dass auch hier f im Allgemeinen verschwinden muss, wenn* (4) *für willkürliche δy bestehen soll*, so kann man für δy den Werth

(5) $$\delta y = (x - a)^\mu (x - b)^\mu (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots$$

wählen. In der That verschwindet hierdurch der Ausdruck:

$$\Big[P\Big]_a^b,$$

das Integral in (4) aber, also die linke Seite von (4) erhält ein Zeichen, wenn nicht f (im Allgemeinen) Null ist.

Der Ausdruck (3) lässt sich nur dann auf die Form (4) bringen, wenn y', y'', etc. continuirliche Functionen sind; im anderen Falle tritt für eine Stelle der Discontinuität, $x = c$, zu der linken Seite von (4) noch additiv ein Aggregat:

$$\Big[Q_0\Big]_{c-0}^{c+0} \cdot \delta y_c + \Big[Q_1\Big]_{c-0}^{c+0} \cdot \frac{d\delta y_c}{dx} + \cdots\cdots + \Big[Q_{\mu-1}\Big]_{c-0}^{c+0} \cdot \frac{d^{\mu-1}\,\delta y_c}{dx^{\mu-1}}$$

hinzu, in welchem δy_c und seine Ableitungen die Werthe von δy und seinen Ableitungen an der Stelle $x = c$ vorstellen. Jedes Q ist hier eine bekannte Function von x, y, y', π, und $c + 0$ oder $c - 0$ soll einen Werth von x bedeuten, welcher unendlich wenig über resp. unter c liegt. So würde für $F = \sqrt{1 + y'y'}$ gefunden werden:

$$\Big[P\Big]_a^b + \Big[Q_0\Big]_{c-0}^{c+0} \cdot \delta y_c - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'y'}}\right) dy\, dx,$$

$$P = \frac{y'\,\delta y}{\sqrt{1+y'y'}}\qquad,\qquad Q_0 = \frac{y'}{\sqrt{1+y'y'}}.$$

Herr Weierstrass beweist bei den Aufgaben, die er in seinen Vorlesungen behandelt, die Continuität der vorkommenden Ableitungen von y, ohne irgend eine Annahme, die nicht schon in der Aufgabe liegt, allein aus dem Umstande, dass die Ausdrücke:

$$\Big[Q\Big]_{c-0}^{c+0}$$

verschwinden. So würde in unserem Beispiele, wenn gezeigt wäre, dass

$$\Big[Q_0\Big]_{c-0}^{c+0}$$

verschwindet, klar sein, dass y' für $x = c - 0$ und $x = c + 0$ denselben Werth besitzt, also bei $x = c$ continuirlich ist.

Um durch Annahme eines geeigneten Werthes für δy das Verschwinden der einzelnen Glieder in dem nunmehr an die Stelle von (4) tretenden Ausdrucke nachzuweisen, macht man

(5) $\quad \delta y = (x-c)^{2\mu}\,(x-a)^{\mu}\,(x-b)^{\mu}\,(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\ldots;$

dann folgt zunächst, dass die Function f, und hieraus, dass das Aggregat der P und Q für willkürliche δy verschwindet. Man setze nun der Reihe nach

$$\begin{aligned}
\delta y &= (x-c)^{\mu-1}\,(x-a)^{\mu}\,(x-b)^{\mu}\\
\delta y &= (x-c)^{\mu-2}\,(x-a)^{\mu}\,(x-b)^{\mu}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta y &= \phantom{(x-c)^{\mu-2}}\;(x-a)^{\mu}\,(x-b)^{\mu}
\end{aligned}$$

und beweist dadurch successive, dass

$$\left[Q_{\mu-1}\right]_{c-0}^{c+0}, \quad \left[Q_{\mu-2}\right]_{c-0}^{c+0}, \ldots\ldots \left[Q_0\right]_{c-0}^{c+0}$$

verschwindet.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man auch für δy einen Werth von $x = a$ bis $x = b$ angeben kann, der für viele Untersuchungen hinreichend allgemein ist, und der Bedingung genügt, auf einem Theile des Weges von a bis b, — es sei der Weg von c bis b — zu verschwinden, aber dennoch selbst mit seinen $\nu - 1$ Ableitungen nach x continuirlich zu bleiben. In der That kann man dazu für δy zwischen a und c die Function $(x - c)^\nu \Delta x$, wenn Δx willkürlich und mit seinen ersten Ableitungen stetig ist, von c bis b aber Null nehmen.

Ueber Producte und Quadrate der Bessel'schen Functionen.

Von Carl Neumann in Leipzig.

Die kürzlich von Lommel in seiner sehr schätzbaren Schrift über die Bessel'schen Functionen (Leipzig. Verlag von B. G. Teubner. 1868.) angeregte Frage, ob und unter welchen Bedingungen eine *gerade* Function nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen entwickelbar sei, dürfte ihre Beantwortung finden durch folgende Sätze:

I. Der aus irgend zwei complexen Grössen x und y gebildete Ausdruck $(y^2 - x^2)^{-1}$ kann, unter Anwendung der Bessel'schen Functionen J^n und unter gleichzeitiger Anwendung gewisser anderer Functionen Ω^n, in folgende Reihe entwickelt werden:

$$(y^2 - x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \, \Omega^n(y) \, [J^n(x)]^2 .$$

Diese Entwicklung ist *gültig* für jedes der Bedingung mod $x <$ mod y entsprechende Werthsystem von x, y; und Gleiches gilt auch von allen denjenigen Entwicklungen, die aus ihr hervorgehen durch (beliebig oft wiederholtes) Differenziren nach x und y. — Dabei ist unter ε_n eine Zahl zu verstehen, welche für $n = 0$ den Werth 1, für $n > 0$ den Werth 2 besitzt; und noch zu bemerken, dass $\Omega^n(y)$ eine ganze rationale Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades von y^{-2} ist.

II. Versteht man unter $f(z)$ eine beliebig gegebene Function, welche eindeutig, stetig und *gerade* ist, so lange mod $z < R$ bleibt (wo R eine gegebene Constante sein soll), so wird dieselbe immer darstellbar sein durch eine nach den Quadraten

$$[J^0(z)]^2 , \quad [J^1(z)]^2 , \quad [J^2(z)]^2 , \quad \ldots\ldots.$$

fortschreitende Entwicklung; und zwar wird diese Entwicklung *gültig* sein für jeden der Bedingung mod $z < R$ entsprechenden Werth von z.

III. Ist $f(z)$ eine beliebig gegebene Function, welche innerhalb des Spielraums mod. $z < R$ eindeutig, stetig und *ungerade* bleibt, so wird dieselbe jederzeit darstellbar sein durch eine nach den Producten

$$J^0(z)\, J^1(z) , \quad J^1(z)\, J^2(z) , \quad J^2(z)\, J^3(z) , \quad \ldots\ldots.$$

fortschreitende Entwicklung; und zwar wird diese Entwicklung gültig sein für jeden der Bedingung mod $z < R$ entsprechenden Werth von z.

Es mag noch bemerkt werden, dass für die Bestimmung der Coefficienten dieser Entwicklungen sich *allgemeine Gesetze* ergeben, völlig analog mit denjenigen, welche ich in meiner Schrift über die Bessel'schen Functionen (Leipzig. 1867.) exponirt habe.

Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Die Aufgabe, eine gegebene binäre Form sechster Ordnung f in die Gestalt $u^3 - v^2$ zu bringen, in welcher u eine Form zweiten, v eine Form dritten Grades, ist vollkommen bestimmt, gestattet aber eine grosse Anzahl von Auflösungen. Herr Cayley hat im 9. Bd. des Quarterly Journal, p. 215, die Gleichungen, von denen die Aufgabe abhängt, dadurch gegeben, dass er die Invarianten von f durch die simultanen Invarianten von u und v ausgedrückt hat.

Aber diese Gleichungen haben Eigenschaften, welche sehr merkwürdig sind, und welche man leichter erkennt, indem man von der ursprünglichen Form des Problems ausgeht. Herr C. Jordan in Paris, welchem ich diese Eigenschaften mittheilte, bemerkte, dass sie genau mit denjenigen übereinstimmten, welche er bezüglich der Gleichungen für die Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen ($p = 2$) gefunden. In der That kann man leicht die völlige Uebereinstimmung beider Probleme nachweisen, wenn man sich der Anschauungen bedient, welche Herr Gordan und ich in unserer „Theorie der Abel'schen Functionen" zu Grunde gelegt haben. Die Untersuchung des in der Gleichung $f = u^3 - v^2$ enthaltenen Transformationsproblems ist daher zugleich ein algebraischer Commentar zu den allgemeinen Untersuchungen, durch welche Herr Jordan auf die Theorie dieser Classe von Gleichungen ein ganz neues Licht geworfen hat; sie ist nichts anderes, als die Behandlung der Modulargleichungen, auf welche die Dreitheilung der erwähnten Functionen führt.

Ich erlaube mir im Folgenden den Gang und die Resultate meiner algebraischen Untersuchung kurz mitzutheilen. Die ausführliche Darstellung ist in den Schriften der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen erschienen.

Denken wir uns, es sei eine Lösung u, v des vorgelegten Problemes gefunden. Die Aufgabe, die anderen Lösungen zu finden,

kommt das auf das Transformationsproblem zurück, welches in der Gleichung

$$(1) \qquad u^3 - v^2 = u'^3 - v'^2$$

ausgesprochen ist. Man sieht sofort, dass dieses Problem auf zwei Classen von Lösungen führt, welche völlig verschiedenen Charakter haben. Denn in Folge der Gleichung (1) sind entweder zwei der Factoren

$$u - u', \quad u - \varepsilon u', \quad u - \varepsilon^2 u',$$

in den beiden Factoren

$$v - v', \quad v + v'$$

ganz enthalten, oder jeder der drei ersten hat mit jedem der beiden letzten einen linearen Factor gemein. Im ersten Falle nenne ich die Lösung u', v' eine *Lösung erster Classe in Bezug auf* u, v, im anderen Falle eine *Lösung zweiter Classe.*

Es giebt, wie eine nähere Untersuchung lehrt, 27 Lösungen erster Classe, 12 Lösungen zweiter Classe in Bezug auf eine gegebene Lösung u, v. Das ursprüngliche Problem hat daher 40 Lösungen, und man hat den Satz:

Eine gegebene binäre Form sechster Ordnung f lässt sich auf vierzig Arten in die Gestalt $u^3 - v^2$ bringen.

Aber es ist bemerkenswerth, *dass wenn eine dieser 40 Lösungen gegeben ist, die andern 39 sämmtlich durch Wurzelausziehen gefunden werden können.* Dass die Gleichung 39. Grades, von welcher sie abhängen, sich in eine Gleichung 27. und in eine Gleichung 12. Grades spaltet, folgt schon aus dem Obigen. Diese Gleichungen 27. und 12. Grades haben folgende weitere Eigenschaften.

Die 27 Lösungen erster Classe bilden 9 *Tripel*, welche vermöge einer Gleichung 9. Grades und darauf folgender reiner cubischer Gleichungen gefunden werden. In der That erhält man für u', v' folgende Ausdrücke:

$$(2) \qquad \begin{cases} u' = u - \xi^2 - \xi\eta - \eta^2 \\ 2v' = \varepsilon(\varepsilon - 1)\left\{(\xi + 2\eta)u - (\xi + \eta)(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2)\right\}, \end{cases}$$

in welchen ε eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit ist, die linearen Functionen ξ, η aber aus dem Transformationsproblem

$$(3) \qquad 2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3$$

gefunden werden. Die Gleichungen (2) geben die Lösungen eines Tripels, wenn man für η die drei Cubikwurzeln aus η^3 setzt, auf welche die Gleichung (3) führt. Das Problem (3) aber führt auf folgenden Satz:

Sind u, v zwei gegebene binäre Formen zweiter und dritter Ordnung, so giebt es 9 lineare Functionen ξ, für welche der Ausdruck

$$2v - 3u\xi + \xi^3$$

ein vollständiger Cubus wird.

Die Gleichung 9^{ten} *Grades, auf welche das Problem* (3) *führt, ist eine Hesse'sche.* Hierdurch ist einerseits bewiesen, dass die 27 Lösungen erster Classe durch Wurzelausziehen gefunden werden. Aber die Untersuchung des Problems (3) ist an und für sich von Interesse. Man kann in dem vorliegenden Falle Alles vollständig aufstellen; erstens die Gleichung 9^{ten} Grades selbst; zweitens das Problem 12^{ten} Grades, von welchem die Lösung der Gleichung 9^{ten} Grades abhängt; endlich die biquadratische und die cubischen Gleichungen, durch welche die Lösung beider Probleme erfolgt. Jede Lösung ξ, η des Problems (3) ist dabei analog einem Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung; drei Lösungen, welche den Punkten einer Geraden entsprechen, will ich *conjugirt* nennen. Drei conjugirte Lösungen sind dann in den Formeln enthalten:

$$\xi = \frac{m^3 t + \varepsilon\mu + \varepsilon^2 \nu}{1 - m^3}, \quad \eta = m\, \frac{t + \varepsilon\mu + \varepsilon^2 \nu}{1 - m^3}, \tag{4}$$

in welchen t, μ, ν lineare Functionen, m eine Constante ist. Und die zwölf conjugirten Systeme findet man durch das folgende Transformationsproblem:

$$\begin{cases} (1 - m^3)\, u = \mu\nu - m^3 t^2 \\ 2\,(1 - m^3)^2\, v = m^3 (1 - 2m^3)\, t^3 + 3\, m^3 t\mu\nu - \mu^3 - \nu^3. \end{cases} \tag{5}$$

Sucht man nun die Gleichung 12^{ten} Grades, welche entsteht, wenn man das Product der 12 linearen Functionen t gleich Null setzt, so findet man:

$$\begin{aligned} 0 = &\left\{3pu - (\sigma_1 + \tfrac{3}{2} A)\, v\right\} \cdot \left\{3pu - (\sigma_2 + \tfrac{3}{2} A)\, v\right\} \\ &\cdot \left\{3pu - (\sigma_3 + \tfrac{3}{2} A)\, v\right\} \cdot \left\{3pu - (\sigma_4 + \tfrac{3}{2} A)\, v\right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

wo p die erste lineare Covariante von u und v ist, wo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = &\ \sigma^4 + 6\,(2B - \tfrac{1}{4} A^2)\, \sigma^2 \\ &+ 4\,(5\,AB - 2C - 4D + \tfrac{1}{4} A^3)\,\sigma - 3\,(2B - \tfrac{1}{4} A^2)^2, \end{aligned} \tag{7}$$

und A, B, C, D die simultanen Invarianten von u und v sind. *Die biquadratische Gleichung* (7) *hat die besondere Eigenschaft, dass ihre erste Invariante verschwindet.* Die Lösung des Problems (3) erfolgt, indem man zuerst diese Gleichung, und sodann zwei der cubischen Gleichungen (6) löst, welche den Gleichungen für die Wendepunktsdreiecke einer Curve dritter Ordnung durchaus analog sind.

Das Verhalten der Lösungen zweiter Classe wird am besten dadurch charakterisirt, dass sie in der obigen Vorstellungsweise den Ecken der Wendepunktsdreiecke entsprechen. In der That liefert jedes conjugirte System, welches durch m, μ, ν, t bestimmt ist, folgende zwei Lösungen zweiter Classe, die sich nur durch Vertauschung von μ und ν unterscheiden:

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned} u' &= -\frac{m}{1-m^3}(\mu^2-\nu t)\\ v' &= \frac{1}{2(1-m^3)^2}\left\{\nu^3-(1-2m^3)\mu^3+m^3t^3-3m^3\mu\nu t\right\}\\ u'' &= -\frac{m}{1-m^3}(\nu^2-\mu t)\\ v'' &= \frac{1}{2(1-m^3)^2}\left\{\mu^3-(1-2m^3)\nu^3+m^3t^3-3m^3\mu\nu t\right\}.\end{aligned}\right.$$

Jede dieser Lösungen kommt aber noch bei einem andern conjugirten System vor; und zwar führen immer zwei solche conjugirte Systeme auf eine gemeinschaftliche Lösung zweiter Classe, welche den Seiten eines und desselben Wendepunktsdreiecks entsprechen. Die behauptete Analogie dieser Lösungen mit den Ecken dieser Dreiecke ist dadurch gerechtfertigt. Auch sieht man, wie in Folge dieser Verhältnisse die Lösungen zweiter Classe auf keine neuen Gleichungen führen, welche zu lösen sind, sondern durch die Resolventen der Hesse'schen Gleichung mitgelöst werden.

Dieses sind die wesentlichsten Eigenschaften, welche 39 Lösungen des vorgelegten Problems der 40ten gegenüber besitzen. Es entsteht nun die Frage, welche Wandlungen mit diesen Eigenschaften vor sich gehen, wenn man statt der Lösung u, v eine andere, u', v', zu Grunde legt, und dieser gegenüber die 39 anderen Lösungen gruppirt. Man erhält hierbei folgende Sätze:

1) *Ist u', v' erster Classe in Bezug auf u, v, so ist auch u, v erster Classe für u', v'.*

2) *Aus jedem frühern Tripel geht eine Lösung in die zweite über, so dass im Ganzen acht frühere Lösungen erster Classe jetzt zweiter Classe werden und umgekehrt.*

3) *Das früher u', v' enthaltende Tripel wird nun in sofern geändert, dass u, v an Stelle von u', v' in denselben eintritt.*

4) *Aus zwei früher mit diesem conjugirten Tripeln entstehen zwei neue, welche dem neuen nach* (3) *entstandenen conjugirt sind; in jedes derselben tritt eine Lösung zweiter Classe ein; die zurückbleibenden Lösungen erster Classe ordnen sich in den neuen Tripeln so, dass die früher in einem Tripel vereinigten nicht mehr vereinigt bleiben.*

5) *Die in zwei solche Tripel* (4) *eintretenden Lösungen zweiter Classe entsprechen Ecken eines Wendepunktsdreiecks, deren Verbindungslinie dem conjugirten System entspricht, welchem die beiden alten Tripel angehören.*

6) *Vier Lösungen zweiter Classe bleiben zweiter Classe; sie entsprechen solchen Ecken von Wendepunktsdreiecken, welche in einer geraden Linie und den vier Wendepunktslinien gegenüber liegen, die den u', v' enthaltenden conjugirten Systemen entsprechen.*

7) *Die Wurzeln der neuen biquadratischen Gleichung* (7) *sind mit denen der früheren durch eine lineare Substitution mit rationalen Coefficienten verbunden.*

Es zeigt sich hierbei, dass gewisse Verbindungen der Lösungen zu vier sich durch besondere Eigenschaft auszeichnen. Ich nenne sie *Quadrupel.* Ein solches Quadrupel besteht aus irgend einer Lösung und drei anderen, welche in Bezug auf diese ein Tripel erster Classe bilden. Die Anzahl aller Quadrupel ist 90. *Sie besitzen die Eigenschaft, dass wenn man irgend eine Lösung eines Quadrupels zu Grunde legt, die übrigen in Bezug auf diese ein Tripel erster Classe bilden.* Und zu gleicher Zeit giebt es dann immer vier Lösungen, welche bei allen diesen Anordnungen zweiter Classe bleiben (6). Diese vier Lösungen bilden ebenfalls ein Quadrupel; beide Quadrupel sind einander reciprok zugeordnet und bilden ein *Quadrupelpaar.*

Es *giebt* 45 *Quadrupelpaare;* man findet daher die Quadrupel durch Lösung einer Gleichung 45^{ten} Grades, und darauf folgende Lösung quadratischer Gleichungen.

Aber endlich bemerkt man, dass die 40 Lösungen des ursprünglichen Problems sich auf mannigfache Weise in fünf Quadrupelpaare zerlegen lassen. Wenn man ein bestimmtes Quadrupelpaar herausgegriffen, so lassen sich aus den übrigen 32 Lösungen noch auf drei verschiedene Arten in vier Quadrupelpaare ordnen. Die Zahl aller solcher Anordnungen ist daher $\frac{45 \cdot 3}{5} = 27$; und *man findet also die Zerlegungen der* 40 *Lösungen in fünf Quadrupelpaare durch eine Gleichung* 27^{ten} *Grades.* Kennt man eine Wurzel derselben, so kann man die entsprechenden fünf Quadrupelpaare durch Lösung einer Gleichung 5^{ten} Grades erhalten, und die Bestimmung der Lösungen des gegebenen Problems kommt übrigens auf Wurzelausziehungen zurück.

Diese Reduction der Gleichung 40^{ten} Grades auf eine des 27^{ten} Grades stimmt genau mit derjenigen überein, welche Herr C. Jordan bezüglich der Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen kennen gelehrt hat.

Göttingen, den 5. Juni 1869.

Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades*).

Von Felix Klein in Göttingen.

Als *Coordinaten der geraden Linie im Raume* betrachtet man die relativen Werthe der aus den Coordinaten zweier Punkte oder zweier Ebenen gebildeten sechs zweigliederigen Determinanten. Zwischen denselben besteht identisch eine Relation zweiten Grades:

$$R = 0.$$

Indem sechs beliebig ausgewählte Grössen, welche diese Gleichung befriedigen, als Coordinaten einer geraden Linie angesehen werden können, ist es gestattet, von der Entstehungsweise der Liniencoordinaten aus den Coordinaten zweier Punkte oder Ebenen abzusehen, und die Liniencoordinaten als selbstständige homogene Veränderliche zu betrachten, welche einer Gleichung zweiten Grades zu genügen haben.

Eine weitere Gleichung zweiten Grades zwischen denselben:

$$\Omega = 0$$

bestimmt *einen Liniencomplex des zweiten Grades.*

Es liegt nahe, die beiden Gleichungen R und Ω durch eine lineare Substitution in solche zwei zu verwandeln, welche nur noch die Quadrate der Veränderlichen enthalten. Eine derartige Umformung ist bekanntlich immer und in einziger Weise möglich, vorausgesetzt, dass die Wurzelwerthe, welche die gleich Null gesetzte Determinante der Form $\Omega + \lambda P$ für λ ergiebt, sämmtlich von einander verschieden sind**). *Im Folgenden soll der geometrische Sinn dieser Transforma-*

---

*) Im Auszuge bereits mitgetheilt in den Gött. Nachrichten, 1869, p. 258.

**) In meiner Inaugural-Dissertation: *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form. Bonn,* 1868; habe ich die algebraische Durchführung dieser Transformation behandelt. Ich habe dort zugleich die im Texte ausgeschlossenen Fälle von Complexen zweiten Grades mit in Betracht gezogen und die ihnen entsprechenden canonischen Gleichungsformen aufgestellt.

tion erörtert werden. Indem wir solche Complexe zweiten Grades, bei welchen die in Rede stehende Umformung nicht möglich ist, von der Betrachtung ausschliessen, denken wir uns die beiden Formen R und Ω von vornheein in der vereinfachten Gestalt gegeben.

Es sei gleich hervorgehoben, dass diese Gleichungsform nicht nur für die Complexe zweiten Grades als solche, sondern auch für die mit diesen Complexen in enger Beziehung stehenden *Flächen vierter Ordnung und vierter Classe mit 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkten* von Wichtigkeit ist.

Die statt der ursprünglichen Liniencoordinaten eingeführten neuen Veränderlichen stellen, gleich Null gesetzt, lineare Complexe dar, welche in ausgezeichneter Weise zu einander gruppirt sind. In Bezug auf dieselben ordnen sich die geraden Linien des Raumes zu Systemen von 32, die Ebenen und Punkte desselben zu Systemen von 16 Ebenen und 16 Punkten zusammen. Die Beziehung der 16 Ebenen und 16 Punkte eines solchen Systems zu einander ist dieselbe, wie die der 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkte jener Flächen vierter Ordnung und vierter Classe.

Die fundamentale Bedeutung dieser linearen Complexe für den Complex zweiten Grades ist die, dass für alle Elemente, welche einander durch die linearen Complexe zugeordnet werden, die Beziehung zu dem Complexe zweiten Grades dieselbe ist. Ein Gleiches, wie für den Complex zweiten Grades, gilt für die durch denselben bestimmte Fläche der vierten Ordnung und vierten Classe. Es folgt hieraus eine Reihe von Theoremen sowohl für jene Complexe als für diese Flächen.

Die algebraische Darstellung der bei diesen geometrischen Betrachtungen auftretenden Gebilde gestaltet sich sehr einfach. Insbesondere stellt sich die Schaar von Complexen zweiten Grades, welche zu derselben Fläche vierter Ordnung und vierter Classe gehören, auf dieselbe Art durch einen willkürlichen Parameter dar, wie ein System confocaler Curven oder Flächen zweiten Grades.

Es sei noch bemerkt, dass wir von zwei einander reciprok entgegengesetzten Sätzen meistens nur den einen aufgenommen haben, ohne ausdrücklich auf den anderen hinzuweisen.

I.

Vorbereitende Betrachtungen.

1. Die Coordinaten zweier Punkte einer geraden Linie seien durch:

$$x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4\,,$$
$$y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ y_4\,,$$

die Coordinaten zweier Ebenen derselben geraden Linie durch:

$$u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3\ ,\ u_4\ ,$$
$$v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ v_4\ ,$$

bezeichnet. Als Coordinaten der geraden Linie sind dann die Determinanten:

$$p_{ik} = x_i\, y_k - y_i\, x_k\,,$$

oder die Determinanten:

$$q_{ik} = u_i\, v_k - v_i\, u_k$$

zu betrachten. Dabei ist:

$$p_{ik} + p_{ki} = 0 \quad , \quad q_{ik} + q_{ki} = 0\,.$$

Nach Plücker nennt man die Coordinaten p_{ik} *Strahlencoordinaten*, die Coordinaten q_{ik} *Axencoordinaten.*

Unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Zahlen 1, 2, 3, 4 in beliebiger Reihenfolge verstanden, hat man die folgenden Identitäten:

$$P \equiv p_{\alpha\beta}\, p_{\gamma\delta} + p_{\alpha\gamma}\, p_{\delta\beta} + p_{\alpha\delta}\, p_{\beta\gamma} = 0,$$
$$Q \equiv q_{\alpha\beta}\, q_{\gamma\delta} + q_{\alpha\gamma}\, q_{\delta\beta} + q_{\alpha\delta}\, q_{\beta\gamma} = 0,$$

die gemeinsam durch das Symbol:

$$R = 0$$

bezeichnet sein mögen.

In dieser Bezeichnung ist:

$$\varrho\, p_{ik} = \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} \quad , \quad q_{ik} = \varrho\, \frac{\partial P}{\partial p_{ik}}\,,$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet.

Eine gerade Linie, deren Coordinaten $p_{ik}^{(\alpha)}$, $q_{ik}^{(\alpha)}$ sind, werde im Folgenden durch $(r^{(\alpha)})$ bezeichnet. Statt $p_{ik}^{(\alpha)}$, $q_{ik}^{(\alpha)}$ werde in solchen Fällen, in welchen die Unterscheidung zwischen Strahlen- und Axencoordinaten unnöthig ist, $r_{ik}^{(\alpha)}$ geschrieben.

2. Diese Bezeichnungsweise vorausgesetzt, schreibt sich die Bedingung dafür, dass zwei gerade Linien $(r), (r')$ sich schneiden, unter den folgenden Formen:

$$\Sigma\, p_{ik}\, \frac{\partial P'}{\partial p'_{ik}} = 0 \quad , \quad \Sigma\, p'_{ik}\, \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0,$$
$$\Sigma\, q_{ik}\, \frac{\partial Q'}{\partial q'_{ik}} = 0 \quad , \quad \Sigma\, q'_{ik}\, \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} = 0,$$
$$\Sigma\, p_{ik}\, q'_{ik} = 0 \quad , \quad \Sigma\, p'_{ik}\, q_{ik} = 0\,.$$

Drei gerade Linien (r), (r'), (r''), die sich gegenseitig schneiden, haben entweder einen Punkt oder eine Ebene gemeinsam. Je nachdem das Eine oder das Andere stattfindet, verschwindet der erste oder der zweite Factor der vier Producte:

$$\Sigma \pm p_{\alpha\beta}\, p'_{\alpha\gamma}\, p''_{\alpha\delta} \cdot \Sigma \pm p_{\gamma\delta}\, p'_{\delta\beta}\, p''_{\beta\gamma}\,,$$

die sich auch unter einer der folgenden Formen darstellen lassen:

$$\Sigma \pm p_{\alpha\beta}\, p'_{\alpha\gamma}\, p''_{\alpha\delta} \cdot \Sigma \pm q_{\alpha\beta}\, q'_{\alpha\gamma}\, q''_{\alpha\delta},$$
$$\Sigma \pm q_{\gamma\delta}\, q'_{\delta\beta}\, q''_{\beta\gamma} \cdot \Sigma \pm q_{\alpha\beta}\, q'_{\alpha\gamma}\, q''_{\alpha\delta},$$
$$\Sigma \pm q_{\gamma\delta}\, q'_{\delta\beta}\, q''_{\beta\gamma} \cdot \Sigma \pm p_{\gamma\delta}\, p'_{\delta\beta}\, p''_{\beta\gamma}.$$

Sind (r), (r'), (r'') gerade Linien, welche innerhalb derselben Ebene durch einen Punkt hindurchgehen, so verschwinden sämmtliche aus den Coordinaten derselben gebildete dreigliederige Determinanten, und man kann setzen:

$$r_{ik} = \lambda r'_{ik} + \mu r''_{ik}.$$

Es seien (r'), (r''), (r''') gerade Linien, welche in einer Ebene liegen oder durch einen Punkt hindurchgehen. Dann sind die Coordinaten einer beliebigen geraden Linie (r), welche in derselben Ebene liegt, bezüglich durch denselben Punkt hindurchgeht, darstellbar durch

$$r_{ik} = \lambda r'_{ik} + \mu r''_{ik} + \nu r'''_{ik}.$$

3. Wenn in den Ausdruck R an Stelle der Coordinaten einer geraden Linie die in die Gleichung eines Complexes ersten Grades eingehenden Constanten gesetzt werden, entsteht ein im Allgemeinen nicht verschwindender Ausdruck, welcher *die Invariante des Complexes* genannt werden mag. Das Verschwinden derselben sagt aus, dass der Complex die Gesammtheit aller gerader Linien umfasst, welche eine feste gerade Linie schneiden, deren Coordinaten die Constanten des Complexes sind, dass der Complex ein sogenannter *specieller* Complex ist.

Als *simultane Invariante zweier linearer Complexe* sei der Ausdruck bezeichnet, welcher entsteht, wenn man in den bilinear geschriebenen Ausdruck R die Constanten zweier linearer Complexe einträgt.

Das Verschwinden der simultanen Invariante zweier Complexe drückt eine Beziehung zwischen denselben aus, welche als *Involution* bezeichnet werden mag.

Sind beide lineare Complexe specielle, so ist das Verschwinden der simultanen Invariante die Bedingung dafür, dass sich die durch dieselben dargestellten geraden Linien schneiden. Ist nur einer der beiden Complexe ein specieller, so sagt das Verschwinden der simultanen Invariante aus, dass die durch denselben dargestellte gerade Linie dem anderen Complexe angehört.

In dem Folgenden sei angenommen, dass keiner der zu betrachtenden Complexe ein specieller sei.

Alle geraden Linien, welche zwei linearen Complexen gemeinschaftlich angehören, schneiden zwei feste gerade Linien, *die Directricen der durch die beiden Complexe bestimmten Congruenz.* Liegen die beiden Complexe in Involution, so sind diejenigen beiden Punkte, welche in ihnen einer beliebigen Ebene entsprechen, harmonisch zu

denjenigen beiden Punkten, in welchen die Ebene von den beiden Directricen geschnitten wird. Lässt man sich eine Ebene um eine beiden Complexen gemeinsame gerade Linie drehen, so sind die Punktenpaare, welche der Ebene in ihren verschiedenen Lagen entsprechen, auf dieser geraden Linie in Involution. Einem jeden der beiden Punkte, welche durch die beiden Complexe in einer beliebigen Ebene bestimmt werden, entspricht in denselben noch eine zweite Ebene. Diese Ebene ist für beide Punkte dieselbe.

Die Ebenen und Punkte des Raumes ordnen sich mit Bezug auf zwei lineare Complexe, welche in Involution liegen, in Gruppen von zwei Ebenen und zwei auf der Durchschnittslinie derselben liegenden Punkten.

Mit Bezug auf drei gegenseitig in Involution liegende lineare Complexe ordnen sich die Ebenen und Punkte des Raumes zu Tetraedern zusammen, welche sich in Bezug auf die durch die drei linearen Complexe bestimmte Fläche zweiten Grades conjugirt sind. Die drei Punkte, welche einer Seitenfläche eines solchen Tetraeders in den drei Complexen entsprechen, sind die drei in derselben liegenden Eckpunkte des Tetraeders; umgekehrt sind die drei Ebenen, welche einem Eckpunkte entsprechen, die drei durch denselben hindurchgehenden Seitenflächen.

Falsch. Siehe Ann. Bd. XXIII p. 566.

4. Die Liniencoordinaten r_{ik} stellen die mit gewissen (nicht vollständig willkürlichen) Constanten multiplicirten Momente der zu bestimmenden geraden Linie mit Bezug auf die sechs Kanten des Coordinatentetraeders dar. Wir fragen nach der Bedeutung einer allgemeinen linearen Transformation der Liniencoordinaten.

Werden in die Gleichung eines linearen Complexes die Coordinaten einer gegebenen geraden Linie eingesetzt, so ist der resultirende Ausdruck dem Momente der gegebenen geraden Linie in Bezug auf diejenige gerade Linie, welche derselben in dem linearen Complexe conjugirt ist, proportional.

Die Einführung linearer Functionen der Liniencoordinaten an Stelle dieser Coordinaten kommt darauf hinaus, als Bestimmungsstücke der geraden Linie die mit willkürlichen Constanten multiplicirten Momente derselben in Bezug auf die ihr in sechs gegebenen linearen Complexen conjugirten geraden Linien zu betrachten.

Wenn man die durch eine lineare Substitution eingeführten neuen Veränderlichen in die zwischen den ursprünglichen Liniencoordinaten bestehende Identität einführt, erhält man einen Ausdruck des zweiten Grades in diesen Veränderlichen, der wieder mit R bezeichnet sein mag, dessen Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass sechs, sonst beliebig gegebene Werthe der Veränderlichen auf eine gerade Linie bezogen werden können.

Dieser Ausdruck R hat ganz dieselbe Bedeutung, wie der aus den

früheren Coordinaten gebildete. So wie sich früher Strahlen- und Axencoordinaten entsprachen, entsprechen sich jetzt die neuen Coordinaten und die nach denselben genommenen partiellen Differentialquotienten von R.

Die Form von R giebt sofort Aufschluss über die Art und die gegenseitige Lage der für die Coordinatenbestimmung zu Grunde gelegten Complexe.

Insbesondere ist klar, dass, wenn R, wie es bei den ursprünglichen Coordinaten der Fall war, nur drei Glieder enthält, die neuen Veränderlichen wiederum die Momente der zu bestimmenden geraden Linie in Bezug auf die Kanten eines Tetraeders sind.

II.

Das System der sechs Fundamentalcomplexe.

5. Die eingehends erwähnte Normal-Gleichungsform für Complexe des zweiten Grades führt zur Untersuchung solcher linearer Functionen der Liniencoordinaten, in welchen sich die Bedingungsgleichung $R = 0$ als Summe der mit passenden Constanten multiplicirten Quadrate schreibt. Gleich Null gesetzt, stellen dieselbe sechs lineare Complexe dar, welche *die sechs Fundamentalcomplexe* genannt werden sollen.

Dieselben seien durch:

$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 0\ ,\ x_3 = 0\ ,\ x_4 = 0\ ,\ x_5 = 0\ ,\ x_6 = 0$$

bezeichnet und die Symbole x gleich mit solchen Constanten multiplicirt gedacht, dass sich die Bedingungsgleichung unter der folgenden Form schreibt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0. \tag{1}$$

Das System dieser Veränderlichen hängt von 15 Constanten ab.

Die Invariante eines linearen Complexes:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_6 x_6 = 0$$

ist in demselben dargestellt durch:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_6^2,$$

und die simultane Invariante zweier lineare Complexe:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_6 x_6 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_6 x_6 = 0,$$

durch:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_6 b_6 .$$

Es folgt hieraus zunächst, dass die Multipla der x so gewählt

sind, dass die Invarianten sämmtlicher Fundamentalcomplexe der positiven Einheit gleich werden. Ferner folgt, dass die simultane Invariante zweier beliebiger Fundamentalcomplexe verschwindet.

Je zwei der sechs Fundamentalcomplexe liegen in Involution.

Die Bedingungsgleichung:

$$R = 0,$$

wie sie zwischen den ursprünglichen Liniencoordinaten stattfand, umfasste die drei Producte von jedesmal zwei der paarweise gruppirten sechs Veränderlichen. Wenn dieselbe also durch eine *reelle* lineare Substitution in der Art transformirt wird, dass sie nur die Quadrate der Variabeln enthält, so müssen sich unter diesen Quadraten gleich viele positive und negative finden. Indem ferner die Summe der Quadrate zweier conjugirt imaginärer Ausdrücke gleichwerthig ist der Summe eines positiven und eines negativen reellen Quadrates, ergiebt sich das Folgende:

Es kann eine beliebige (gerade) Anzahl der sechs Fundamentalcomplexe imaginär sein.

Die Symbole x, welche reellen Fundamentalcomplexen entsprechen, sind so gewählt, dass die Hälfte von ihnen reelle, die andere Hälfte rein imaginäre Coëfficienten enthält.

Und hieraus:

Die reellen Fundamentalcomplexe sondern sich in zwei gleich zahlreiche Gruppen. Die Complexe der einen Gruppe sind rechts-, die der anderen sind linksgewunden).*

Die sechs Fundamentalcomplexe mögen im Folgenden einfach durch die Zahlen 1, 2, ..., 6 bezeichnet sein, und es bleibe unberücksichtigt, ob sich unter denselben imaginäre finden oder nicht.

6. Die Directricen der Congruenz der beiden Fundamentalcomplexe (1, 2) haben offenbar als Coordinaten:

$$\varrho x_1 = 1\ ,\ \varrho x_2 = \pm i\ ,\ \varrho x_3 = 0\ ,\ \varrho x_4 = 0\ ,\ \varrho x_5 = 0\ ,\ \varrho x_6 = 0.$$

Die Directricen der Congruenz zweier Fundamentalcomplexe gehören den übrigen vier Fundamentalcomplexen an.

Die Gesammtheit der geraden Linien, welche eine der beiden Directricen schneiden, ist dargestellt durch:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

oder, was dasselbe ist, durch:

$$x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Die sechs Fundamentalcomplexe bestimmen $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ lineare Congruenzen, deren 30 Directricen in ausgezeichneter Weise gruppirt sind.

*) Plücker. Neue Geometrie n. 47.

Indem die Directricen der Congruenz (1, 2) den Complexen 3, 4, 5, 6 angehören, werden sie von den 12 Directricen der $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ durch dieselben bestimmten Congruenzen geschnitten.

Je zwei zusammengehörige der 30 Directricen werden von 12 der übrigen geschnitten.

Von den Directricen einer der drei Congruenzen (1, 2), (3, 4), (5, 6) schneidet jede die Directricen der anderen beiden Congruenzen.

Die Directricen solcher drei Congruenzen, welche zusammen von sämmtlichen sechs Fundamentalcomplexen abhängen, bilden die Kanten eines Tetraeders.

Hiermit in Uebereinstimmung schreibt sich die Bedingungsgleichung:

$$R = 0$$

in den folgenden Veränderlichen:

$$y_1 = x_1 + ix_2 \ , \ y_3 = x_3 + ix_4 \ , \ y_5 = x_5 + ix_6 \, ,$$
$$y_2 = x_1 - ix_2 \ , \ y_4 = x_3 - ix_4 \ , \ y_6 = x_5 - ix_6 \, ,$$

welche, gleich Null gesetzt, die betreffenden Directricen darstellen, in der für die Kanten eines Tetraeders charakteristischen Form:

$$y_1 y_2 + y_3 y_4 + y_5 y_6 = 0.$$

Die Gesammtheit der geraden Linien, welche in einer Seitenfläche des Tetraeders liegen oder durch einen Eckpunkt desselben gehen, ist dargestellt durch:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$
$$x_3^2 + x_4^2 = 0,$$
$$x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Indem sich sechs Elemente auf 15 verschiedene Weisen in drei Gruppen von zwei theilen lassen, bilden die 30 Directricen die Kanten von 15 Tetraedern. Diese Tetraeder mögen *die Fundamentaltetraeder* heissen. Die Eckpunkte und Seitenflächen dieser Tetraeder sind sämmtlich verschieden.

Je zwei zusammengehörige Directricen gehören als gegenüberstehende Kanten dreien der Fundamentaltetraeder an. Die zwölf Directricen, welche die angenommenen beiden schneiden, sind die noch übrigen 3 . 4 Kanten dieser Tetrader. Die drei Tetraeder bestimmen auf jeder der beiden Directricen sechs paarweise zusammengehörige Punkte. Indem die Fundamentalcomplexe gegenseitig in Involution liegen, sind zwei beliebige der drei Paare gegen einander harmonisch. Ein Gleiches gilt für die sechs Seitenflächen der Tetraeder, die sich nach einer beliebigen der beiden Directricen schneiden*).

---

*) Es geht hieraus hervor, dass die drei Tetraeder, welche zwei gegenüber-

Mit Bezug auf ein beliebiges der fünfzehn Fundamentaltetraeder theilen sich die vierzehn übrigen in zwei Gruppen von 6 und 8. Die Tetraeder der ersten Gruppe haben mit dem gegebenen zwei gegenüberstehende Kanten gemein, die der zweiten Gruppe nicht.

7. Die sechs Directricen (1, 2), (3, 4), (5, 6), welche ein Tetraeder bilden, haben die folgenden Coordinaten:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
(1, 2)	I	1	i	0	0	0	0
	II	1	$-i$	0	0	0	0
(3, 4)	III	0	0	1	i	0	0
	IV	0	0	1	$-i$	0	0
(5, 6)	V	0	0	0	0	1	i
	VI	0	0	0	0	1	$-i$.

Welche von drei sich schneidenden dieser Directricen einen Punkt, welche eine Ebene gemeinschaftlich haben, kann nur dann entschieden werden, wenn der explicite Ausdruck der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_6$ in den ursprünglichen Liniencoordinaten gegeben ist. Es mögen I, III, V durch einen Eckpunkt des Tetraeders gehen, dann liegen II, IV, VI in der gegenüberstehenden Seitenfläche. Ob drei sich gegenseitig schneidende gerade Linien (x, x', x'') einen Punkt oder eine Ebene gemeinschaftlich haben, bestimmt sich dann, gemäss dem Obigen, danach, ob der erste oder der zweite der folgenden beiden Ausdrücke verschwindet:

$$\begin{vmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 & x_5 + ix_6 \\ x_1' + ix_2' & x_3' + ix_4' & x_5' + ix_6' \\ x_1'' + ix_2'' & x_3'' + ix_4'' & x_5'' + ix_6'' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - ix_2 & x_3 - ix_4 & x_5 - ix_6 \\ x_1' - ix_2' & x_3' - ix_4' & x_5' - ix_6' \\ x_1'' - ix_2'' & x_3'' - ix_4'' & x_5'' - ix_6'' \end{vmatrix}.$$

Es ist dabei gestattet, das Vorzeichen von i in zwei beliebigen Verticalreihen gleichzeitig zu ändern.

---

stehende Kanten gemein haben, nie zugleich reell sein können. Bezüglich der Realität der hier vorkommenden Gebilde ist überhaupt das Folgende zu bemerken. Die sechs Fundamentalcomplexe sind entweder alle reell, oder es sind zwei, oder vier, oder alle imaginär. Diesen Annahmen entsprechend sind

18, 10, 6, 6

der 30 Directricen und

6, 2, 1, 1

der 15 Fundamentaltetraeder reell.

Aehnliche Kriterien erhält man in Bezug auf jedes der vierzehn übrigen Fundamentaltetraeder.

8. Durch einen jeden der 60 Eckpunkte der 15 Fundamentaltetraeder gehen ausser den drei zugehörigen noch weitere 12 der 60 Seitenflächen, die in drei Gruppen von je vier gesondert sind, welche sich bezüglich nach einer der drei durch den Eckpunkt hindurchgehenden Directricen schneiden. Eine jede derselben schneidet eine beliebige der drei zu dem Eckpunkte zugehörigen Seitenflächen in einer neuen geraden Linie. Der Punkt, in welchem dieselbe der dritten in dieser Seitenfläche liegenden Directrix begegnet, ist einer der 59 weiteren Eckpunkte.

Eine derartige Linie ist die folgende:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	1	i	1	i

Dieselbe ist die Verbindungslinie der beiden Eckpunkte:

$$(x_1 + i x_2 \;,\; x_3 + i x_4 \;,\; x_5 + i x_6),$$
$$(x_1 - i x_2 \;,\; x_3 + i x_6 \;,\; x_5 + i x_4),$$

und die Durchschnittslinie der beiden Seitenebenen:

$$(x_1 - i x_2 \;,\; x_3 + i x_4 \;,\; x_5 + i x_6),$$
$$(x_1 + i x_2 \;,\; x_3 + i x_6 \;,\; x_5 + i x_4).$$

Solcher geraden Linien gehen durch den angenommenen Eckpunkt 12. Es giebt ihrer im Ganzen

$$\frac{12 \cdot 60}{2} = 360.$$

Die 12 Seitenflächen, welche ausser den drei zugehörigen durch einen Eckpunkt hindurchgehen und die in drei Büschel von vier vertheilt sind, schneiden sich zu je drei nach 16 weiteren Linien, deren jede ausser dem angenommenen Eckpunkte zwei weitere enthält. In der That, die gerade Linie:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	i	1	i	1	i

enthält die drei Eckpunkte:

$$(x_1 + i x_2 \;,\; x_3 + i x_4 \;,\; x_5 + i x_6)$$
$$(x_1 + i x_4 \;,\; x_3 + i x_6 \;,\; x_5 + i x_2)$$
$$(x_1 + i x_6 \;,\; x_3 + i x_2 \;,\; x_5 + i x_4),$$

und liegt in den drei Seitenflächen:

$$(x_1 + i x_2 \;,\; x_3 + i x_6 \;,\; x_5 + i x_4),$$
$$(x_1 + i x_4 \;,\; x_3 + i x_2 \;,\; x_5 + i x_6),$$
$$(x_1 + i x_6 \;,\; x_3 + i x_4 \;,\; x_5 + i x_2).$$

Solcher gerader Linien giebt es $\frac{16 \cdot 60}{3} = 320.$

In den vorstehenden Betrachtungen können überall die Worte Eckpunkt und Seitenfläche vertauscht werden.

Die 30 Directricen der 15 durch die 6 Fundamentalcomplexe bestimmten Congruenzen sind die Kanten von 15 (Fundamental-) Tetraedern.

Durch jeden der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder gehen 15 Seitenflächen; in jeder der 60 Seitenflächen liegen 15 Eckpunkte.

Es giebt 360 gerade Linien, welche je zwei der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder enthalten. Dieselben geraden Linien bilden den Durchschnitt von je zwei der 60 Seitenflächen.

Es giebt 320 gerade Linien, auf welchen je drei der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder liegen. Nach denselben geraden Linien schneiden sich je drei der 60 Seitenflächen.

Die 30 Directricen der 15 durch die sechs Fundamentalcomplexe bestimmten Congruenzen enthalten je sechs der 60 Eckpunkte und sind der Durchschnitt von je sechs der 60 Seitenflächen.

Die sechs Eckpunkte, sowie die sechs Seitenflächen gehören paarweise zusammen. Je zwei Paare sind zu einander harmonisch.

9. Je drei der Fundamentalcomplexe, beispielsweise 1, 2, 3, bestimmen eine Fläche des zweiten Grades vermöge der Linien ihrer einen Erzeugung. Die Directricen der Congruenzen (2, 3), (3, 1) (1, 2) sind Linien zweiter Erzeugung. Indem diese Directricen den Complexen 4, 5, 6 angehören, ist klar, dass die Complexe 4, 5, 6 dieselbe Fläche zweiten Grades vermöge der Linien ihrer anderen Erzeugung bestimmen.

Die sechs Complexe lassen sich auf $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = 10$fache Weise in zwei Gruppen von drei theilen. *Je zwei zusammengehörige Gruppen bestimmen dieselbe Fläche des zweiten Grades vermöge ihrer verschiedenen Erzeugungen.*

Die zehn so definirten Flächen mögen die zehn *Fundamentalflächen* heissen.

Je zwei zusammengehörige der 30 Directricen gehören vier der Fundamentalflächen als Erzeugende an. So liegt das Directricenpaar (1, 2) auf den Flächen (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6). In Bezug auf die übrigen sechs Fundamentalflächen sind die Directricen (1, 2) einander conjugirte Polaren.

In Bezug auf eins der Fundamentaltetraeder theilen sich die Fundamentalflächen in zwei Gruppen. Die sechs Flächen der einen Gruppe enthalten je vier der sechs Tetraederkanten, in Bezug auf die Flächen der anderen Gruppe ist das Tetraeder sich selbst conjugirt.

Um eine der Fundamentalflächen, etwa (1, 2, 3) $\equiv$ (4, 5, 6), darzustellen, diene die Bedingung, welche ausspricht, dass eine gerade

Linie die Fläche berührt, mit anderen Worten, die Complexgleichung der Fläche*). Dieselbe wird:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

10. In Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe *gruppiren sich die geraden Linien des Raumes und die Ebenen und Punkte desselben zu in sich geschlossenen Systemen*, ähnlich wie dies mit den Ebenen und Punkten bei zwei oder drei in Involution liegenden Complexen der Fall war.

Sei zunächst eine gerade Linie gegeben, deren Coordinaten sind:

$$a_1 \,,\; a_2 \,,\; \ldots\ldots \,,\; a_6 \,.$$

So ist:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots\cdots + a_6^2 = 0.$$

Indem diese Relation bei willkürlicher Annahme der Vorzeichen der Coordinaten erfüllt bleibt, erhält man einer jeden der $2^5 = 32$ Zeichencombinationen:

$$\pm a_1 \,,\; \pm a_2 \,,\; \ldots\ldots \,,\; \pm a_6$$

entsprechend eine gerade Linie. Die Beziehung der 32 geraden Linien zu einander ist offenbar eine gegenseitige.

Mit Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe gruppiren sich die geraden Linien des Raumes zu 32 zusammen.

Iudem man sich aus dem Schema:

$$\left|\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \pm a_1 & \pm a_2 & \pm a_3 & \pm a_4 & \pm a_5 & \pm a_6 \end{array}\right|$$

die zweigliedrigen Determinanten gebildet und dieselben gleich Null gesetzt denkt, übersieht man sofort, dass von den 32 Linien

2 · 15mal 16 einem Complexe,
4 · 20mal 8 einer Congruenz,
8 · 15mal 4 einer Fläche zweiten Grades

angehören, wo jede der 32 Linien auf 15 der Complexe, auf 20 der Congruenzen und auf 15 der Flächen zweiten Grades liegt.

---

*) Sind f_1, f_2, f_3 drei lineare Complexe, A_{11}, A_{22}, A_{33} ihre Invarianten, A_{12} u. s. f. ihre simultanen Invarianten, so ist die Complexgleichung des durch sie bestimmten Hyperboloids:

$$0 = \left|\begin{array}{cccc} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ f_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ f_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right| .$$

Die 32 Linien theilen sich in zwei Gruppen von 16, je nachdem von ihren Coordinaten eine gerade oder eine ungerade Anzahl ein gleiches Zeichen besitzt. Wenn von einer geraden Linie einer der beiden Gruppen eine ebene Curve erzeugt wird, geschieht ein Gleiches von den übrigen 15 Linien derselben Gruppe; die 16 Linien der anderen Gruppe erzeugen Kegelflächen.

Gegen eine beliebige Linie der einen Gruppe sondern sich die der anderen Gruppe in solche, welche ihre conjugirten Polaren in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe, und in solche, welche ihre conjugirten Polaren in Bezug auf die zehn Fundamentalflächen sind. Die Coordinaten der ersteren sechs unterscheiden sich von den Coordinaten der angenommenen geraden Linie durch einen Zeichenwechsel; die der letzteren zehn durch drei.

Die Gleichung des 32^{ten} Grades, durch welche ein derartiges System von geraden Linien, wie das hier betrachtete, bestimmt wird, verlangt, nachdem die sechs Fundamentalcomplexe durch eine Gleichung des 6^{ten} Grades gefunden worden sind, nur noch die Auflösung von Gleichungen des zweiten Grades.

Das System der 32 zusammengehörigen geraden Linien vereinfacht sich, sobald eine oder mehrere der Coordinaten a gleich Null sind. Insbesondere entsprechen sich diejenigen geraden Linien, welche zwei zusammengehörige der 30 Directricen schneiden, zu 8, diejenigen, welche Erzeugende einer der zehn Fundamentalflächen sind, zu 4, endlich die 30 Directricen selbst zu 2.

11. Sei die Gleichung der Projection des in einer beliebig angenommenen Ebene dem Complexe

$$x_k = 0$$

entsprechenden Punktes auf eine der Coordinatenebenen:

$$a_k\, u + b_k\, v + c_k\, w = 0.$$

Dann verschwindet, zufolge der Bedingungsgleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_6^2 = 0$$

der Ausdruck

$$\sum_{1\ldots 6} (a_k\, u + b_k\, v + c_k\, w)^2$$

identisch. Es verschwindet also auch die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & b_1\, c_1 & c_1\, a_1 & a_1\, b_1 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 & b_2\, c_2 & c_2\, a_2 & a_2\, b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ a_6^2 & b_6^2 & c_6^2 & b_6\, c_6 & c_6\, a_6 & a_6\, b_6 \end{vmatrix},$$

was aussagt, dass die sechs Punkte 1, 2, ..., 6 auf einem Kegelschnitt liegen.

Die sechs Punkte, welche einer beliebigen Ebene in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechen, liegen auf einer Curve der zweiten Ordnung.

Die sechs Ebenen, welche einem beliebigen Punkte in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechen, umhüllen einen Kegel der zweiten Classe.

Wenn die beliebig angenommene Ebene durch einen der 60 Eckpunkte der 15 Fundamentaltetraeder hindurchgeht, so wird das von den sechs, den Fundamentalcomplexen entsprechenden Punkten gebildete Sechseck ein Brianchon'sches. Der Tetraedereckpunkt wird der Brianchon'sche Punkt. Das Sechseck erhält zwei, bezüglich drei in gerader Linie liegende Brianchon'sche Punkte, wenn die beliebig angenommene Ebene eine der 360, bezüglich der 320 zu dem System der Fundamentaltetraeder gehörigen geraden Linien enthält. Die Zahl der Brianchon'schen Punkte wird vier, wenn die Ebene durch eine der 360 geraden Linien und eine dieselbe schneidende der 320 geraden Linien hindurchgelegt ist.

Wenn die beliebig anzunehmende Ebene eine der zehn Fundamentalflächen berührt, so liegen die sechs den Fundamentalcomplexen entsprechenden Punkte zu drei auf zwei geraden Linien: den beiden Erzeugenden der Fundamentalfläche, welche die Ebene enthält. Ist die Ebene durch eine der 30 Directricen hindurchgelegt, so rücken von den sechs Punkten vier auf die Directrix, die anderen zwei fallen in den Durchschnittspunkt mit der zugehörigen Directrix. Fällt endlich die Ebene mit einer der Seitenflächen der Fundamentaltetraeder zusammen, so rücken die sechs Punkte paarweise in die drei zugehörigen Tetraedereckpunkte.

12. Die sechs Punkte, welche einer gegebenen Ebene in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechen, seien mit:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

bezeichnet. Einem jeden dieser Punkte entsprechen ausser der gegebenen fünf weitere Ebenen. Es giebt das, insofern die Ebene, welche 1 in x_2 entspricht, mit der Ebene zusammenfällt, die zu 2 in x_1 gehört, im Ganzen 15 neue Ebenen, welche die gegebene nach den 15 Verbindungslinien der sechs Punkte unter sich schneiden. Die drei Ebenen (2, 3), (3, 1), (1, 2) schneiden sich (vrgl. n. 3) in dem Pole der gegebenen Ebene mit Bezug auf die Fundamentalfläche (1, 2, 3). Indem diese Fläche mit der Fläche (4, 5, 6) identisch ist, schneiden sich die Ebenen (5, 6), (6, 4), (4, 5) in demselben Punkte. Die sechs Ebenen, welche diesem Punkte in den sechs Fundamentalcomplexen

$$x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \;,\; x_4 \;,\; x_5 \;,\; x_6$$

entsprechen, fallen mit den Ebenen:

$$(2,3)\;,\;(3,1)\;,\;(1,2)\;,\;(5,6)\;,\;(6,4)\;,\;(4,5)$$

zusammen, welche in der That, wie dies aus der Betrachtung des Sechsecks 1 2 3 4 5 6 hervorgeht, einen Kegel der zweiten Classe umhüllen.

Mit Bezug auf die Fundamentalcomplexe gruppiren sich die Ebenen und Punkte des Raumes zu in sich geschlossenen Systemen von 16 Ebenen und 16 Punkten. In jeder der 16 Ebenen liegen sechs der 16 Punkte, durch jeden der 16 Punkte gehen sechs der 16 Ebenen. Die sechs Punkte in einer Ebene liegen auf einer Curve der zweiten Ordnung, die sechs Ebenen durch einen Punkt umhüllen einen Kegel der zweiten Classe.

Wenn eine der 16 Ebenen gegeben ist, findet man die 16 Punkte, indem man die ihr in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechenden Punkte und die ihr in Bezug auf die 10 Fundamentalflächen conjugirten Pole construirt.

Von der hier betrachteten Art ist das System der 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkte der Flächen vierter Ordnung und vierter Classe, die Herr Kummer untersucht hat).*

Wenn eine von 32 in Bezug auf die Fundamentalcomplexe zusammengehörigen geraden Linien in einer der 16 Ebenen eines solchen Systems liegt, so vertheilen sich die 15 Linien derselben Gruppe auf die 15 weiteren Ebenen und die 16 Linien der anderen Gruppe auf die 16 Punkte. Berührt insbesondere die angenommene gerade Linie den in der betreffenden Ebene liegenden Kegelschnitt, so findet dasselbe bei den 15 Linien derselben Gruppe statt, und die 16 Linien der anderen Gruppe sind Seiten der von den 16 Punkten ausgehenden Kegel.

Die 32 zusammengehörigen Linien sind durch die Vorzeichen ihrer Coordinaten unterschieden. Es giebt diese Bemerkung unmittelbar die Bezeichnung derselben durch fünf Indices, welche zwei verschiedene Werthe annehmen können. Auf ähnliche Weise können die 16 Ebenen und 16 Punkte des hier betrachteten Systems bezeichnet werden. Die 16 Ebenen entsprechen den geraden Linien der einen, die 16 Punkte denen der anderen Gruppe. Es geht hieraus hervor, dass die Gleichung 16ten Grades, welche die 16 Ebenen bestimmt, von der eben betrachteten Gleichung des 32ten Grades nur dadurch verschieden ist, dass bei ihr das Differenzenproduct jener als bekannt vorausgesetzt wird.

---

*) Monatsberichte der Berliner Akad. 1864.

Wenn einer von den 16 Punkten des hier betrachteten Systems in einer der 16 Ebenen eines beliebigen ähnlichen Systems liegt, findet ein Gleiches für die übrigen 15 Punkte statt, und jede der 16 Ebenen enthält einen der 16 Punkte des zweiten Systems.

Die 16 Ebenen eines Systems schneiden sich nach $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ geraden Linien, welche zugleich die Verbindungslinien der 16 Punkte sind. Dieselben sondern sich in 15 Gruppen von jedesmal 8. Die Linien einer Gruppe gehören denselben beiden Fundamentalcomplexen an und haben also die beiden entsprechenden Directricen zu gemeinschaftlichen Transversalen. Es giebt dies das Mittel, aus dem Systeme der 16 Ebenen und 16 Punkte die 30 Directricen und die 15 Fundamentaltetraeder zu construiren.

Ausser in den 16 Punkten des Systems schneiden sich die 16 Ebenen desselben zu drei in 360 Punkten, welche zu sechs auf den 120 Durchschnittslinien liegen. Ebenso giebt es 360 Ebenen, welche drei der 16 Punkte des Systems enthalten. Sie schneiden sich zu sechs nach denselben 120 geraden Linien.

Wenn eine der 16 Ebenen des Systems gegen die sechs Fundamentalcomplexe eine ausgezeichnete Lage hat, findet ein Gleiches für die übrigen 15 Ebenen und die 16 Punkte statt. Besonders hervorzuheben ist dasjenige System, welches entsteht, wenn eine der Ebenen einen der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder enthält. Dann gehen die 16 Ebenen zu vier durch die Eckpunkte des fraglichen Tetraeders und die 16 Punkte liegen zu vier in den Seitenflächen desselben. Es ist das System das Singularitätensystem eines Tetraedroids*) geworden. Die Gleichung 16^ten^ Grades, welche die Ebenen des Systems bestimmt, ist hier algebraisch lösbar, indem dieselbe nur die Auflösung einer biquadratischen Gleichung und mehrerer quadratischer verlangt.

III.

Die Kummer'sche Fläche und ihr Zusammenhang mit den Complexen zweiten Grades.

13. Als Gleichung des zu untersuchenden Complexes zweiten Grades sei die folgende gegeben:

(1) $$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots\cdots + k_6 x_6^2 = 0.$$

Dabei ist:

(2) $$x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_6^2 = 0,$$

so dass der Complex unverändert bleibt, wenn statt k_α allgemein ge-

*) Cayley in Liouville's Journal XI.

schrieben wird $k_\alpha + \lambda$. Die vier Constanten, welche hiernach noch in der Gleichung (2) enthalten sind, geben mit den 15 Constanten der Fundamentalcomplexe die 19 Constanten des Complexes zweiten Grades.

Die Gleichungsform (2) sagt aus, *dass der gegebene Complex und alle von demselben unmittelbar abhängigen geometrischen Gebilde sich selbst mit Bezug auf das System der sechs Fundamentalcomplexe entsprechen*)*.

Es gruppiren sich also die Linien des Complexes in Systeme von 32. Jedesmal 16 Complexcurven und 16 Complexkegel gehören zusammen u. s. f.

Aus diesem Satze leiten sich, unter Zugrundelegung der von Plücker entwickelten Eigenschaften der Complexe des zweiten Grades**), die im Folgenden aufgeführten Theoreme ab.

14. Diejenigen Punkte, deren Complexkegel in ein Ebenenpaar zerfällt, die sogenannten *singulären Punkte*, bilden eine Fläche der 4ten Ordnung und Classe, mit 16 Doppelpunkten und 16 Doppelebenen. Dieselbe Fläche wird von den *singulären Ebenen* umhüllt, solchen Ebenen, deren Complexcurve sich in das System zweier Punkte aufgelöst hat***).

Eine derartige Fläche soll im Folgenden eine *Kummer'sche Fläche* genannt werden. In ihrer Beziehung zum Complexe heisse sie seine *Singularitätenfläche*.

Die nächstfolgenden Betrachtungen untersuchen die Kummer'sche Fläche als solche, abgesehen von ihrer Beziehung zu dem gegebenen Complexe.

Eine Kummer'sche Fläche entspricht sich selbst mit Bezug auf ein System von sechs Fundamentalcomplexen.

Die bezüglichen Fundamentalcomplexe †) seien jedesmal, nach wie vor, durch $x_1, x_2, \ldots, x_6$ bezeichnet.

---

*) Dieses gegenseitige Entsprechen kann statt als durch die sechs Fundamentalcomplexe auch als durch die zehn Fundamentalflächen vermittelt angesehen werden.

**) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Von Julius Plücker. Leipzig. B. G. Teubner. 1868, 1869.

***) Plücker. Neue Geometrie. n. 311, 320.

†) Für die Fresnel'sche Wellenfläche, die sich aus dem Ellipsoid:

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

ableitet, sind die Fundamentalcomplexe die folgenden:

$$\begin{aligned}
&(yz' - y'z) + a\sqrt{-1}\,(x - x') = 0, \qquad &(yz' - y'z) - a\sqrt{-1}\,(x - x') = 0,\\
&(zx' - z'x) + b\sqrt{-1}\,(y - y') = 0, \qquad &(zx' - z'x) - b\sqrt{-1}\,(y - y') = 0,\\
&(xy' - x'y) + c\sqrt{-1}\,(z - z') = 0, \qquad &(xy' - x'y) - c\sqrt{-1}\,(z - z') = 0.
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Tangentialebenen, welche sich an eine gegebene Kummer'sche Fläche durch eine gerade Linie

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_6$$

legen lassen, dient eine Gleichung des vierten Grades. Dieselbe kann nur die Quadrate der Coordinaten a enthalten. Denn eine Veränderung von $+x_k$ in $-x_k$ lässt die Fläche unverändert. Es sind also die vier Tangentialebenen, welche durch eine beliebige der 32 geraden Linien:

$$\pm a_1\ ,\ \pm a_2\ ,\ \ldots\ ,\ \pm a_6$$

hindurchgehen, alle durch dieselbe biquadratische Gleichung bestimmt.

Den vier Tangentialebenen, welche sich durch die gegebene gerade Linie an die Fläche legen lassen, sind die vier Durchschnittspunkte einer beliebigen der 16 Linien der anderen Gruppe mit der Fläche reciprok zugeordnet. Es folgt hieraus und aus dem Vorhergehenden, dass dieselbe Gleichung die durch eine beliebige gerade Linie gehenden Tangentialebenen und die auf derselben liegenden Durchschnittspunkte bestimmt.

Das anharmonische Verhältniss der vier Tangentialebenen, welche sich durch eine gerade Linie an eine Kummer'sche Fläche legen lassen, ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse der vier Durchschnittspunkte derselben Linie mit der Fläche.

15. Es sei ein Punkt einer Kummer'schen Fläche gegeben. Aus demselben leitet sich vermöge der sechs entsprechenden Fundamentalcomplexe ein System von 16 Punkten und 16 Ebenen ab. Die Punkte sind Punkte der Fläche, die Ebenen Ebenen derselben. Ebenso entspricht der Tangentialebene in dem gegebenen Punkte ein System von 16 Ebenen und 16 Punkten der Fläche. Die beiden Systeme stehen in der gegenseitigen Beziehung, dass in jeder Ebene des einen ein Punkt des anderen liegt, welcher der zugehörige Berührungspunkt ist. Es folgt hieraus, dass die sechs geraden Linien, nach welchen eine Ebene des einen Systems von den sechs dem zugehörigen Berührungspunkte in dem anderen Systeme entsprechenden Ebenen geschnitten wird, ausser in dem allen gemeinsamen Punkte jede noch in einem derjenigen sechs Punkte berühren, welche der angenommenen Ebene in den Fundamentalcomplexen entsprechen. Es sind also diese Linien Doppeltangenten der Fläche. Somit ergeben sich die folgenden Sätze:

Nachdem die einer Kummer'schen Fläche zugehörigen Fundamentalcomplexe durch eine Gleichung des sechsten Grades bestimmt worden sind, leiten sich aus den Coordinaten eines Punktes (einer Ebene) der Fläche die Coordinaten von 32 Punkten, 32 Ebenen und 96 Doppeltangenten derselben rational ab.

Die sechs Tangenten, welche sich von dem Berührungspunkte einer

Ebene der Kummer'schen Fläche an die in derselben liegende Durchschnittscurve ziehen lassen, berühren in den sechs auf einem Kegelschnitt gelegenen Punkten, welche der angenommenen Ebene in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechen.

Die 28 Doppeltangenten einer beliebigen ebenen Durchschnittscurve einer Kummer'schen Fläche theilen sich in zwei Gruppen von 16 und 12. Die Doppeltangenten der ersten Gruppe sind der Durchschnitt der Ebene der Curve mit den 16 Doppelebenen der Fläche. Die 12 Doppeltangenten der zweiten Gruppe sondern sich in Gruppen von 2. Die sechs Punkte, in welchen sich bezüglich die Linien der verschiedenen Paare schneiden, sind die auf einem Kegelschnitt gelegenen sechs Punkte, welche der Ebene der Curve in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechen.

Die Doppeltangenten einer Kummer'schen Fläche bilden sechs verschiedene Congruenzen der zweiten Ordnung und Classe, deren jede einem der sechs Fundamentalcomplexe angehört).*

16. Ausgezeichnet unter den in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe zusammengehörigen Systemen von 16 Punkten und 16 Ebenen der Kummer'schen Fläche ist das System der 16 Doppelpunkte und 16 Doppelebenen derselben. An Stelle des zugehörigen zweiten Systems tritt in diesem Falle das System der 16 Berührungskegel und der 16 Berührungscurven. Die 96 Doppeltangenten werden durch die 96 Büschel solcher gerader Linien ersetzt, welche bezüglich innerhalb einer der Doppelebenen durch einen der Doppelpunkte hindurchgehen.

*Die Bestimmung der Singularitäten einer Kummer'schen Fläche hängt von der Auflösung einer Gleichung sechsten Grades und mehrerer quadratischer Gleichungen ab**).*

Um die Fundamentaltetraeder aus dem Singularitätensystem einer Kummer'schen Fläche zu finden, hat man diejenigen 30 geraden Linien zu construiren, welche acht der 120 Durchschnittslinien der 16 Doppelebenen schneiden.

Wenn ausser den sechs Fundamentalcomplexen eine der Doppelebenen der Kummer'schen Fläche bekannt ist, lässt sich die Fläche construiren***). Denn indem dann durch die Fundamentalcomplexe sämmtliche 16 Doppelebenen und die Berührungscurven in ihnen ge-

---

*) Vergl. Kummer. Abhandl. der Berl. Akad. 1866.

**) C. Jordan in Crelle's Journal. LXX.

***) Wenn man die Doppelebene durch eine derjenigen 320 geraden Linien hindurchlegt, welche drei der 60 Eckpunkte der 15 Fundamentaltetraeder enthalten, so erhält man eine Fläche, die dem Modelle entspricht, dessen Herr Kummer (Monatsberichte der Berl. Akad. 1864) Erwähnung thut.

geben sind, kennt man zur Construction einer beliebigen ebenen Durchschnittscurve der Fläche 16 Doppeltangenten und die Berührungspunkte auf denselben.

Enthält die gegebene Doppelebene einen der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder, so wird die zugehörige Kummer'sche Fläche ein Tetraedroid.

Ein Tetraedroid ist dadurch charakterisirt, dass die sechs in einer Doppelebene desselben liegenden Doppelpunkte ein Brianchon'sches Sechseck bilden.

Die Singularitäten eines Tetraedroids sind algebraisch bestimmbar.

17. Wir wenden uns zur Betrachtung der Complexe zweiten Grades zurück.

Diejenigen geraden Linien, welche Durchschnittslinien zweier Ebenen sind, in welche sich ein Complexkegel aufgelöst hat, oder, was auf dasselbe hinauskommt, diejenigen geraden Linien, welche Verbindungslinien zweier Punkte sind, in welche eine Complexcurve zerfallen ist, sind die *singulären Linien* des Complexes. Dieselben bilden eine Congruenz der vierten Ordnung und Classe. Die singulären Linien berühren die Singularitätenfläche des Complexes. Der Berührungspunkt heisst *der zugeordnete singuläre Punkt*, die Berührungsebene *die zugeordnete singuläre Ebene.* Der Complexkegel, dessen Mittelpunkt der zugeordnete singuläre Punkt ist, hat sich in die beiden Tangentialebenen der Singularitätenfläche aufgelöst, die ausser der doppelt zu zählenden zugeordneten singulären Ebene durch die singuläre Linie hindurchgehen. Entsprechend ist die Complexcurve in der zugeordneten singulären Ebene in das System derjenigen beiden Punkte zerfallen, welche der singulären Linie neben dem doppelt zu zählenden zugeordneten singulären Punkte mit der Singularitätenfläche gemein sind*).

Die Complexcurve, welche in einer beliebigen Ebene liegt, berührt die Durchschnittscurve vierter Ordnung der Ebene mit der Singularitätenfläche in vier Punkten. Gemeinschaftliche Tangenten beider Curven in diesen Punkten sind die vier in der Ebene liegenden singulären Linien**).

Welche unter den Tangenten der Singularitätenfläche in einem gegebenen Punkte derselben dem gegebenen Complexe als singuläre Linie angehört, ist durch die Fläche selbst noch nicht bestimmt. Es kann eine aus der einfach unendlichen Anzahl der Tangenten willkürlich als singuläre Linie angenommen werden; dann lässt sich ein

*) Plücker, Neue Geometrie. n. 317.
**) Plücker, Neue Geometrie. n. 318.

zugehöriger Complex eindeutig bestimmen. Aus der zugeordneten singulären Ebene leitet sich vermöge der sechs Fundamentalcomplexe ein System von 16 singulären Ebenen ab. Sobald die beiden Punkte, in welche die Complexcurve für die eine singuläre Ebene zerfallen ist, durch Auflösung einer quadratischen Gleichung bestimmt worden sind, sind die entsprechenden Punkte in den übrigen Ebenen bekannt. Sechs unter denjenigen Complexlinien, welche durch einen der Schnittpunkte von drei der 16 Ebenen hindurchgehen, sind also gegeben und desshalb die Complexkegel für diese Punkte linear construirbar. Indem diese Schnittpunkte zu sechs auf einer jeden der 120 Durchschnittslinien von zwei der 16 Ebenen liegen, kennt man die zu diesen Linien gehörigen Complexflächen. Zur Construction der in einer beliebigen Ebene liegenden Complexcurve kann man also über 240 Tangenten verfügen.

Wenn eine Kummer'sche Fläche und eine dieselbe berührende gerade Linie gegeben ist, so kann man einen Complex zweiten Grades eindeutig construiren, welcher die Fläche zur Singularitätenfläche und die gerade Linie zur singulären Linie hat.

Eine Kummer'sche Fläche ist die Singularitätenfläche für eine einfach unendliche Schaar von Complexen zweiten Grades.

Eine Kummer'sche Fläche hängt von 18 Constanten ab).*

Wenn die gegebene gerade Linie eine Doppeltangente der Fläche ist, so artet der zugehörige Complex in den doppelt zu zählenden linearen Fundamentalcomplex aus, welchem die Doppeltangente angehört.

Zu der Schaar von Complexen zweiten Grades, welche eine gegebene Kummer'sche Fläche zur Singularitätenfläche haben, gehören auch die doppelt zu zählenden sechs linearen Fundamentalcomplexe. Als singuläre Linien eines solchen Complexes sind die ihm angehörigen Doppeltangenten der Fläche anzusehen.

18. Ausgezeichnet unter den singulären Linien des gegebenen Complexes sind diejenigen, welche die Singularitätenfläche osculiren. Die Tangenten im Berührungspunkte gehören sämmtlich dem gegebenen Complexe an.

Wenn eine Kummer'sche Fläche und eine dieselbe berührende gerade Linie gegeben ist, giebt es ausser dem eben construirten noch zwei weitere Complexe, welche die Fläche zur Singularitätenfläche haben und die gerade Linie (aber nicht als singuläre Linie) enthalten. Singuläre Linien in dem Berührungspunkte der gegebenen sind für diese Complexe die beiden Haupttangenten in diesem Punkte.

---

*) Es stimmt das mit der von Herrn Kummer gegebenen Zählung überein.

Bei der Construction eines solchen Complexes sind zunächst die beiden Haupttangenten im Berührungspunkte durch eine quadratische Gleichung zu bestimmen. Die beiden Punkte, in welche sich die Complexcurve innerhalb der zugeordneten singulären Ebene aufgelöst hat, sind dann linear gegeben.

Die Complexcurve in einer beliebigen Ebene hat mit der in derselben Ebene liegenden Durchschnittscurve vierter Ordnung der Singularitätenfläche ausser den vier doppelt zu zählenden singulären Linien noch $2 . 4 . 3 - 2 . 4 = 16$ Tangenten gemein. Die Berührungspunkte derselben mit der Durchschnittscurve der Singularitätenfläche sind diejenigen Punkte, in welchen die angenommene Ebene von der Curve solcher Punkte der Singularitätenfläche geschnitten wird, in welchen die zugehörige singuläre Linie mit einer Haupttangente zusammenfällt.

Die Curve der singulären Punkte, deren zugeordnete singuläre Linien die Singularitätenfläche osculiren, ist von der 16. Ordnung.

19. Sei eine Kummer'sche Fläche und eine beliebige gerade Linie gegeben. Durch die gerade Linie gehen vier Ebenen der Fläche, und auf ihr liegen vier Punkte derselben. Die biquadratische Gleichung zur Bestimmung der vier Ebenen ist dieselbe, wie die zur Bestimmung der vier Punkte. Dementsprechend kann man die vier Ebenen den vier Punkten einzeln zuordnen, und zwar auf vierfache Weise. Nachdem über die Art der Zuordnung entschieden ist, ziehe man in einer der Ebenen durch den Berührungspunkt mit der Kummer'schen Fläche und den zugeordneten Punkt eine gerade Linie. Derjenige Complex, welcher die gegebene Kummer'sche Fläche zur Singularitätenfläche und die construirte gerade Linie zur singulären Linie hat, enthält offenbar die gegebene gerade Linie.

Es lassen sich vier Complexe construiren, welche eine gegebene Kummer'sche Fläche zur Singularitätenfläche haben und die ausserdem eine gegebene gerade Linie enthalten.

Die beiden auf der construirten singulären Linie liegenden Punkte bestimmen sich linear, indem der eine als Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linie mit der Fläche bekannt ist.

Wenn die gegebene gerade Linie die Singularitätenfläche berührt, fallen zwei von den vier vorstehend construirten Complexen in denjenigen zusammen, der die gegebene Linie zur singulären hat.

Die Tangenten der Singularitätenfläche sind solche gerade Linien, für welche die biquadratische Gleichung, welche die vier einer gegebenen geraden Linie zugehörigen Complexe bestimmt, eine doppelte Wurzel hat.

Die Complexgleichung der Singularitätenfläche hat die Form einer Discriminante.

20. Die einfach unendliche Schaar der zu einer gegebenen Kummer'schen Fläche gehörigen Complexe zweiten Grades bestimmt in jeder Ebene des Raumes ein System von Kegelschnitten, welche die Durchschnittscurve vierter Ordnung der Kummer'schen Fläche mit der Ebene viermal berühren. Das System ist von der vierten Classe. Indem als Ausartungskegelschnitte die sechs den Fundamentalcomplexen entsprechenden Punkte mit ihrem Doppeltangentenpaare anzusehen sind, ist das System von der Ordnung $2 \cdot 4 - 6 = 2$.

Durch eine Kummer'sche Fläche wird in jeder Ebene des Raumes ein Kegelschnittsystem der vierten Classe und zweiten Ordnung bestimmt.

21. Diejenigen Linien des Complexes, welche innerhalb einer *Doppelebene* der Singularitätenfläche verlaufen, schneiden sich in einem Punkte der Berührungscurve. Sie sind sämmtlich singuläre Linien. Es kann dieser Punkt beliebig auf der Berührungscurve angenommen werden; dann ist ein zugehöriger Complex linear bestimmt. Lässt man den Punkt in einen der sechs auf der Berührungscurve liegenden Doppelpunkte rücken, so artet der Complex in denjenigen Fundamentalcomplex aus, welchem das durch den Doppelpunkt in der angenommenen Ebene gehende Büschel gerader Linien angehört. Auf ähnliche Weise entspricht jedem *Doppelpunkte* der Fläche eine Ebene, welche den Tangentialkegel im Doppelpunkte berührt*).

Die 16 Punkte und 16 Ebenen entsprechen einander in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe.

Im Allgemeinen sind die Linien des gegebenen Complexes keine Doppeltangenten der Singularitätenfläche. Es findet dies nur für diejenigen 96 singulären Linien statt, welche innerhalb einer Doppelebene der Fläche durch einen Doppelpunkt gehen.

Diejenigen 16 singulären Linien, welche in einer Doppelebene der Singularitätenfläche liegen und die Berührungscurve der Doppelebene berühren, sind die einzigen Complexlinien, welche die Singularitätenfläche vierpunktig berühren. Die 16 entsprechenden singulären Linien, welche durch die Doppelpunkte der Singularitätenfläche gehen, sind die einzigen Complexlinien, welche die dualistisch entgegengesetzte Eigenschaft besitzen.

22. Einer jeden geraden Linie entspricht in Bezug auf einen Complex zweiten Grades eine zweite gerade Linie als *Polare*. Dieselbe steht zu der ersten in der doppelten Beziehung, einmal, dass

*) Plücker. Neue Geometrie. n. 321.

sie der geometrische Ort ist für die Pole der ersten geraden Linie mit Bezug auf alle Curven, die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen von Linien des Complexes umhüllt werden, dann, dass sie umhüllt wird von den Polarebenen der ersten geraden Linie mit Bezug auf alle Kegel, die in den Punkten derselben von Linien des Complexes gebildet werden. Diese Beziehung zwischen den beiden Linien ist indess keine gegenseitige. Abgesehen von den Linien des Complexes, deren jede sich selbst als Polare conjugirt ist, giebt es nur eine endliche Anzahl solcher gerader Linien, die selbst wieder die Polaren ihrer Polaren sind*).

Die Polaren der Diagonalen des von den vier in einer beliebigen Ebene liegenden singulären Linien gebildeten Vierseits schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt wird der *Pol* der Ebene mit Bezug auf den Complex genannt. Derselbe fällt zusammen mit dem Pol der Ebene in Bezug auf die Singularitätenfläche. — Auf ähnliche Weise entspricht jedem Punkte in Bezug auf den Complex eine *Polarebene.*

Der Pol einer singulären Ebene ist ihr Berührungspunkt mit der Singularitätenfläche, die Polarebene dieses Punktes ist wiederum die gegebene singuläre Ebene.

Aber im Allgemeinen ist die Beziehung zwischen Ebene und Pol, Punkt und Polarebene keine gegenseitige. Es tritt das — abgesehen von den singulären Ebenen und Punkten — nur bei einer endlichen Anzahl von Ebenen und Punkten ein**).

23. Der gegebene Complex des zweiten Grades werde auf ein beliebiges der fünfzehn Fundamentaltetraeder bezogen. Dann nimmt seine Gleichung die folgende Form an***):

$$\Sigma a_{ik} r_{ik}^2 + 2 A r_{\alpha\beta} r_{\gamma\delta} + 2 B r_{\alpha\gamma} r_{\delta\beta} + 2 C r_{\alpha\delta} r_{\beta\gamma} = 0,$$

wo r_{ik} Strahlen- oder Axencoordinaten bedeuten.

Wird die Gleichung des gegebenen Complexes zweiten Grades in Bezug auf eins der 15 Fundamentaltetraeder als Coordinatentetraeder geschrieben, so treten in derselben ausser den Quadraten der Veränderlichen die Producte von nur solchen Veränderlichen auf, welche sich auf gegenüberstehende Kanten des Tetraeders beziehen.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Gleichungsform für die Fundamentaltetraeder charakteristisch ist. Man schliesst weiter:

Wenn der gegebene Complex auf ein beliebiges Coordinatentetraeder bezogen wird und in der entsprechenden Gleichung zwei Veränderliche,

*) Plücker, Neue Geometrie. n. 299.
**) Plücker, Neue Geometrie. n. 328, 330, 337.
***) Vergl. n. 6.

die sich auf gegenüberstehende Kanten des Coordinatentetraeders beziehen, ausser als Quadrate nur in gegenseitiger Verbindung auftreten, so sind die betreffenden Kanten zwei zusammengehörige aus dem System der Fundamentaltetraeder.

Die vorstehende Gleichungsform zeigt, dass die gegenüberstehenden Kanten des zu Grunde gelegten Tetraeders einander gegenseitig entsprechende Polaren in Bezug auf den gegebenen Complex sind.

Von den 30 Kanten der Fundamentaltetraeder entsprechen sich die zusammengehörigen in Bezug auf den Complex gegenseitig als Polaren.

Die 30 Kanten der Fundamentaltetraeder sind, abgesehen von den Linien des Complexes, die einzigen geraden Linien, welche diese Eigenschaft besitzen.

Und hieraus schliesst man:

Von den 60 Eckpunkten und 60 Seitenflächen der Fundamentaltetraeder entsprechen sich die zusammengehörigen gegenseitig in Bezug auf den Complex als Pol und Polarebene.

Es giebt, abgesehen von den singulären Punkten und Ebenen, keine weiteren Punkte und Ebenen, die sich gegenseitig in Bezug auf den Complex zugeordnet sind.

Insofern das Verhältniss von Ebene und Pol, Punkt und Polarebene als durch die Singularitätenfläche vermittelt angesehen werden kann, lassen sich die vorstehenden beiden Sätze auch als Eigenschaften der Kummer'schen Fläche aussprechen.

24. Aehnliche Untersuchungen, wie die vorstehenden, sind bereits in der Abhandlung über Complexe zweiten Grades von Herrn Battaglini*) enthalten. Nur sind die Voraussetzungen, welche er zu Grunde legt, nicht allgemein genug. Unter r_{ik} Strahlen- oder Axencoordinaten verstanden, giebt er dem Complexe zweiten Grades die folgende Gleichung:

$$\Sigma\, a_{ik}\, r_{ik}^2 = 0,$$

welche drei Glieder weniger besitzt, als die letzt-vorangehende, in welcher der Complex auf eins der Fundamentaltetraeder bezogen ist. In der That enthält sie nur 17 Constanten, während der Complex von 19 Constanten abhängt. Dementsprechend verschwinden drei der simultanen Invarianten, welche sich aus ihr und der zwischen den Liniencoordinaten bestehenden Bedingungsgleichung ableiten lassen.

Der Complex, welchen Herr Battaglini untersucht, ist dadurch particularisirt, dass für denselben die um eine passende Constante vermehrten Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_6$ einander entgegengesetzt gleich werden. In Folge dessen ist eins der Fundamentaltetraeder, dasselbe, auf

*) Atti della Reale Accademia di Napoli, III, so wie Giornale di Matematiche, Napoli. Anno VI.

welches der Complex in seiner vereinfachten Gleichung bezogen ist, vor den übrigen ausgezeichnet, und die Singularitätenfläche wird ein Tetraedroid, welches zu diesem Tetraeder gehört. (n. 16.)

IV.

Algebraische Darstellung.

25. Der gegebene Complex sei, wie oben, durch die Gleichung bestimmt:

$$(1)\qquad k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots + k_6 x_6^2 = 0,$$

wo:

$$(2)\qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 = 0.$$

Vermöge der Gleichung (1) ist es gestattet, die Grössen k um eine beliebige Constante wachsen zu lassen, ohne dass der Complex geändert wird.

Die *singulären Linien* des Complexes sind alsdann dargestellt*) durch (1), (2) und die folgende Gleichung:

$$(3)\qquad k_1^2 x_1^2 + k_2^2 x_2^2 + \cdots + k_6^2 x_6^2 = 0.$$

Sei unter (x) eine beliebige singuläre Linie verstanden, so sind die Coordinaten (y) einer derjenigen geraden Linien, welche innerhalb der (x) zugeordneten singulären Ebene durch den zugehörigen singulären Punkt gehen, von der folgenden Form:

$$(4)\qquad \varrho y_\alpha = (k_\alpha + \sigma)\, x_\alpha,$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor, σ eine Constante bedeutet**). Die durch (4) dargestellten geraden Linien mögen die *zugeordneten* der singulären Linie (x) heissen. Die Gesammtheit der zugeordneten Linien aller singulären Linien fällt mit der Gesammtheit der Tangenten der Singularitätenfläche zusammen.

Wenn die singuläre Linie (x) so bestimmt wird, dass die zugeordneten Linien dem gegebenen Complexe (2) angehören, so osculirt sie die Singularitätenfläche. Man findet also zur Darstellung *der osculirenden singulären Linien* ausser (1), (2), (3) die Gleichung:

$$(5)\qquad k_1^3 x_1^2 + k_2^3 x_2^2 + \cdots + k_6^3 x_6^2 = 0.$$

Die von den osculirenden singulären Linien gebildete Linienfläche ist von der 16. Ordnung und 16. Classe.

---

*) Plücker. Neue Geometrie. n. 300.
**) Plücker. Neue Geometrie. Ebenda.

Die *32 ausgezeichneten singulären Linien*, welche bezüglich in einer der Doppelebenen der Singularitätenfläche liegen und die in derselben enthaltene Berührungscurve berühren, oder durch einen der Doppelpunkte der Singularitätenfläche gehen und Erzeugende des Tangentialkegels in demselben sind, sind durch die Bedingung bestimmt, dass ihre zugeordneten singulären Linien selbst wieder singuläre Linien sind. Ihre Coordinaten genügen also ausser den Gleichungen (1), (2), (3), (5) auch noch der folgenden Gleichung:

$$(6)\qquad k_1^4\, x_1^2 + k_2^4\, x_2^2 + \cdots\cdots + k_6^4\, x_6^2 = 0.$$

Durch Auflösung findet man:

$$(7)\qquad \varrho x_1^2 = \frac{1}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)\cdots\cdots(k_6 - k_1)}$$

26. Wenn $x_1, x_2, \ldots, x_6$ und σ willkürliche Parameter bezeichnen, welche den Gleichungen (1), (2), (3) Genüge leisten, so ist eine beliebige *der Tangenten der Singularitätenfläche* durch die Gleichung (4) gegeben. Durch Elimination von $x_1, x_2, \ldots, x_6$ ergiebt sich:

$$(8)\qquad y_1^2 + y_2^2 + \cdots\cdots + y_6^2 = 0,$$

$$(9)\qquad \frac{y_1^2}{k_1+\sigma} + \frac{y_2^2}{k_2+\sigma} + \cdots\cdots + \frac{y_6^2}{k_6+\sigma} = 0,$$

$$(10)\qquad \frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^2} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^2} + \cdots\cdots + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^2} = 0.$$

Die Gleichung (9) ist eine Gleichung vierten Grades zur Bestimmung von σ. Die Gleichung (10) sagt aus, dass der nach σ genommene Differentialquotient der Gleichung (9) verschwinde.

Die Complexgleichung der Singularitätenfläche ist die nach σ genommene Discriminante der Gleichung (9).

Wie das sein muss, wird diese Complexgleichung vom 12. Grade.

Unter σ eine willkürliche Grösse verstanden, stellt die Gleichung (9) einen Complex des zweiten Grades dar. Derselbe hat mit dem gegebenen (2) die Singularitätenfläche gemein. Denn das System der Gleichungen (8), (9), (10) bleibt ungeändert, wenn k_α allgemein durch $\frac{1}{k_\alpha+\sigma}$ ersetzt wird.

Die Gleichung (9) *stellt das zu der Singularitätenfläche des gegebenen Complexes zugehörige System von Complexen zweiten Grades dar.*

Die Gleichung (9) ist durchaus analog den Gleichungen, welche bei der Bestimmung confocaler Curven oder Flächen zweiten Grades auftreten.

Wenn (y) eine gegebene gerade Linie bedeutet, bestimmt die Gleichung (9) vier zugehörige Werthe von σ. Von denselben werden zwei einander gleich, wenn (y) eine Tangente der Singularitätenfläche ist.

Die *Haupttangenten* der Singularitätenfläche sind dadurch charakterisirt, dass drei Wurzeln der Gleichung (9) gleich werden; sie sind also durch (8), (9), (10) und die folgende Gleichung gegeben:

$$\text{(11)} \qquad \frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^3} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^3} + \cdots + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^3} = 0 .$$

Endlich sind diejenigen geraden Linien, welche die Berührungscurven in den Doppelebenen der Singularitätenfläche umhüllen, bezüglich die Berührungskegel in den Doppelpunkten derselben erzeugen, durch (8), (9), (10), (11) und die folgende Gleichung bestimmt:

$$\text{(12)} \qquad \frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^4} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^4} + \cdots + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^4} = 0.$$

Sei irgend einem Werthe von σ entsprechend das System der Gleichungen (8), (9), (10), (11), (12) aufgelöst. Die in dem entsprechenden Complexe (9) den so bestimmten geraden Linien zugeordneten Linien sind selbst wieder singuläre Linien. Ihre zugeordneten Linien bilden *die Gesammtheit der in den Doppelebenen der Singularitätenfläche liegenden und der durch die Doppelpunkte derselben hindurchgehenden geraden Linien.* Die Coordinaten einer solchen geraden Linie lassen sich also unter der Form schreiben:

$$\text{(13)} \qquad \varrho x_\alpha = \left(\lambda + \frac{\mu}{k_\alpha+\sigma} + \frac{\nu}{(k_\alpha+\sigma)^2}\right) y_\alpha ,$$

wo y_α eine Lösung der Gleichungen (8), (9), (10), (11), (12) ist. Diese Form bleibt unverändert, welchen Werth man σ ertheilen mag.

Es erübrigt, die *Doppeltangenten* der Singularitätenfläche zu bestimmen. Für die von denselben gebildeten sechs Congruenzen ergiebt sich aus (9) und (10), indem σ der Reihe nach $= - k_1$, $= - k_2$ u. s. w. gesetzt wird:

$$\text{(14)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} y_1 = 0, & \dfrac{y_2^2}{k_2-k_1} + \cdots + \dfrac{y_6^2}{k_6-k_1} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_6 = 0, & \dfrac{y_1^2}{k_1-k_6} + \cdots + \dfrac{y_5^2}{k_5-k_6} = 0. \end{array} \right.$$

Auf dieselben Gleichungen kommt man aus (4), wenn man $\sigma = - k_1$, $= - k_2$ u. s. w. setzt und hierauf x_α aus (1), (2), (3) eliminirt.

Die bei den vorstehenden Betrachtungen vorausgesetzte Umformung der Complexgleichung ist in vielen Fällen nicht möglich. Unter die hier ausgeschlossenen Complexe gehört auch der von Herrn Th. Reye betrachtete, dessen Linien der Durchschnitt entsprechender

Ebenen zweier collinearer räumlicher Systeme sind*). Derartige Complexe sind durch das Auftreten von Doppellinien, Ausnahmpunkten und Ausnahmebenen**) ausgezeichnet. Eine Uebersicht über die bei ihnen zu unterscheidenden Fälle denke ich bei einer nächsten Gelegenheit zu geben.

---

*) Reye. Die Geometrie der Lage. Hannover, C. Rümpler. 1868.
**) Plücker, Neue Geometrie. n. 313.

Göttingen, 14. Juni 1869.

Die simultanen Systeme binärer Formen.

Von P. Gordan in Giessen.

In einer im 69^{ten} Bande des Crelle'schen Journals veröffentlichten Abhandlung habe ich für eine binäre Form n^{ten} Grades ein System von Covarianten und Invarianten aufgestellt, durch welche sich, wie ich bewies, alle Covarianten und Invarianten derselben ausdrücken liessen. Ich habe nun im Folgenden die dabei angewandten Methoden vereinfacht und auf die simultanen Covarianten und Invarianten mehrerer Formen ausgedehnt.

Anknüpfend an die von Herrn Clebsch (Crelles Journal Bd. 59.) gegebenen Sätze untersuche ich zunächst die symbolischen Producte, da sich alle Covarianten und Invarianten einer Anzahl binärer Formen durch Aggregate derselben ausdrücken lassen. Jede simultane Covariante kann als neue Form angesehen werden und giebt als solche zur Einführung neuer Symbole Anlass. Die diese neuen Symbole enthaltenden symbolischen Producte sind Aggregate anderer symbolischer Producte, welche einfachere Symbole enthalten, und umgekehrt lässt sich jedes symbolische Product als Aggregat anderer ausdrücken, welche weniger aber verwickeltere Symbole enthalten. Hierhin gehört auch die Behandlung der schon anderwärts untersuchten Uebereinanderschiebungen. Indem ich sodann zu Formensystemen übergehe, führe ich den Begriff des combinirten Systems ein, eines Systems von Formen, welche durch Uebereinanderschiebung von Formen gegebener Systeme entstehen und wende ihn auf eine wichtige Classe von Systemen, die vollständigen Systeme an, d. h. auf solche, bei denen alle durch Uebereinanderschiebung entstehende Formen sich als ganze Functionen der ursprünglichen ausdrücken lassen. Hierbei zeigt sich, dass durch Combination vollständiger Systeme neue vollständige Systeme entstehen.

Schliesslich werden die allgemeinen Sätze benutzt, um für Formen, deren einzelne Systeme man kennt, simultane Systeme aufzustellen und endlich zur Aufstellung der Systeme für einzelne Formen.

Als Beispiel füge ich die einzelnen Systeme der Formen vom 1^{ten}.

$2^{\text{ten}}, \ldots, 6^{\text{ten}}$ Grade und die simultanen Systeme der Formen vom 2^{ten}, 3^{ten} und 4^{ten} Grade hinzu.

§ 1.
Symbolische Producte.

Die Aufgabe, welche ich hier behandeln will, ist die Untersuchung der simultanen Formen (Covarianten und Invarianten) einer Anzahl gegebener binärer Formen:

$$f_1 \;,\; f_2 \;,\; f_3 \;,\; \cdots,$$

deren Grade n_1, n_2, ... sein mögen.

Diese Formen sind ganze homogene Functionen von zwei Variabeln x_1 und x_2, man kann für sie folgende symbolische Bezeichnung einführen:

$$\begin{aligned}
f_1 &= (f_{11}x_1 + f_{12}x_2)^{n_1} = f^{n_1}_{1,x} = f'^{\,n_1}_{1,x} = f''^{\,n_1}_{1,x} \cdots \\
f_2 &= (f_{21}x_1 + f_{22}x_2)^{n_2} = f^{n_2}_{2,x} = f'^{\,n_2}_{2,x} = f''^{\,n_2}_{2,x} \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_i &= (f_{i,1}x_1 + f_{i,2}x_2)^{n_i} = f^{n_i}_{i,x} = f'^{\,n_i}_{i,x} = f''^{\,n_i}_{i,x} \cdots
\end{aligned}$$

Die Symbole f_i, f_i', f_i'' ... stellen sämmtlich dieselbe Form f_i dar; ich nenne sie die Symbole dieser Form. Nach einem, von dem Herrn Clebsch (Crelle's Journal Bd. 59.) nachgewiesenen Satze kann man alle simultanen Formen (Covarianten und Invarianten) der Formen f als Aggregate (lineare Functionen mit numerischen Coefficienten) symbolischer Producte darstellen, welche die Form haben:

$$R = f^{\alpha_1}_{1,x}\, f^{\alpha_2}_{2,x} \cdots (f_1, f_2)\,(f_1', f_3) \cdots$$

Ich will daher zunächst diese symbolischen Producte untersuchen.

Die symbolischen Factoren zerfallen in zwei Arten, deren erste wie $f_{1,x}$, $f_{2,x}$ .... die Variable x (x_1 und x_2) enthält, während dieselbe bei den andern, wie (f_1, f_2), (f_1, f_3) ... nicht auftritt.

Die Anzahl der Factoren erster Art von R giebt den Grad von R in den Variabeln oder schlechthin den Grad an. Die Factoren zweiter Art, welche ich Klammerfactoren nennen will, bedeuten symbolische Determinanten; der Klammerfactor (f_1, f_2) z. B. die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

und können dadurch aus den Factoren erster Art wie $f_{1,x}$ abgeleitet werden, dass man x_1 in das Symbol f_{22} und x_2 in $-f_{21}$ übergehen lässt.

Der Grad von R in den Coefficienten der ursprünglichen Formen

f_1, f_2 ... nenne ich seine Ordnung; es ist dies in unserer symbolischen Darstellungsweise die Anzahl der verschiedenen in R auftretenden Symbole. Jedes derselben kommt so oft in R vor, als der Grad der durch dasselbe dargestellten Form Einheiten enthält; das Symbol f_1 n_1 Male, das Symbol f_2 n_2 Male u. s. f.

Sind die in R auftretenden Symbole, abgesehen von den durch sie dargestellten Formen, p_1, p_2, ..., dann will ich das symbolische Product R durch $\vartheta(p_1, p_2, \ldots)$ oder kurz $\vartheta(p)$ bezeichnen.

Vereinigt man einige unter den Symbolen p zu einer Gruppe, dann kann man diese Symbole auf mannigfache Art in Gruppen eintheilen; bei einer solchen Eintheilung werden im Allgemeinen die Symbole einer Gruppe in Factoren erster und zweiter Art auftreten, in den Klammerfactoren, in denen sie vorkommen, werden entweder beide Symbole derselben Gruppe angehören, oder einer der einen Gruppe, der zweite einer andern.

Bezeichnet man die Symbole zweier Symbolengruppen durch:

$$s_1\ ,\ s_2\ ,\ s_3\ ,\ \ldots\ldots$$
$$t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_3\ ,\ \ldots\ldots,$$

dann nenne ich die Anzahl derjenigen Klammerfactoren, welche ausser einem der Symbole s noch ein von s verschiedenes Symbol enthalten, die Norm von R in Bezug auf die Symbole s und bezeichne sie durch (s), die Anzahl derjenigen Klammerfactoren (s_i, t_k), welche sowohl ein Symbol s als auch ein Symbol t enthalten, bezeichne ich durch (s,t), und die Anzahl derjenigen, welche nur Symbole s enthalten durch (s,s). Die Anzahl der Klammerfactoren, in denen ein Symbol s auftritt, ist dann:

$$(s) + (s\,,\,s).$$

Ist die Norm (s) gleich 0, dann geht das symbolische Product R in das (wirkliche) Product zweier anderer symbolischer Producte über, von denen das erste nur Symbole s enthält, während in dem andern keines derselben auftritt. Besteht eine Symbolengruppe aus einem einzigen Symbol s, dann ist die Norm (s) von R nicht grösser als der Grad der durch dasselbe dargestellten Form.

Bezeichne ich das Product aller Klammerfactoren von R durch $\Delta(R)$ und die Factoren erster Art (von denen auch mehrere einander gleich sein können) durch:

$$r_{1,x}\ ,\ r_{2,x}\ ,\ \ldots\ ,\ r_{g,x},$$

dann nimmt R die Form an:

$$R = r_{1,x}\, r_{2,x}\, \ldots\, r_{g,x}\, \Delta(R),$$

wo g den Grad von R bedeutet.

§ 2.

Anordnung der symbolischen Producte nach den in ihnen auftretenden Symbolen.

Jede Covariante φ vom μ^{ten} Grade kann ebenso wie die ursprünglichen Formen f_i durch:

$$f_{i,x}^{n_i} = f'^{n_i}_{i,x} = f''^{n_i}_{i,x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

symbolisch dargestellt wurden, durch:

$$\varphi_x^\mu = \varphi'^\mu_x$$

symbolisch dargestellt werden und giebt hierdurch zur Bildung der neuen Symbole: φ , φ' , ... Veranlassung.

Diese neuen Symbole können ebenso wie die ursprünglichen Symbole f_i in symbolischen Producten R auftreten und jedes derselben wird so oft in R vorkommen, als der Grad der dadurch dargestellten Form Einheiten enthält. Bei der Bestimmung der Ordnung des symbolischen Productes R, welches die Symbole φ , ψ , χ, . . . enthalten mag, muss man für jedes dieser Symbole die Ordnung der durch dasselbe dargestellten Form in Rechnung ziehn. Ein symbolisches Product z. B., welches nur die Symbole φ und ψ enthält, welche Covarianten p^{ter} und q^{ter} Ordnung darstellen, besitzt die Ordnung $p + q$.

Den Beitrag, welchen die Symbole der Formen:

$$\varphi_1 \ , \ \varphi_2 \ , \ \cdot \cdot \cdot$$

zu der Ordnung des symbolischen Productes R liefern, nenne ich die Ordnung von R in den Symbolen der Formen φ. Diejenigen symbolischen Producte, welche nur Symbole der Formen φ enthalten und ihre Aggregate sollen durch $C(\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots)$ oder kurz $C(\varphi)$ bezeichnet werden, während diejenigen, in denen mindestens eines derselben vorkommt und ihre Aggregate durch $P(\varphi)$ bezeichnet werden mögen. Die letzteren sind ganze homogene Functionen der Coefficienten der Formen φ und verschwinden, wenn diese verschwinden.

Man kann nun diejenigen symbolischen Producte, bei denen Symbole verschiedener Arten von Formen auftreten, nach den Ordnungen classificiren, welche sie in den Symbolen der einzelnen Formen oder auch Formgruppen besitzen.

Es mögen die Formen:

$$\varphi_{11} \ , \ \varphi_{12} \ , \ \cdot \cdot \cdot$$

die erste Formengruppe bilden, die Formen:

$$\varphi_{21} \ , \ \varphi_{22} \ , \ \cdot \cdot \cdot$$

die zweite Formengruppe, die Formen endlich:

$$\varphi_{p1} \ , \ \varphi_{p2} \ , \ \cdot \cdot \cdot$$

die p^{te}; ich will dann symbolische Producte derselben Ordnung, in denen nur die Symbole der Formen φ_{ik} auftreten, folgendermassen anordnen.

Zuerst stehen diejenigen Formen, deren Ordnung in den Symbolen der p^{ten} Formengruppe am grössten ist und es tritt in der gesammten Anordnung eine Form um so früher auf, je grösser ihre Ordnung in diesen Symbolen ist.

Diejenigen dieser symbolischen Producte P, welche in den Symbolen der p^{ten} Gruppe dieselbe Ordnung besitzen, ordne ich ebenso nach ihrer Ordnung in den Symbolen der $(p-1)^{ten}$ Gruppe; diejenigen symbolischen Producte, welche sowohl in den Symbolen der p^{ten} als auch in den Symbolen der $(p-1)^{ten}$ Gruppe dieselbe Ordnung besitzen, nach ihrer Ordnung in den Symbolen der $(p-2)^{ten}$ Gruppe u. s. f.

Dieser Anordnung gemäss sollen die Formen P in Classen eingetheilt werden und in einer höheren oder niederen Classe stehen, je nachdem sie später oder früher hierbei auftreten.

Da die Formen φ_{ik} im Allgemeinen von einander abhängen, so wird öfters der Fall eintreten, dass ein symbolisches Product einer gewissen Classe zugleich ein Aggregat symbolischer Producte niederer Classe ist.

Hierbei kann man zeigen, dass, wenn irgend welche Formen:

$$\psi_1 \quad , \quad \psi_2 \quad , \quad \ldots .$$

diese Eigenschaft besitzen, jede Form $P(\psi)$ sie gleichfalls hat.

§ 3.

Eintragung des Werthes für ein Symbol.

Da jedes symbolische Product R, in welchem das Symbol einer Covariante

$$\varphi = \varphi_x^p = s_{1,x}\, s_{2,x} \ldots s_{p,x}\, \Delta(\varphi)$$

auftritt, zugleich eine simultane Form der Formen f_i ist, so ist es nach dem oben citirten Satze von Herrn Clebsch ein Aggregat symbolischer Producte, in denen nur die Symbole der Formen f_i vorkommen. Es liegt daher die Aufgabe nahe, symbolische Producte z zu suchen, aus denen sich R linear zusammensetzen lässt und welche statt des Symbols φ die Symbole s enthalten.

Ich bezeichne das Product aller das Symbol φ nicht enthaltenden Factoren durch T und diejenigen Symbole, welche mit dem Symbol φ in denselben Klammerfactoren auftreten, durch $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$; die Zahl ν ist dann die Norm (φ) in Bezug auf das Symbol φ.

Das symbolische Product R nimmt dann die Form an:

§ 2.

Anordnung der symbolischen Producte nach den in ihnen auftretenden Symbolen.

Jede Covariante φ vom μ^{ten} Grade kann ebenso wie die ursprünglichen Formen f_i durch:

$$f_{i,x}^{n_i} = f'^{n_i}_{i,x} = f''^{n_i}_{i,x} \dots\dots$$

symbolisch dargestellt wurden, durch:

$$\varphi_x^\mu = \varphi'^\mu_x$$

symbolisch dargestellt werden und giebt hierdurch zur Bildung der neuen Symbole: φ , φ' , ... Veranlassung.

Diese neuen Symbole können ebenso wie die ursprünglichen Symbole f_i in symbolischen Producten R auftreten und jedes derselben wird so oft in R vorkommen, als der Grad der dadurch dargestellten Form Einheiten enthält. Bei der Bestimmung der Ordnung des symbolischen Productes R, welches die Symbole φ , ψ , χ, ... enthalten mag, muss man für jedes dieser Symbole die Ordnung der durch dasselbe dargestellten Form in Rechnung ziehn. Ein symbolisches Product z. B., welches nur die Symbole φ und ψ enthält, welche Covarianten p^{ter} und q^{ter} Ordnung darstellen, besitzt die Ordnung $p + q$.

Den Beitrag, welchen die Symbole der Formen:

$$\varphi_1 \ , \ \varphi_2 \ , \ \dots$$

zu der Ordnung des symbolischen Productes R liefern, nenne ich die Ordnung von R in den Symbolen der Formen φ. Diejenigen symbolischen Producte, welche nur Symbole der Formen φ enthalten und ihre Aggregate sollen durch $C(\varphi_1 , \varphi_2 , \dots)$ oder kurz $C(\varphi)$ bezeichnet werden, während diejenigen, in denen mindestens eines derselben vorkommt und ihre Aggregate durch $P(\varphi)$ bezeichnet werden mögen. Die letzteren sind ganze homogene Functionen der Coefficienten der Formen φ und verschwinden, wenn diese verschwinden.

Man kann nun diejenigen symbolischen Producte, bei denen Symbole verschiedener Arten von Formen auftreten, nach den Ordnungen classificiren, welche sie in den Symbolen der einzelnen Formen oder auch Formgruppen besitzen.

Es mögen die Formen:

$$\varphi_{11} \ , \ \varphi_{12} \ , \ \dots$$

die erste Formengruppe bilden, die Formen:

$$\varphi_{21} \ , \ \varphi_{22} \ , \ \dots$$

die zweite Formengruppe, die Formen endlich:

$$\varphi_{p1} \ , \ \varphi_{p2} \ , \ \dots$$

die p^{te}; ich will dann symbolische Producte derselben Ordnung, in denen nur die Symbole der Formen φ_{ik} auftreten, folgendermassen anordnen.

Zuerst stehen diejenigen Formen, deren Ordnung in den Symbolen der p^{ten} Formengruppe am grössten ist und es tritt in der gesammten Anordnung eine Form um so früher auf, je grösser ihre Ordnung in diesen Symbolen ist.

Diejenigen dieser symbolischen Producte P, welche in den Symbolen der p^{ten} Gruppe dieselbe Ordnung besitzen, ordne ich ebenso nach ihrer Ordnung in den Symbolen der $(p-1)^{ten}$ Gruppe; diejenigen symbolischen Producte, welche sowohl in den Symbolen der p^{ten} als auch in den Symbolen der $(p-1)^{ten}$ Gruppe dieselbe Ordnung besitzen, nach ihrer Ordnung in den Symbolen der $(p-2)^{ten}$ Gruppe u. s. f.

Dieser Anordnung gemäss sollen die Formen P in Classen eingetheilt werden und in einer höheren oder niederen Classe stehen, je nachdem sie später oder früher hierbei auftreten.

Da die Formen φ_{ik} im Allgemeinen von einander abhängen, so wird öfters der Fall eintreten, dass ein symbolisches Product einer gewissen Classe zugleich ein Aggregat symbolischer Producte niederer Classe ist.

Hierbei kann man zeigen, dass, wenn irgend welche Formen:

$$\psi_1 \ , \ \psi_2 \ , \ \ldots .$$

diese Eigenschaft besitzen, jede Form $P(\psi)$ sie gleichfalls hat.

§ 3.

Eintragung des Werthes für ein Symbol.

Da jedes symbolische Product R, in welchem das Symbol einer Covariante

$$\varphi = \varphi_x^p = s_{1,x}\, s_{2,x} \ldots s_{p,x}\, \Delta(\varphi)$$

auftritt, zugleich eine simultane Form der Formen f_i ist, so ist es nach dem oben citirten Satze von Herrn Clebsch ein Aggregat symbolischer Producte, in denen nur die Symbole der Formen f_i vorkommen. Es liegt daher die Aufgabe nahe, symbolische Producte z zu suchen, aus denen sich R linear zusammensetzen lässt und welche statt des Symbols φ die Symbole s enthalten.

Ich bezeichne das Product aller das Symbol φ nicht enthaltenden Factoren durch T und diejenigen Symbole, welche mit dem Symbol φ in denselben Klammerfactoren auftreten, durch $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$; die Zahl ν ist dann die Norm (φ) in Bezug auf das Symbol φ.

Das symbolische Product R nimmt dann die Form an:

$$R = T\varphi_x^{p-\nu}\,(\varphi r_1)\,(\varphi r_2)\,\ldots\,(\varphi r_\nu).$$

Um es zu transformiren, bilde ich eine Hülfsformel, indem ich die Identität

$$\varphi_x^p = s_{1,x}\,s_{2,x}\,\ldots\,s_{p,x}\,\Delta\,(\varphi)$$

der Reihe nach ν Mal nach den Variabeln x (x_1 und x_2) differentiire und die Incremente der x jedesmal durch ein Paar neuer Variabeln

$$y_1\,(y_{12}\,,\,-y_{11})\;;\;y_2\,(y_{22}\,,\,-y_{21})\,\ldots\,y_i\,(y_{i2}\,,\,-y_{i1})\ldots y_\nu\,(y_{\nu 2}\,,\,-y_{\nu 1})$$

ersetze. Man gelangt dann zu der Identität:

$$\frac{p!}{(p-\nu)!}\,\varphi_x^{p-\nu}\,(\varphi y_1)\,(\varphi y_2)\ldots(\varphi y_\nu)$$

$$= \Sigma\,(s_{\alpha_1}\,,\,y_1)(s_{\alpha_2}\,,\,y_2)\,\ldots\,(s_{\alpha_\nu}\,,\,y_\nu)\;s_{\alpha_{\nu+1},x}\;s_{\alpha_{\nu+2},x}\;\ldots\;s_{\alpha_p,x}\;\Delta\,(\varphi)\,,$$

worin man für die Zahlen $\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\ldots\,\alpha_\nu$ alle möglichen Combinationen von ν Zahlen in allen möglichen Reihenfolgen aus den Zahlen $1,2,\ldots p$ setzen und dann die Summation über alle diese $\frac{p!}{(p-\nu)!}$ Combinationen ausdehnen muss. Ersetzt man in dieser Hülfsformel die Variabeln y_i durch die Symbole r_i und multiplicirt man mit T, so gelangt man zu der Gleichung:

$$R = \frac{1}{h}\,\Sigma\,T.\Delta\,(\varphi)(s_{\alpha_1}\,,\,r_1)\,(s_{\alpha_2}\,,\,r_2)\ldots(s_{\alpha_\nu}\,,\,r_\nu)\;s_{\alpha_{\nu+1},x}\;s_{\alpha_{\nu+2},x}\;\ldots\;s_{\alpha_p,x}$$

$$= \frac{1}{h}\,\sum_1^h{}_i\,Z_i\,,$$

worin h die Zahl $\frac{p!}{(p-\nu)!}$ bedeutet.

Die Aufgabe ist somit gelöst; die symbolischen Producte Z besitzen den Factor T und alle Symbole, welche in R auftreten, ausser dem Symbol φ; statt des letzteren enthalten sie die Symbole s. Diese symbolischen Producte Z sollen *Eintragungsglieder* genannt werden.

Ist φ eine Form $P\,(\psi)$, dann kommt das Symbol ψ unter den s vor, steht also auch in den Ausdrücken Z. Dieselben sind mithin Formen $P\,(\psi)$ und daher auch R. Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dass, wenn die Formen

$$\varphi_1\quad,\quad\varphi_2\quad,\quad\ldots$$

Formen $P\,(\psi_1\,,\,\psi_2\,,\ldots)$ sind, jede Form $P\,(\varphi_1\,,\,\varphi_2\,,\ldots)$ gleichfalls eine Form $P\,(\psi_1\,,\,\psi_2\,,\ldots)$ oder kurz eine Form $P\,(\psi)$ ist.

Alle Eintragungsglieder Z haben die Factoren $\Delta\,(\varphi)$ und T; sie enthalten dieselben Symbole und haben in Bezug auf die Symbole s dieselbe Norm ν. Für jedes andere Symbol ψ von R ist die Differenz $(\psi) - (\varphi,\psi)$ für R ebenso gross als die Differenz $(\psi) - (s\,,\,\psi)$ für ein Z; da diese Zahl nur von den Klammerfactoren des Factors T herrührt.

§ 4.

Differenzen der Eintragungsglieder, die symbolischen Producte L.

Zwei Eintragungsglieder, etwa Z und Z' sollen benachbart heissen, wenn sie alle ausser zwei Factoren gemeinsam haben; die beiden nicht gemeinsamen Factoren können entweder beide Klammerfactoren sein oder einer derselben ein Klammerfactor und der andere ein Factor erster Art. Bezeichnet man das Product der gemeinsamen Factoren von Z und Z_1 durch Q, dann ist im ersten Falle:

$$Z = Q(rs)(r's'); \; Z' = Q(rs')(r's) \text{ also: } Z - Z' = Q(rr')(ss')$$

und im zweiten Falle:

$$Z = Q s_x (rs') \; ; \; Z' = Q s'_x (rs) \text{ also: } Z - Z' = Q r_x (ss').$$

Die symbolischen Producte:

$$Z - Z' = Q(rr')(ss') \text{ oder } Q r_x (ss'),$$

sowie ihre Aggregate will ich Formen L nennen; in ihnen treten dieselben Symbole wie in den Formen Z auf, sie besitzen ebenso wie diese die Factoren T und $\Delta(\varphi)$ und für sie besitzt die Zahl $(\psi) - (\varphi\psi)$ denselben Werth wie für die Formen Z, da diese Zahl ja nur von den in T enthaltenen Klammerfactoren herrührt.

Hingegen ist für die symbolischen Producte L die Norm (s) und daher auch die Zahl $(s) + (\psi) - (s\psi)$ kleiner, die Zahl $(s\,,\,s)$ jedoch grösser als für die Eintragungsglieder Z.

Sind Z_i und Z irgend zwei Eintragungsglieder, dann kann man eine Anzahl anderer Glieder:

$$Z_{i1} \; ; \; Z_{i2} \; , \; \ldots \; Z_{ik}$$

der Art angeben, dass in der Reihe:

$$Z_i \; , \; Z_{i1} \; , \; Z_{i2} \; , \; \ldots . \; Z_{ik} \; , \; Z$$

je zwei auf einander folgende Glieder im obigen Sinne benachbart sind. Die Differenzen $Z_i - Z$ sind daher auch Formen L und so mit nach der Formel:

$$R = \frac{1}{h} \sum_1^h{}_i \, Z_i = Z + \frac{1}{h} \sum_1^h{}_i \, (Z_i - Z)$$

auch die Differenz $R - Z$.

§ 5.

Darstellung symbolischer Producte durch andere, in denen weniger Symbole auftreten.

Umgekehrt kann man aus jedem Eintragungsgliede:

$$Z = T.\Delta(\varphi)(s_{\alpha_1}, r_1)(s_{\alpha_2}, r_2)(s_{\alpha_3}, r_3) \ldots (s_{\alpha_\nu}, r_\nu) \, s_{\alpha_{\nu+1}, x} \, s_{\alpha_{\nu+2}, x} \ldots s_{\alpha_p, x}$$

die Formen φ und R ableiten.

Ersetzt man nämlich in Z nach Weglassung des Factors T die Klammerfactoren (s_{α_i}, r_i) durch $s_{\alpha_i, x}$, dann entsteht die Form:

$$\varphi = \Delta(\varphi)\, s_{1,x}\, s_{2,x} \ldots s_{p,x}.$$

Ersetzt man hingegen nach Weglassung des Factors $\Delta(\varphi)$ die Factoren (s_{α_i}, r_i) und $s_{\alpha_i, x}$ durch (φ, r_i) und φ_x, dann gelangt man zu der Form:

$$R = T\varphi_x^{p-\nu}(\varphi r_1)(\varphi r_2) \ldots (\varphi r_\nu).$$

Man kann zeigen, dass jedes symbolische Product $\vartheta(p_1, p_2, \ldots)$ (vgl. § 1.) auf viele Arten als Eintragungsglied dargestellt werden kann; zu dem Ende sondere man irgend eine Anzahl der darin enthaltenen Symbole, eine Symbolgruppe, ab, und führe hierbei folgende Bezeichnung ein. Das Product derjenigen (symbolischen) Factoren, welche kein Symbol der abgesonderten Gruppe enthalten, bezeichne man durch T, das Product derjenigen Klammerfactoren, welche nur Symbole der Gruppe enthalten, durch $\Delta(\varphi)$; die übrigen Symbole der Gruppe, sei es, dass sie in Factoren erster Art, sei es, dass sie mit andern Symbolen zusammen in Klammerfactoren auftreten durch $s_1, s_2, \ldots.,$ jene anderen Symbole endlich, welche mit den s zusammen in Klammerfactoren stehen, durch $r_1\, r_2 \ldots. r_\nu$.

In dieser Bezeichnung nimmt $\vartheta(p)$ die Form an:

$$\vartheta(p) = T.\Delta(\varphi)(s_1, r_1)(s_2, r_2) \ldots (s_\nu, r_\nu)\, s_{\nu+1,x}\, s_{\nu+2,x} \ldots s_{p,x},$$

welche es als Eintragungsglied charakterisiren.

Da nun jedes Eintragungsglied Z, wie im vorigen Paragraph gezeigt wurde, in die Form:

$$Z = R + \Sigma L$$

gebracht werden kann, worin für die L die Norm (s) kleiner als ν war, so kann ein Gleiches mit dem symbolischen Producte $\vartheta(p)$ geschehen.

Das Eintragungsglied Z kann nun auch in die Form:

$$Z = R + \Sigma c R'$$

gebracht werden, worin die R' ähnliche symbolische Producte wie die R bedeuten. Sie haben nämlich mit R den symbolischen Factor T gemein, und es treten in ihnen alle Symbole von R ausser φ auf. Statt des letzteren enthält jedes der symbolischen Producte R' das Symbol neuer Formen $\varphi', \varphi'' \ldots$ und hat in Bezug auf dasselbe eine Norm $(\varphi^{(i)})$, welche kleiner als (s) ist. Diese Formen $\varphi^{(i)}$ sind symbolische Producte, welche den symbolischen Factor $\Delta(\varphi)$ besitzen und in denen dieselben Symbole wie in φ vorkommen. Um nun zu beweisen, dass das Eintragungsglied Z in die obige Form gebracht werden kann, mache man die Annahme, dieser Satz sei für alle symbolischen Producte $\vartheta(p)$ bewiesen, bei denen die Norm $(s) < \nu$ ist.

Nach dieser Annahme gilt derselbe für die symbolischen Producte L, so dass man:

$$L = \Sigma c R'$$

setzen darf. Da nun nach § 4. die Differenz $Z - R$ ein Aggregat solcher Producte L ist, so hat man:

$$Z = R + \Sigma c' R'.$$

§ 6.
Unvollständige symbolische Producte.

Ein Product von (symbolischen) Klammerfactoren, welches nicht jedes darin vorkommende Symbol so oft enthält, als der Grad der durch dasselbe dargestellten Form Einheiten enthält, nenne ich ein unvollständiges symbolisches Product und diejenigen (vollständigen) symbolischen Producte, welche es als Factor enthalten und in denen nur die Symbole desselben auftreten, die zu ihm gehörigen Formen.

Bezeichnet man nun die zu einem unvollständigen symbolischen Producte Δ gehörigen Formen durch

$$\varphi_1\ ,\ \varphi_2\ ,\ \varphi_3\ ,\ \ldots .$$

dann ist *jedes* den Factor Δ enthaltende symbolische Product P als Form $P(\varphi)$ darstellbar.

Ich theile, um dies nachzuweisen, die in P vorkommenden Symbole in zwei Gruppen, je nachdem sie in Δ stehen oder nicht, und stelle sodann P in der im vorigen Paragraph angegebenen Weise als Eintragungsglied dar, so dass es die Form:

$$P = R + \Sigma c R'$$

annehmen kann. Die hier auftretenden Ausdrücke R sind symbolische Producte, von denen jedes statt der Symbole der ersten Gruppe je ein Symbol enthält, welches eine der Formen φ darstellt; sie sind also Formen $P(\varphi)$.

§ 7.
Eintragung der Werthe für mehrere Symbole.

In derselben Weise, wie im § 3. für ein Symbol φ in das symbolische Product R sein Werth eingetragen wurde, kann man in einem Eintragungsgliede Z_i für ein zweites in R also auch in Z_i vorkommendes Symbol ψ, welches eine Form:

$$\psi = \Delta(\psi)\ t_{1,x}\ t_{2,x}\ \ldots\ t_{q,x}$$

darstellen möge, seinen Werth eintragen.

Die hierdurch entstehenden Eintragungsglieder

$$Z_{i1}\ ,\ Z_{i2}\ ,\ Z_{i3}\ \ldots .$$

treten auch bei R auf, wenn man darin zu gleicher Zeit für die

Symbole φ und ψ ihre Werthe einträgt. Auch in die symbolischen Producte L (§ 4.) kann man für das Symbol ψ seinen Werth eintragen; man erhält dann für L ein Aggregat symbolischer Producte L', in welchen dieselben Symbole wie in den Z_{ik} vorkommen.

Für die Formen Z_{ik} haben die Zahlen (s), (t) und (st) dieselben Werthe wie die Zahlen (s), (ψ) und $(s\psi)$ für Z_i und die Zahlen (φ), (ψ) und $(\varphi\psi)$ für R.

Für die Formen L' haben die Zahlen (s), (t) und (st) dieselben Werthe wie die Zahlen (s), (ψ) und $(s\psi)$ für die Formen L; für diese letzteren ist nun aber nach § 4. die Zahl $(s) + (\psi) - (s\psi)$ kleiner als die Zahl $(\varphi) + (\psi) - (\varphi\psi)$ für R, welche ich durch ϱ bezeichnen will, mithin ist auch die Zahl $(s) + (t) - (st)$ für die Formen Z_{ik} gleich ϱ und für die Formen L' kleiner als ϱ.

Ebenso wie (§ 4.) die Differenz zweier benachbarten Eintragungsglieder Z und Z' ein symbolisches Product L war, worin dieselben Symbole wie in den Z vorkommen und wofür die Norm (s) kleiner als für die Z war, so ist auch hier die Differenz zweier benachbarten Eintragungsglieder Z_{i1} und Z_{i2} ein symbolisches Product L'', welches dieselben Symbole, wie Z_{i1} und Z_{i2} enthält, für das jedoch die Norm (t) einen kleineren Werth besitzt, die Zahl $(s) - (st)$ aber denselben Werth hat als für die Formen Z_{ik}. Für die symbolischen Producte L'' ist daher die Zahl $(s) + (t) - (st) < \varrho$.

Die Differenz $R - Z_i$, welche nach § 4. ein Aggregat symbolischer Producte L war, ist, da diese wieder Aggregate der Formen L' sind, ein Aggregat der L'; ebenso ist die Differenz $Z_i - Z_{ik}$ ein Aggregat symbolischer Producte L''.

Mithin ist die Differenz $R - Z_{ik}$ ein Aggregat symbolischer Producte L' und L'', für welche die Zahl $(s) + (t) - (st) < \varrho$ ist.

§ 8.

Die Uebereinanderschiebungen.

Unter den symbolischen Producten, in denen die Symbole φ und ψ gleichzeitig auftreten, sind diejenigen von besonderer Wichtigkeit, welche *nur* diese Symbole enthalten, also die Formen:

$$R = \varphi_x^{p-\nu}\,\psi_x^{q-\nu}\,(\varphi\psi)^\nu;$$

sie sind schon anderwärts ausführlich behandelt worden.

Die Operation, durch welche R aus den Covarianten φ und ψ entsteht, nenne ich Uebereinanderschiebung; desgleichen will ich die Form R selbst Uebereinanderschiebung nennen und durch $(\varphi\psi)^\nu$ bezeichnen.

Die Zahl ν nenne ich den Grad der Uebereinanderschiebung; sie

ist gleich den Normen (φ) und (ψ) und den Zahlen $(\varphi\psi)$ und

$$(\varphi) + (\psi) - (\varphi\psi)$$

und nicht grösser als der Grad einer der Formen φ und ψ. Wird $\nu = 0$, dann geht R in das Product der Covarianten φ und ψ über.

Trägt man in R für die Symbole φ und ψ ihre Werthe ein (vgl. § 3. und § 7.), dann erhält man für R einen Ausdruck, welcher, abgesehen vom Factor

$$\frac{(p-\nu)!\,(q-\nu)!}{p!\quad q!},$$

die Gestalt besitzt:

$$\Sigma\,\Delta(\psi)\Delta(\varphi)(s_{\alpha_1}, t_{\beta_1})(s_{\alpha_2}, t_{\beta_2})\ldots(s_{\alpha_\nu}, t_{\beta_\nu})\, s_{\alpha_{\nu+1},x} s_{\alpha_{\nu+2},x} \ldots s_{p,x} t_{\beta_{\nu+1},x} t_{\beta_{\nu+2},x} \ldots t_{\beta_q,x}$$

also:

$$R = \frac{(p-\nu)!\,(q-\nu)!}{p!\quad q!}\,\Sigma Z_{ik}\,.$$

Die Glieder dieser Summe, die symbolischen Producte Z_{ik}, nenne ich die Glieder der Uebereinanderschiebung R, für dieselben haben die Zahlen (s), (t) (st) und $(s) + (t) - (st)$ den Werth ν.

Nach dem vorigen Paragraphen ist die Differenz $R - Z_{ik}$, sowie die Differenz $Z_{ik} - Z_{i'k'}$, ein Aggregat symbolischer Producte $\vartheta\,(s, t)$ (vgl. § 1.), deren Norm $(s) = (t) = (st) = (s) + (t) - (st)$ kleiner als ν ist.

§ 9.

Darstellung symbolischer Producte als Glieder von Uebereinanderschiebungen.

In ähnlicher Weise, wie im § 5. die Formen R und φ aus den symbolischen Producten Z_i abgeleitet wurden, kann man auch hier die Formen φ, ψ und R erzeugen, wenn ein Uebereinanderschiebungsglied:

$$Z_{ik} = \Delta(\varphi)\Delta(\psi)(s_{\alpha_1}, t_{\beta_1})(s_{\alpha_2}, t_{\beta_2})\ldots(s_{\alpha_\nu}, t_{\beta_\nu})\, s_{\alpha_{\nu+1},x} \ldots s_{px}\, t_{\beta_{\nu+1},x} \ldots t_{\beta_q,x}$$

gegeben ist. Ersetzt man nämlich in dem symbolischen Producte Z_{ik} nach Weglassung der Factoren $\Delta\,(\psi)$ und t_{ix} die Factoren $(s_i\,, t_k)$ durch s_{ix}, dann erhält man die Form φ. Ebenso ergiebt sich die Form ψ, wenn man nach Weglassung der Factoren $\Delta\,(\psi)$ und $s_{i,x}$ die Factoren $(s_i\,, t_k)$ durch $t_{k,x}$ ersetzt.

Man kann nun zeigen (vgl. § 5.), dass jedes symbolische Product P sich auf viele Weisen als Uebereinanderschiebungsglied darstellen lässt. — Theilt man die in P vorkommenden Symbole in irgend zwei Gruppen, dann kann man folgende Bezeichnung einführen. Das Product derjenigen Klammerfactoren, welche nur Symbole der ersten Gruppe enthalten, bezeichne ich durch $\Delta\,(\varphi)$, das Product derjenigen, in denen nur Symbole der zweiten auftreten, durch $\Delta\,(\psi)$; die übrigen Symbole der ersten Gruppe, sei es, dass sie in Factoren erster oder zweiter Art stehen, durch $s_1\,, s_2\,, \ldots\, s_p$; die entsprechenden Symbole

der zweiten Gruppe durch

$$t_1\,,\, t_2\,,\, \ldots\, t_q\,.$$

Durch diese Bezeichnungsweise erhält man für das symbolische Product P den Ausdruck:

$$P = \Delta(\varphi)\,\Delta(\psi)\,(s_1,t_1)\,(s_2,t_2)\ldots(s_\nu,t_\nu)\,s_{\nu+1,x}\,s_{\nu+2,x}\ldots s_{p,x}\;t_{\nu+1,x}\,t_{\nu+2,x}\ldots t_{q,x},$$

welcher es als Glied der ν^{ten} Uebereinanderschiebung der beiben Covarianten:

$$\varphi = \Delta(\varphi)\; s_{1,x}\, s_{2,x}\, \ldots\, s_{p,x}$$
$$\psi = \Delta(\psi)\; t_{1,x}\, t_{2,x}\, \ldots\, t_{q,x}$$

characterisirt. Der Grad ν ist die Norm des symbolischen Productes P sowohl in Bezug auf die Symbole der ersten Gruppe, als auch in Bezug auf diejenigen der zweiten.

§ 10.
Formensysteme.

Nachdem ich die einzelnen simultanen Formen (Covarianten und Invarianten) für die vorliegende Untersuchung genügend beschrieben habe, will ich nunmehr *Formensysteme* untersuchen. Eine Anzahl von irgend welchen Covarianten und Invarianten:

$$A_1\,,\; A_2\,,\; \ldots\,,\; A_\varrho$$

will ich unter dem Namen *Formensystem* zusammenfassen und ihre Grade entsprechend durch:

$$a_1\,,\; a_2\,,\; \ldots\,,\; a_\varrho$$

bezeichnen.

Die Formen $P(A)$ (vgl. § 2.) sind dann Aggregate symbolischer Producte, in deren jedem mindestens ein Symbol A vorkommt und die Formen $C(A)$ symbolische Producte, in denen nur Symbole A auftreten. Die *wirklichen* Producte der Formen A bezeichne ich durch:

$$S(A) = A_1^{\alpha_1}\; A_2^{\alpha_2}\; \ldots\; A_\varrho^{\alpha_\varrho}\,.$$

Die Anzahl der Factoren A_i von $S(A)$ ist

$$\sum_1^{\varrho}{}_i\; \alpha_i\;;$$

der Grad von $S(A)$

$$\sum_1^{\varrho}{}_i\; a_i\, \alpha_i\,.$$

Ebenso mögen die Formen:

$$B_1\,,\; B_2\,,\; \ldots\,,\; B_\sigma$$

ein zweites System bilden, ihre Grade bezeichne ich durch:

$$b_1\,,\; b_2\,,\; \ldots\,,\; b_\sigma$$

und ihre Producte:

$$B_1^{\beta_1}\; B_2^{\beta_2}\; \ldots\; B_\sigma^{\beta_\sigma}$$

durch $S(B)$.

§ 11.

Die Uebereinanderschiebungen 1ter und 2ter Art der Form: $[S(A)\,,\,S(B)]^\nu$.

Von grossem Interesse bei der Untersuchung der Formensysteme sind Uebereinanderschiebungen wie:

$$[S(A)\quad,\quad S(B)]^\nu.$$

Bei denselben unterscheide ich zwei Arten, je nachdem ein Glied derselben existirt, das in Factoren zerfällt oder nicht (vgl. § 8.). Ich behaupte nun, dass die Uebereinanderschiebung $[S(A)\,,\,S(B)]^\nu$ in folgenden Fällen, und zwar nur in denselben der ersten Art angehöre.

Erster Fall.

Wenn eines der Producte $S(A)$ oder $S(B)$ eine Invariante zum Factor hat; die Uebereinanderschiebung $[S(A)\,,\,S(B)]^\nu$ besitzt dann gleichfalls diesen Factor.

Zweiter Fall.

Wenn eines der übereinandergeschobenen Producte, etwa $S(A)$, einen Factor K besitzt, dessen Grad g nicht kleiner als ν ist.

Beweis. Setzt man $S(A) = K.L$ und bezeichnet man irgend ein Glied der Uebereinanderschiebung $[K\,,\,S(B)]^\nu$ durch Z, dann ist das Product $Z.L$ ein Glied der Uebereinanderschiebung $[S(A)\,,S(B)]^\nu$.

Dritter Fall.

Wenn man die beiden Producte $S(A)$ und $S(B)$ in solche Factoren:

$$S(A) = K_1.K_2 \qquad\qquad S(B) = L_1.L_2$$

zerlegen kann, dass die Grade $g_1\,,\,g_2\,,\,h_1$ und h_2 der Formen $K_1\,,\,K_2$, L_1 und L_2 den Ungleichungen genügen:

$$h_1 < g_1 \qquad \text{und} \qquad \nu \leq h_1 + g_2\,.$$

Beweis. Da für $\nu \leq h_1$ der vorige Fall eintritt und für

$$\nu > h_1 + h_2$$

unsere Uebereinanderschiebung verschwindet, so will ich mich auf den Fall beschränken, wo:

$$0 \leq \nu - h_1 \leq h_2$$

ist. Bezeichne ich dann irgend welche Glieder der Uebereinanderschiebungen $(K_1\,,\,L_1)^{h_1}$ und $(K_2\,,\,L_2)^{\nu-h_1}$ durch Z_1 und Z_2, dann ist das Product $Z_1\,.\,Z_2$ ein Glied der Uebereinanderschiebung

$$[S(A)\,,\,S(B)]^\nu.$$

Vierter Fall.

Wenn eines der übereinandergeschobenen Producte, etwa $S(A)$ einen Factor K besitzt, dessen Grad g nicht kleiner ist als der Grad des andern Productes $S(B)$.

Beweis. Es sind hier zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem ν grösser als der Grad des Productes $S(B)$ ist oder nicht. Im ersteren verschwindet unsere Uebereinanderschiebung, im letzteren ist auch $\nu \leq g$ und es tritt der zweite Fall ein.

Fünfter Fall.

Wenn ein Factor K des Productes $S(A)$ und ein Factor L des Productes $S(B)$ denselben Grad g haben.

Beweis. Man unterscheide wieder zwei Unterfälle, je nachdem $\nu \leq g$ oder $\nu > g$ ist. Im ersten Unterfalle tritt der zweite Fall ein, im letzteren setze man

$$S(A) = K \,.\, K_1 \quad , \quad S(B) = L \,.\, L_1$$

und bezeichne irgend welche Glieder der Uebereinanderschiebungen $(K\,, L)^g$ und $(K_1\,, L_1)^{\nu-g}$ durch Z_1 und Z_2. Dann ist das Product $Z_1 \,.\, Z_2$ ein Glied der Uebereinanderschiebung $[S(A)\;,\; S(B)]^\nu$.

Sechster Fall.

Wenn man die Producte $S(A)$ und $S(B)$ in solche Factoren:

$$S(A) = K \,.\, K_1 \quad ; \quad S(B) = L \,.\, L_1$$

zerlegen kann, dass die Grade $g\,, g_1\,, h$ und h_1 der Formen $K\,, K_1\,,$ L und L_1 den Ungleichungen genügen:

$$g > h \qquad \text{und} \qquad g_1 > h_1 \,.$$

Beweis. Man unterscheide zwei Unterfälle, je nachdem ν grösser ist als $h + h_1$ oder nicht. Im ersteren verschwindet unsere Uebereinanderschiebung, im letzteren ist $\nu < h + g_1$ und es tritt der dritte Fall ein.

Siebenter Fall.

Wenn die Anzahl der Factoren A_i des Productes $S(A)$ der Ungleichung genügt:

$$\sum_1^{\varrho}{}_i\, a_i > \varrho \sum_1^{\sigma}{}_i\, b_i$$

(oder die Anzahl der Factoren B_i des Productes $S(B)$ der Ungleichung

$$\sum_1^{\sigma}{}_i\, \beta_i > \sigma \sum_1^{\varrho}{}_i\, a_i$$

genügt).

Beweis. Schreibt man die Ungleichung in der Form:

$$\sum_1^{\varrho}{}_i \left\{ a_i - \sum_1^{\sigma}{}_k\, b_k \right\} > 0,$$

dann sieht man, dass mindestens einer der Summanden

$$a_i - \sum_{1}^{\sigma}{}_k\, b_k$$

etwa

(I) $$a_1 - \sum_{1}^{\sigma}{}_i\, b_i > 0$$

sein muss.

Man unterscheide nun drei Unterfälle, je nachdem:

1) $\nu > \sum_{1}^{\sigma}{}_i\, b_i\, \beta_i$ oder 2) $\nu \leqq a_1\,(\alpha_1 - 1)$ oder 3) $\sum_{1}^{\sigma}{}_i\, b_i \beta_i \geqq \nu > a_1\,(\alpha_1 - 1)$.

Im ersten Unterfalle verschwindet die Uebereinanderschiebung $(S(A)\,,\,S(B))^\nu$; im zweiten ist ν nicht grösser als der Grad $a_1\,(\alpha - 1)$ des Factors $A_1^{\alpha-1}$ des Productes $S(A)$ und es tritt der zweite Fall ein; im dritten Unterfalle endlich ist:

$$\sum_{1}^{\sigma}{}_i\, b_i\, \beta_i > a_1\,(\alpha_1 - 1) \geqq a_1 \sum_{1}^{\sigma}{}_i\, b_i \qquad \text{(vgl. F. I)}$$

und daher:

$$\sum_{1}^{\sigma}{}_i\, b_i\, (\beta_i - a_1) \geqq 0.$$

Diese Ungleichung kann nur dann bestehen, wenn mindestens eine der Differenzen $\beta_i - a_1$ etwa

(II) $$\beta_1 - a_1 \geqq 0$$

ist.

Aus den Formeln (I) und (II) geht hervor, dass die Potenzen $A_1^{b_1}$ und $B_1^{a_1}$ Factoren der Producte $S\,(A)$ und $S\,(B)$ sind. Da die Grade dieser Potenzen übereinstimmen, so tritt hier der fünfte Fall ein.

§ 12.

Die Uebereinanderschiebungen erster und zweiter Art der Form $(S(A)\,,\,\varphi^\varrho)^\nu$.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wo das System der B nur aus einer einzigen Form besteht; ich will dieselbe durch φ und ihren Grad durch n bezeichnen.

Die zu untersuchenden Uebereinanderschiebungen haben dann die Form:

$$(S(A)\,,\,\varphi^\varrho)^\nu,$$

man unterscheide bei denselben zwei Fälle, je nachdem $S\,(A)$ eine einzelne Form A_i oder ein Product mehrerer solcher Formen ist.

Die Uebereinanderschiebung:

$$(A_i\,,\,\varphi^\varrho)^\nu$$

gehört der ersten Art an, wenn der Grad $n(\varrho-1)$ der Potenz $\varphi^{\varrho-1}$ entweder nicht kleiner als a_i oder nicht kleiner als ν ist (vgl. § 11. Fall 2. und 4.), also dann der zweiten Art, wenn $n(\varrho-1)$ sowohl kleiner als a_i als auch kleiner als ν ist.

Ich gehe nunmehr zu dem zweiten Falle über, wo $S(A)$ ein Product mehrerer Formen A etwa:

$$S(A) = A_1 . A_2 \ldots . A_\mu$$

ist, unter denen auch mehrere übereinstimmen können. Man kann dann das Product $S(A)$ auf mannigfache Art in zwei Factoren P und Q zerlegen.

$$S(A) = PQ.$$

Von den Factoren P und Q will ich sagen, sie entsprechen einander und ihre Grade durch p und q bezeichnen.

Den Grad $p+q$ des Productes $S(A)$ bezeichne ich durch g und die Reste, welche man erhält, wenn man die Zahlen p und q durch n dividirt, durch r und r'.

Man kann dann beweisen, dass die Uebereinanderschiebung:

$$(S(A)\,,\ \varphi^\varrho)^\nu = (P.Q\,,\ \varphi^\varrho)^\nu$$

in folgenden Fällen der ersten Art angehört:

Erster Fall.

Wenn

$$n\varrho \gtrless n + g - (r + r')$$

ist.

Beweis. Man unterscheide vier Unterfälle, je nachdem:

$$\begin{array}{ll} 1. & n\varrho \leq p \\ 2. & n(\varrho-2) > g-(r+r') \\ 3. & p < n\varrho < g-(r+r_1) \\ 4. & n\varrho = g+2n-(r+r_1). \end{array}$$

Im ersten Unterfalle hat der Factor P des Productes $S(A)$ einen Grad, der nicht kleiner ist als der Grad von φ^ϱ (vgl. § 11. Fall IV.); im zweiten Unterfalle hat der Factor $\varphi^{\varrho-1}$ der Potenz φ^ϱ einen Grad, der nicht kleiner als der Grad g des Productes $S(A)$ ist (vgl. § 11. Fall IV.); im dritten Unterfalle zerfällt die Potenz φ^ϱ in die Factoren

$$\varphi^{\frac{p-r}{n}} \quad \text{und} \quad \varphi^{\varrho-\frac{p-r}{n}},$$

deren Grade nicht grösser als die Grade p und q sind (vgl. § 11. Fall VI.).

Im vierten Unterfalle zerfällt die Potenz φ^ϱ in die Factoren $\varphi^{\frac{p+n-r}{n}}$ und $\varphi^{\frac{q+n-r'}{n}}$, deren Grade grösser als die Grade p und q sind. (Vgl. § 11. Fall VI.).

Zweiter Fall.

Wenn $n\varrho = g + n - (r + r')$ und p durch n theilbar, also $r = 0$ ist. — In diesem Falle hat der Factor $\varphi^{\frac{p}{n}}$ der Potenz φ^ϱ denselben Grad p als der Factor P von $S(A)$. (Vgl. § 11. Fall V.).

Dritter Fall.

Wenn $n\varrho = g + n - (r + r')$ und $\nu \leqq g - r$ ist.

Beweis. Ich bezeichne irgend welche Glieder der Uebereinanderschiebungen:

$$\left(P, \varphi^{\frac{p-r}{n}}\right)^{p-r} \text{ und } \left(Q, \varphi^{1+\frac{q-r}{n}}\right)^{\nu-(p-r)}$$

durch Z_1 und Z_2; das Product $Z_1 . Z_2$ ist dann ein Glied der Uebereinanderschiebung

$$(P . Q, \quad \varphi^\varrho)^\nu.$$

Diese drei Fälle sind die einzigen, in denen die Uebereinanderschiebung

$$(S(A), \quad \varphi^\varrho)^\nu$$

der ersten Art angehört; sie gehört mithin der zweiten Art an, wenn folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden.

Erste Bedingung. Für keine Zerlegung darf der Rest r verschwinden (vgl. zweiten Fall).

Zweite Bedingung. Für jede Zerlegung muss

$$n\varrho = g + n - (r + r')$$

sein (vgl. ersten Fall).

Dritte Bedingung. Für jede Zerlegung muss $\nu > g - r$ sein (vgl. dritten Fall).

Aus diesen Bedingungen lassen sich die folgenden ableiten, welche die Aufstellung sämmtlicher Uebereinanderschiebungen zweiter Art erleichtern.

Vierte Bedingung. Die Summe $r + r'$ muss für alle Zerlegungen denselben Werth haben (vgl. zweite Bedingung).

Fünfte Bedingung. Bezeichnet man den kleinsten Werth, welchen der Rest r für eine Zerlegung annimmt, durch r_0, dann muss $\nu > g - r_0$ sein.

Diese Bedingung folgt aus der dritten und ersetzt dieselbe. Den dem Rest r_0 bei einer Zerlegung entsprechenden Rest bezeichne ich durch r_0'.

Sechste Bedingung. Die Anzahl μ der Factoren A von $S(A)$ darf nicht grösser als n sein.

Beweis. Wäre $\mu > n$, dann gäbe es in der Reihe der Formen:

$$A_1\,;\quad A_1 \,.\, A_2\,;\quad A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3\,; \ldots A_1 \,.\, A_2 \ldots A_\varrho$$

mindestens zwei, deren Grade durch n dividirt, denselben Rest gäben. Wären dieselben:

$$A_1\, A_2 \ldots A_i \text{ und } A_1\, A_2 \ldots A_k\,,$$

dann wäre ihr Quotient, das Product

$$A_{i+1} \,.\, A_{i+2} \ldots A_k$$

ein Factor von $S(A)$, dessen Grad durch n theilbar wäre (vgl. Bedingung 1).

Die Reste r, r', r_0, r_0', welche hierbei auftreten, kann man in der folgenden Weise berechnen. Man bezeichne durch:

$$s_1\,,\quad s_2 \ldots . s_\mu$$

diejenigen Reste, welche entstehen, wenn man die Grade der einzelnen Factoren A von $S(A)$ durch n dividirt. Theilt man sie auf alle möglichen Weisen in zwei Gruppen

$$s_{i_1}\,,\quad s_{i_2} \ldots s_{i_{h_1}} \quad \text{und} \quad s_{k_1}\,,\quad s_{k_2} \ldots s_{k_{h_2}}$$

und dividirt man dann die Summen:

$$s_{i_1} + s_{i_2} + s_{i_3} \ldots s_{i_{h_1}} \quad \text{und} \quad s_{k_1} + s_{k_2} \ldots s_{k_{h_2}}$$

durch n, dann erhält man die Reste r und r', welche den verschiedenen Zerlegungen des Productes $S(A)$ entsprechen. Den Rest r' kann man dadurch aus r berechnen, dass man die Differenz $\sum_1^\mu{}_i\, s_i - r$ durch n dividirt.

Da die Kenntniss des Systemes der Reste s zur Bestimmung der Zahl μ und der Restepaare r und r' also auch des Restepaars r_0 und r_0' ausreicht, so ergeben die Bedingungen 1, 4 und 6 nur Eigenschaften dieses Restsystems; ich will diejenigen Restsysteme, welche sie besitzen, speciell nennen.

Die Bedingungen, unter denen die Uebereinanderschiebung $(S(A)\ ,\ \varphi^\varrho)^\nu$ der zweiten Art angehört, lassen sich denn folgender Massen aussprechen.

I.

Ist $S(A)$ eine einzelne Form A_i, dann muss gleichzeitig:

$$n(\varrho - 1) < \nu \quad \text{und} \quad n(\varrho - 1) < a_i$$

sein.

II.

Ist $S(A)$ ein Product mehrerer Formen A, dann muss gleichzeitig

1. das dem Producte $S(A)$ entsprechende Restsystem speciell,
2. $g - n\varrho = r_0 + r_0' - n$,
3. $g - \nu < r_0$,
4. $\nu \leqq a$ und $\nu \leqq n\varrho$ sein.

Diese Bedingungen genügen zur Aufstellung *sämmtlicher* Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form $(S(A)\,,\,\varphi^\varrho)^\nu$. Diejenigen unter ihnen, bei denen $S(A)$ eine einzelne Form A_i ist, findet man, indem man für ϱ alle ganzen Zahlen setzt, welche der Ungleichung $n(\varrho - 1) < a_i$ genügen, und dann für ν alle Zahlen, die zwischen $n(\varrho - 1)$ und $n\varrho$ liegen, diejenigen ausgenommen, welche grösser als a_i sind.

Um diejenigen Uebereinanderschiebungen, bei denen $S(A)$ ein Product mehrerer A ist, zu finden, bilde man zuerst alle zu der Zahl n gehörigen Restsysteme, berechne alsdann für jedes derselben die entsprechenden Producte $S(A)$ und schliesslich nach der zweiten, dritten und vierten Bedingung die Zahlen ϱ und ν.

Als Beispiel will ich für $n = 1$, 2, 3 und 4 die speciellen Restsysteme aufstellen und für jedes derselben die Reste r_0 und r_0' sowie die Zahl $r_0 + r_0' - n$ berechnen.

Für $n = 1$ existirt kein specielles Restsystem.

Für $n = 2$ ist $(1\,,\,1)$ das einzige specielle Restsystem; für dasselbe ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 1$; $r_0 + r_0' - n = 0$.

Für $n = 3$ giebt es die speciellen Restsysteme:

$$(1\,,\,1);\quad (1\,,\,2);\quad (2\,,\,2);\quad (1\,,\,1\,,\,1);\quad (2\,,\,2\,,\,2).$$

Für das Restsystem $(1\,,\,1)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 1$; $r_0 + r_0' - n = 1$,
„ „ „ $(1\,,\,2)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = 0$,
„ „ „ $(2\,,\,2)$ ist: $r_0 = 2$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = 1$,
„ „ „ $(1\,,\,1\,,\,1)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = 0$,
„ „ „ $(2\,,\,2\,,\,2)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = 0$.

Für $n = 4$ existiren die speciellen Restsysteme:

$$(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (2,2);\ (2,3);\ (3,3);\ (1,1,1);\ (1,1,2);\ (2,3,3);\ (3,3,3);$$
$$(1,1,1,1);\ (3,3,3,3).$$

Für das Restsystem $(1\,,\,1)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 1$; $r_0 + r_0' - n = -2$,
„ „ „ $(1\,,\,2)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = -1$,
„ „ „ $(1\,,\,3)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 3$; $r_0 + r_0' - n = 0$,
„ „ „ $(2\,,\,2)$ ist: $r_0 = 2$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = 0$,
„ „ „ $(2\,,\,3)$ ist: $r_0 = 2$; $r_0' = 3$; $r_0 + r_0' - n = 1$,
„ „ „ $(3\,,\,3)$ ist: $r_0 = 3$; $r_0' = 3$; $r_0 + r_0' - n = 2$,
„ „ „ $(1\,,\,1\,,\,1)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = -1$,

Für das Restsystem $(1\,,1\,,2)$ ist: $r_0=1$; $r_0'=3$; $r_0+r_0'-n=0$,

" " " $(2\,,3\,,3)$ ist: $r_0=1$; $r_0'=1$; $r_0+r_0'-n=-2$,

" " " $(3\,,3\,,3)$ ist: $r_0=2$; $r_0'=3$; $r_0+r_0'-n=1$,

" " " $(1\,,1\,,1\,,1)$ ist: $r_0=1$; $r_0'=3$; $r_0+r_0'-n=0$,

" " " $(3\,,3\,,3\,,3)$ ist: $r_0=1$; $r_0'=3$; $r_0+r_0'-n=0$.

§ 13.

Combinirte Formensysteme.

Gehört die Uebereinanderschiebung $(S(A)\,,\,S(B))^\nu$ der zweiten Art an, dann ist nach § 11. zweiter Fall die Anzahl der Factoren A des Productes $S(A)$ nicht grösser als $\varrho \sum_1^\sigma{}_i\, b_i$ und die Anzahl der Factoren B des Productes $S(B)$ nicht grösser als $\sigma \sum_1^\varrho{}_i\, a_i$. Hieraus folgt, dass die Anzahl dieser Uebereinanderschiebungen endlich ist. Bezeichnet man dieselben sowie die Formen A und B selbst, durch:

$$[AB]_1\,,\quad [AB]_2\ldots$$

dann bilden die Formen $[AB]$ ein neues endliches Formensystem. Ich nenne dasselbe das aus den Systemen A und B combinirte System.

In derselben Weise kann man eine beliebige Anzahl p von Formensystemen combiniren. Ich bezeichne die Formen des ersten Systemes durch $A_{11}\,,\;A_{12}\ldots$, die des zweiten durch $A_{21}\,,\;A_{22}\ldots$, allgemein die Formen des ersten Systems durch $A_{i1}\,,\;A_{i2}\ldots$ und combinire vorerst die beiden ersten Systeme zu dem Systeme $[A_{1\varkappa},\,A_{2\varkappa}]$. Dieses System combinire ich mit dem dritten Systeme zu dem Systeme $[[A_{1\varkappa},\,A_{2\varkappa}],\,A_{3\varkappa}]$, welche Formen ich kurz durch $[A_{1\varkappa},\,A_{2\varkappa},\,A_{3\varkappa}]$ bezeichne.

In dieser Weise fahre ich fort und combinire dieses System mit dem vierten Systeme zu dem Systeme $[A_{1\varkappa},\,A_{2\varkappa},\,A_{3\varkappa},\,A_{4\varkappa}]$ u. s. w. bis ich schliesslich zu dem Systeme $[A_1,\,A_1\ldots A_p]$ gelange, welches ich das aus den so gegebenen Systemen combinirte System nenne. Ich setze stets diese gegebenen Systeme als endlich voraus und erhalte daher durch Combination nur endliche Systeme.

§ 14.

Vollständige Systeme.

Besonders wichtig für unsere Betrachtung sind die vollständigen Systeme. — Ist ein System

$$A_1\,,\quad A_2\ldots A_\varrho$$

so beschaffen, dass jedes symbolische Product $C(A)$ (welches nach § 2. nur Symbole von Formen A enthält) eine ganze Function der A

$$C(A) = \Sigma\, c\, S(A)$$

ist, dann soll das System der A vollständig heissen.

Es kommen hierbei öfter Formen A vor, welche sich durch andere A ausdrücken lassen; man kann diese Formen im Systeme weglassen, ohne dass es aufhört vollständig zu sein, ich nenne sie daher *überflüssig.* Das System der übrigbleibenden (nothwendigen) Formen nenne ich das *reducirte System* der A.

Aehnlich diesen Systemen sind die folgenden, welche *relativ vollständig* heissen sollen.

Stehen die Formen:

$$A_1,\ \ A_2 \ldots A_\varrho$$

mit den Formen:

$$B_1,\ \ B_2 \ldots B_\sigma$$

in der Beziehung, das jedes symbolische Product $C(A)$ (vgl. § 3) in die Form:

$$C(A) = \Sigma\, c\, S(A) + P(B)$$

gebracht werden kann, dann nenne ich das System

$$A_1;\ \ A_2 \ldots$$

in Bezug auf die Formen B vollständig.

Hierbei unterscheide man zwei Fälle, je nachdem die symbolischen Producte, deren Aggregat $P(B)$ ist, nur Symbole A und B enthält oder nicht. Im ersteren nenne ich das System A in Bezug auf die B *eigentlich,* im letzteren *uneigentlich* vollständig.

Der erstere Fall tritt dann immer ein, wenn das System A sämmtliche Originalformen $f_1, f_2 \ldots$ enthält.

Ist das System A in Bezug auf die B vollständig und sind sämmtliche Formen B Formen

$$P(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \ldots) = P(\varphi) \quad \text{(vgl. § 2.)},$$

dann ist es auch in Bezug auf die φ vollständig.

Auch bei relativ vollständigen Systemen treten oft überflüssige Formen auf. Diejenigen Formen A, welche sich in die Form:

$$A = \Sigma\, c\, S(A) + P(B)$$

bringen lassen, in welcher die Producte $S(A)$ nur die übrigen, nothwendigen, enthalten dürfen, sind im Systeme A überflüssig. Das so reducirte System A ist, wie das ursprüngliche, in Bezug auf die B vollständig.

§ 15.

Kriterien für die Vollständigkeit eines Systemes.

Um zu sehen, ob ein gegebenes System

$$A_1, \; A_2 \ldots A_\varrho$$

(absolut oder relativ) vollständig sei, braucht man keineswegs alle nur denkbaren Formen $C(A)$ zu untersuchen. Es genügt, zu zeigen, dass die Uebereinanderschiebungen irgend zweier derselben $(A, A')^\nu$ die verlangte Form $\Sigma\, c\, S(A)$ oder $\Sigma\, c\, S(A) + P(B)$ annehmen können.

Ist dies für alle Uebereinanderschiebungen der Form $(A, A')^\nu$ der Fall, dann ist das System vollständig resp. in Bezug auf die B vollständig.

Beweis. Bei dem Beweise dieses Satzes will ich mich auf die relativ vollständigen Systeme beschränken, da das dabei angewandte Verfahren die absolut vollständigen mit umfasst. Ich mache die Annahme, dass die Uebereinanderschiebungen $(A, A')^\nu$ sich in die Form:

$$(A, A')^\nu = \Sigma\, c\, S(A) + P(B)$$

bringen lassen und behaupte, dass jedes symbolische Product $C(A)$ gleichfalls in dieselbe gebracht werden könne.

Man bezeichne die Ordnung von $C(A)$ durch m und die Norm von $C(A)$ in Bezug auf dasjenige Symbol A_i, in Bezug auf welches sie am kleinsten ist, durch $(A_i) = \nu$, und mache die Annahme, dass unser Satz für alle Formen $C(A)$ Geltung habe, deren Ordnung kleiner als m ist und für diejenigen Formen der m^{ten} Ordnung, deren Norm in Bezug auf irgend ein Symbol A_k kleiner als ν ist.

Unser symbolisches Product $C(A)$ enthält nach Annahme das Symbol A_i und in Bezug auf dasselbe die Norm ν; nach § 9 ist es ein Glied einer Uebereinanderschiebung $(C'(A), A_i)^\nu$.

Die Ordnung des symbolischen Productes $C'(A)$ ist hier kleiner als m, mann kann es nach Annahme in die Form:

$$C'(A) = \Sigma\, c\, S(A) + P(B)$$

bringen. Man erhält dann für $C(A)$ den Ausdruck:

$$C(A) = (C(A) - (C'(A), A_i)^\nu) + \Sigma\, c\, (S(A), A_i)^\nu + (P(B), A_i)^\nu.$$

Von den Gliedern auf der rechten Seite lassen sich das erste und dritte in die verlangte Form bringen; das erste, weil es nach § 8. ein Aggregat symbolischer Producte ist, deren Norm (A_i) kleiner als ν ist, das letztere, weil es eine Form $P(B)$ ist. Es bleiben daher nur noch die Uebereinanderschiebungen $(S(A), A_i)^\nu$ zu untersuchen. Ich bezeichne irgend einen Factor A von $S(A)$ durch A_k, setze $S(A) = A_k\, S'(A)$ und unterscheide zwei Fälle, je nachdem der Grad a_k von A_k kleiner als ν ist oder nicht.

Im ersteren Fall ist $(S(A), A_i)^\nu$ ein Aggregat symbolischer Producte, deren Norm (A_k) kleiner als ν ist, im letzteren Falle ist das Product: $S'(A) . (A_i, A_k)^\nu$ ein Glied der Uebereinanderschiebung $(S(A), A_i)^\nu$.

In dem Ausdrucke:

$$((S(A), A_i)^\nu - (S'(A) . (A_i A_k))^\nu + S'(A) . (A_i, A_k)^\nu,$$

ist dann das letzte Glied nach Annahme von der verlangten Form, während das erste Glied nach § 8. ein Aggregat symbolische Producte ist, deren Norm (A_i) kleiner als ν ist.

§ 16.

Abgeleitete vollständige Systeme.

Man kann aus einem (absolut oder relativ) vollständigen Systeme leicht andere solche Systeme ableiten.

I.

Ist das System $A_1, A_2 \ldots A_\varrho$ vollständig, dann ist das aus einer beliebigen Anzahl Formen, etwa:

$$A_1, \; A_2 \ldots A_\nu$$

bestehende System in Bezug auf die übrigen vollständig.

II.

Ist das System $A_1, A_2 \ldots A_\varrho$ in Bezug auf die Formen $B_1, B_2 \ldots B_\sigma$ (eigentlich oder uneigentlich) vollständig, dann ist das aus einer beliebigen Anzahl der Formen A etwa $A_1, A_2 \ldots A_\nu$ bestehende System in Bezug auf die Formen $A_{\nu+1}, A_{\nu+2} \ldots A_\varrho, B_1, B_2 \ldots B_\sigma$ vollständig.

III.

Ist das System $A_1, A_2 \ldots A_\varrho$ in Bezug auf die Formen $B_1, B_2 \ldots B_\sigma$ eigentlich vollständig und sind diese letzteren sämmtlich Invarianten, dann ist das aus den Formen $A_1, A_2 \ldots A_\varrho, B_1, B_2 \ldots B_\sigma$ bestehende System vollständig.

§ 17.

Ueber die Vollständigkeit combinirter Systeme.

Ich gehe jetzt zu der Untersuchung combinirter Systeme (vgl. § 13.) über und stelle für dieselben die folgenden Sätze auf:

Erster Satz.

Sind die Systeme $A_1, A_2 \ldots A_\varrho$ und $B_1, A_2 \ldots B_\sigma$ vollständig, dann ist es auch das System der Formen $[AB]$.

Zweiter Satz.

Ist das System A in Bezug auf die Formen B eigentlich vollständig, und das aus denselben bestehende System B vollständig, dann ist das System der $[AB]$ vollständig.

Dritter Satz.

Ist das System:

$$A_1, \quad A_2 \dots A_\varrho$$

in Bezug auf die Formen:

$$B_1, B_2 \dots B_\sigma, \quad C_1, C_2 \dots C_\tau$$

eigentlich vollständig, und das System $B_1, B_2 \dots B_\sigma$ in Bezug auf die C vollständig, dann ist das aus den $[AB]$ bestehende System in Bezug auf die C vollständig.

Beweis. Ich will mich auf den Beweis des dritten Satzes beschränken, da das dabei angewandte Verfahren die übrigen Sätze mit umfasst. Unter den gegebenen Voraussetzungen will ich nachweisen, dass jedes symbolische Product der Form $C(A, B)$ in die Form:

$$\text{(I)} \qquad C(A, B) = \Sigma\, c\, S[A, B] + P(C)$$

gebracht werden kann. Hierbei mache ich die Annahme, dass dieser Satz bereits für alle Formen $C'(AB)$ gelte, deren Ordnung oder Classe (vgl. § 2.) oder Norm (A) kleiner als für $C(A, B)$ ist. Das symbolische Product $C(A, B)$ ist nach § 9. ein Glied einer Uebereinanderschiebung $(C'(A), C(B))^\nu$, welche, da man n. V.

$$C'(A) = \Sigma\, c\, S(A) + P(B, C) \text{ und } C(B) = \Sigma\, c\, S(B) + P(C)$$

setzen darf, die Form annehmen kann:

$$(C(A), C(B))^\nu = \Sigma\, c\, (S(A), S(B))^\nu + (P(B, C), C(B))^\nu + P(C).$$

Bezüglich der Uebereinanderschiebung $(S(A), S(B))^\nu$ unterscheide ich zwei Fälle, je nachdem sie der ersten oder zweiten Art angehört. Im ersten besitzt sie ein Glied, das in Factoren zerfällt, ich will es durch $Z_1 . Z_2$ bezeichnen, im zweiten Falle ist $(S(A), S(B))^\nu$ eine Form $[AB]$. Ich setze nun für das symbolische Product $C(A, B)$ den Ausdruck:

$$C(A, B) = \begin{cases} C(A, B) - (C(A), C(B))^\nu + \Sigma c\, ((S(A), S(B))^\nu - Z_1 . Z_2) \\ + \Sigma\, c\, [A, B] + \Sigma\, c\, Z_1 . Z_2 + (P(B, C), C(B))^\nu + P(C). \end{cases}$$

Keines der Glieder auf der rechten Seite übertrifft $C(A, B)$ in Bezug auf Ordnung, Klasse oder Norm, sie lassen sich sämmtlich und mithin auch $C(A, B)$ in die verlangte Form (I) bringen.

Die Glieder:

$$C(A, B) - (C(A), C(B))^\nu \quad \text{und} \quad (S(A), S(B))^\nu - Z_1 . Z_2$$

nämlich sind nach § 9. Aggregate symbolischer Producte, deren Norm

(A) kleiner als v ist; das Glied $(P(B, C), C(B))^v$ gehört einer niederen Classe (vergl. § 2.), die Formen Z_1 und Z_2 niederen Ordnungen als $C(A, B)$ an.

§ 18.

Die überflüssigen Formen des combinirten Systems.

Formen $[AB]_1$; $[AB]_2$ .... des combinirten Systems will ich nach ihrer Ordnung, ihrer Classe und ihrer Norm in Bezug auf die Symbole A ordnen und hierbei die Formen niederer Ordnung voranstellen. Bei Formen gleicher Ordnung stelle ich die von niederer Classe voran (vgl. § 2.) und bei Formen gleicher Ordnung und Classe die von niederer Norm (A). In dieser Anordnung will ich diejenigen als überflüssig ausscheiden, welche sich durch andere, ihnen nicht nachstehende Formen des Systems als ganze Functionen ausdrücken lassen.

In diesem Sinne ist eine Form $[AB]$ dann überflüssig, wenn für dieselbe ein Ausdruck der Form:

$$[AB] = \Sigma c\, [AB]' + \Sigma\, C(A, B)$$

existirt, worin die Formen $[AB]'$ der Form $[AB]$ nicht nachstehen und die $C(A, B)$ entweder eine niedere Ordnung, oder eine niedere Classe, oder eine niedere Norm besitzen als $[AB]$, da nach dem vorigen Satze diese symbolischen Producte $C(A, B)$ sich durch Formen des combinirten Systems ausdrücken lassen, welche $[AB]$ nicht nachstehen. —

Die Uebereinanderschiebung zweiter Art $(S(A), S(B))^v$ kann in zweierlei Art gebildet werden. Entweder kann man darin für jeden Factor A des Productes $S(A)$ ein besonderes ihn darstellendes Symbol einführen, oder man kann für diejenigen Formen A, deren symbolische Ausdrücke nur Symbole von Formen B, C und (andern) Formen A enthalten, diese symbolischen Producte eintragen. In beiden Darstellungsweisen ist die Differenz der Uebereinanderschiebung $(S(A), S(B))^v$ und eines ihrer Glieder nach § 8. ein Aggregat symbolischer Producte mit niederer Norm (A). Diese Uebereinanderschiebung ist daher im combinirten Systeme durch eines ihrer Glieder oder ein Aggregat derselben ersetzbar. Jedoch darf bei diesem Aggregat die Summe der numerischen Coefficienten nicht verschwinden.

Es ist mir nicht gelungen, alle Fälle zu ermitteln, in denen die Uebereinanderschiebung zweiter Art $(S(A), S(B))^v$ im combinirten System überflüssig ist; ich will mich hier auf die Angabe der folgenden, besonders häufig vorkommenden überflüssigen Formen beschränken.

Erster Fall.

Wenn eines ihrer Glieder durch Formen niederer Ordnung, Classe oder Norm (A) ausdrückbar ist.

Zweiter Fall.

Wenn ein Aggregat ihrer Glieder:

$$c_1 Z_1 + c_2 Z_2 \dots$$

in dieser Weise darstellbar ist, die Summe der numerischen Coefficienten c aber nicht verschwindet.

Dritter Fall.

Wenn sich das Product $S(A)$ in die Form:

$$S(A) = \Sigma\, c\, S'(A) + P(B, C)$$

bringen lässt, worin die Ausdrücke $S'(A)$ andere Producte der A bedeuten und $P(B, C)$ ein Aggregat symbolischer Producte ist, in denen nur Symbole A, B und C vorkommen.

Beweis. In dem Ausdrucke:

$$(S(A),\ S(B))^{\nu} = \Sigma\, c\, (S'(A),\ S(B))^{\nu} + (P(B, C),\ S(B))^{\nu}$$

hat kein Glied der rechten Seite eine höhere Ordnung, Classe oder Norm als $(S(A),\ S(B))^{\nu}$.

Die Uebereinanderschiebungen $(S'(A),\ S(B))^{\nu}$ gehören entweder der ersten oder zweiten Art an. Im ersteren Falle lassen sie sich durch Formen niederer Ordnung und Norm (A) ausdrücken, im letzteren sind sie andere Formen $[AB]$ des combinirten Systems. Die Uebereinanderschiebung $(P(B, C),\ S(B))^{\nu}$ gehört einer niederen Classe an, als $(S(A),\ S(B))^{\nu}$.

Vierter Fall.

Wenn ein Glied Z der Uebereinanderschiebung ein unvollständiges symbolisches Product Δ zum Factor hat, für welches die zugehörigen Formen φ_1, $\varphi_2 \dots$ sich auf Formen niederer Classe zurückführen lassen. In diesem Falle nämlich ist das Glied Z, durch welches man im combinirten Systeme die Uebereinanderschiebung $(S(A),\ S(B))^{\nu}$ ersetzen kann, nach § 2. eine Form $P(\varphi)$, also ein Aggregat von Formen niederer Classe.

§ 19.

Das combinirte System wird durch ein anderes ersetzt.

Das combinirte System kann durch ein anderes System T ersetzt werden, welches zwar mehr überflüssige Formen enthält, dessen Aufstellung jedoch nach einfacheren Regeln bewerkstelligt werden kann.

Man bildet dasselbe in der folgenden Weise. Zuerst combinirt man das System $A_1, A_2 \ldots A_\varrho$ mit dem aus der Form B allein bestehenden Systeme zu einem neuen Systeme U. In demselben bezeichne man diejenigen Formen, bei welchen das Symbol B_1 nur in Klammerfactoren auftritt, die Formen A selbst inbegriffen durch:

$$A_1'; \quad A_2'; \quad A_3' \ldots .$$

und füge sodann dem Systeme U alle Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form $(S(A'), S(B_2, B_3 \ldots B_\sigma))^\nu$ hinzu.

Um zu zeigen, dass das aus den Formen $[AB]$ bestehende System durch das System T ersetzbar ist, unterscheide ich drei Fälle für die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form $P = (S(A), S(B))^\nu$, je nachdem das Product $S(B)$ in einem der drei Ausdrücke:

$$1. \quad B_1^s,$$
$$2. \quad S(B_2, B_3 \ldots B_\sigma),$$
$$3. \quad B_1^s \, S(B_2 \ldots B_\sigma)$$

enthalten ist. In den beiden ersten Fällen gehört P dem Systeme T an, in dem letzten ist $P = (S(A), B_1^s S(B_2 \ldots B_\sigma))^\nu$. Da diese Uebereinanderschiebung der zweiten Art angehört, so ist nach § 11. Fall IV der Grad des Products $S(A)$ grösser als $s \,.\, b_1$, ich will es in solche Factoren $S'(A)$ und $S''(A)$ zerlegen, dass der Grad des Productes $S'(A)$ zwar nicht kleiner als $b_1 s$ ist, dass aber die Grade aller Factoren von $S'(A)$ kleiner als diese Zahl sind. Die Uebereinanderschiebung $(S'(A), B_1^s)^{b_1 s}$ ist dann entweder eine Form A' oder eine ganze Function solcher Formen und daher die Uebereinanderschiebung:

$$Q = (S''(A) \,.\, (S'(A), B_1^s)^\nu, S(B_2 \ldots B_\sigma)^{\nu - b_1 s}$$

eine Form des Systems T oder durch solche Formen ausdrückbar.

Man kann nun die Uebereinanderschiebung P in dem aus den Formen $[AB]$ bestehenden Systeme durch die Form Q ersetzen, welche ein Aggregat ihrer Glieder ist. Mithin entspricht jeder Form $[AB]$ mindestens eine Form des Systems T, durch welche sie ersetzbar ist und das System:

$$[AB]_1, \quad [AB]_2 \ldots .$$

kann durch das System T ersetzt werden.

§ 20.

Ueber die Vollständigkeit von Systemen, welche aus mehr als zwei Systemen combinirt sind.

Aehnliche Sätze gelten für Systeme, welche aus mehr als zwei Systemen combinirt sind. Besonders wichtig ist der folgende:

Stehen p Formensysteme in solcher Beziehung zu einander, dass jedes derselben in Bezug auf die Formen der folgenden eigentlich vollständig ist, dann ist das aus allen p Systemen im Sinne des § 13. combinirte System vollständig.

Beweis. Das aus den beiden ersten Systemen combinirte System ist nach § 17. in Bezug auf die folgenden eigentlich vollständig. Combinirt man es mit dem dritten Systeme, dann erhält man das aus den drei ersten Systemen combinirte System, dasselbe ist in Bezug auf die folgenden eigentlich vollständig. Ebenso kann man zeigen, dass das aus den vier ersten Systemen combinirte System in Bezug auf die folgenden eigentlich vollständig ist, ebenso das aus den fünf ersten Systemen combinirte System u. s. w., endlich dass das aus den $(p-1)$ ersten Systemen combinirte System in Bezug auf das p^{te} vollständig ist, wodurch sich die Richtigkeit unserer Behauptung ergiebt.

§ 21.

Das simultane System der Formen f und die speciellen Formen.

Diese Sätze setzen mich in den Stand, die Aufgabe zu lösen, welche ich mir gestellt habe, nämlich sowohl für eine einzelne Form f, als auch für eine Anzahl Formen $f_1, f_2 \ldots$ Systeme von Covarianten und Invarianten aufzustellen, wodurch sich *alle* simultanen Covarianten und Invarianten dieser Formen als ganze Functionen ausdrücken lassen. Solche Systeme nenne ich die simultanen Systeme der Formen $f_1, f_2 \ldots.$ Man sieht nun unmittelbar, dass jedes vollständige System, welches die Formen $f_1, f_2 \ldots$ selbst enthält (und worin nur simultane Formen der f vorkommen) das simultane System derselben ist. Setzt man daher die einzelnen Systeme dieser Formen als bekannt voraus, dann erhält man durch Combination derselben nach § 20. ein vollständiges System, welches die Formen f selbst enthält und daher ihr simultanes System ist. Die noch zu lösende Aufgabe ist somit die Aufstellung des Systems *einer* gegebenen Form:

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n \ldots.$$

Ich will mich hierbei im Allgemeinen auf die Untersuchung derjenigen Formen f beschränken, deren Grad durch 4 theilbar ist, da die dabei angewandten Methoden die übrigen Formen mit umfassen. Dieselben stimmen im Anfang mit denen überein, deren ich mich früher (Crelles Journal Bd. 69. S. 333) bediente, ich will die dahin einschlagenden Stellen hier wiederholen und wie dort die Annahme machen, dass die Systeme von Formen, deren Grad kleiner als n ist, bereits aufgestellt seien.

Es sei die Form:

$$f' = a_x'^{n-1} = b_x'^{n-1} \; .\;.\;.\;.$$

eine beliebige Form des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades; man kann dann aus jedem symbolischen Producte $C(f')$, das nur die Symbole a', b', c' . . . enthält, ein analoges Product für die Form f dadurch herleiten, dass man erst die oberen Indices weglässt und sodann mit dem Producte $a_x b_x c_x \ldots$ multiplicirt.

Umgekehrt kann man aus jedem den Factor $a_x\, b_x\, c_x \ldots$ enthaltenden symbolischen Producte von f ein symbolisches Product für die Form f' dadurch ableiten, dass man erstens diesen Factor weglässt und sodann den Buchstaben $a\, b\, c \ldots$ Indices anfügt. — Nenne ich nun nun die Formen des zu f' gehörigen, als bekannt vorausgesetzten Systems:

$$A_1', \;\; A_2' \; .\;.\;.\;. \; A_\varrho',$$

dann entsprechen diesen Formen in obiger Weise Covarianten von f, welche ich durch:

$$A_1, \;\; A_3 \ldots A_\varrho$$

bezeichne und die *speciellen* Formen von f nenne.

Da jede Covariante und Invariante von f' eine ganze Function mit numerischen Coefficienten der Formen A' ist, so ist auch jede den Factor $a_x\, b_x\, c_x \ldots$ enthaltende Form von f eine ganze Function der speciellen Formen.

§ 22.

Die Formen K und χ.

Die zunächst interessanten Covarianten und Invarianten sind die Formen zweiter Ordnung; ihr symbolischer Ausdruck ist:

$$(f, f)^\nu = a_x^{n-\nu}\, b_x^{n-\nu}\, (ab)^\nu.$$

Diejenigen unter ihnen, für welche die Zahl ν ungerade ist, haben den Werth 0; die übrigen unterscheide ich je nachdem ν kleiner, gleich oder grösser als $\frac{n}{2}$ ist. Die Covariante:

$$(f, f)^{\frac{n}{2}} = a_x^{\frac{n}{2}}\, b_x^{\frac{n}{2}}\, (ab)^{\frac{n}{2}},$$

für welche also $\nu = \frac{n}{2}$ ist, bezeichne ich durch K; die Formen:

$$(f, f)^{\frac{n}{2}+2}; \;\; (f, f)^{\frac{n}{2}+4}; \;\; (f, f)^{\frac{n}{2}+6} \ldots (f, f)^n$$

durch:

$$\chi_1; \qquad \chi_2; \qquad \chi_3; \qquad \chi_{\frac{n}{2}},$$

für sie ist $\nu > \frac{n}{2}$.

(Bei denjenigen Formen f, deren Grad nicht durch 4 theilbar ist, existirt keine Form K.)

In dieser Bezeichnungsweise gehören im Sinne des § 6. zu dem unvollständigen Producte $(ab)^{\frac{n}{2}}$ die Formen K und χ (und wenn n nicht durch 4 theilbar ist, die Formen χ allein). Zu dem unvollständigen Producte $(ab)^{\frac{n}{2}+1}$ gehören die Formen χ.

Jedes den Factor $(ab)^{\frac{n}{2}}$ enthaltende symbolische Product ist daher eine Form $P(K, \chi)$ und jedes den Factor $(ab)^{\frac{n}{2}+1}$ enthaltende symbolische Product eine Form $P(\chi)$.

§ 23.

Die Formen W.

Die Formen W will ich hier etwas anders definiren, als es in der im Crelle'schen Journal, 69. Band veröffentlichten Abhandlung geschehen ist. Diejenigen symbolischen Producte, bei denen jedes der darin vorkommenden Symbole

$$a, \; b, \; c \; \ldots .$$

mindestens durch einen Factor erster Art vertreten ist und bei denen ferner mindestens einer dieser Factoren etwa a_x zu einer Potenz vorkommt, deren Grad grösser als $\frac{n}{2}$ ist, mögen W heissen. Da W den Factor $a_x\, b_x\, c_x \ldots$ besitzt, so ist es als eine ganze Function der speciellen Formen darstellbar (vgl. § 21.). Ich behaupte nun: Für jede Uebereinanderschiebung $(Wf)^\nu$ existirt entweder ein Glied, welches als eine Form $P(K, \chi)$ dargestellt werden kann, oder ein Glied, welches eine Form W ist.

Beweis. Ist:

$$W = b_x^{\frac{n}{2}+i}\; c_x^{\alpha_1}\, d_x^{\alpha_2} \; \ldots \; \Delta(W),$$

dann ist für $\nu > \frac{n}{2} + i$ das symbolische Product (vgl. § 8.):

$$Z_1 = a_x^{\frac{n}{2}-i}\; (ab)^{\frac{n}{2}+i}\; (ac)\, (ad) \ldots \Delta(W)$$

für $\nu \leqq \frac{n}{2} + i$ das symbolische Product:

$$Z_2 = a_x^{n-\nu}\; (ab)^\nu\; b_x^{\frac{n}{2}+i-\nu}\; c_x^{\alpha_1}\, d_x^{\alpha_2} \ldots \Delta(W),$$

ein Glied der Uebereinanderschiebung $(Wf)^\nu$.

Die Form Z_1 hat stets, Z_2 für $\nu \geqq \frac{n}{2}$ den Factor $(ab)^{\frac{n}{2}}$; Z_1 ist also immer, Z_2 für $\nu \geqq \frac{n}{2}$ als Form $P(K, \chi)$ darstellbar. Für $\nu < \frac{n}{2}$ ist Z_2 eine Form W. —

Zweiter Satz. Jedes symbolische Product R lässt sich in die Form:

$$R = \Sigma\, W + P(K, \chi)$$

bringen.

Beweis. Man bezeichne dasjenige Symbol in R, für welches R die kleinste Norm hat, durch a, diese Norm (a) durch ν, und mache die Annahme, unser Satz gelte für alle Formen von niederer Ordnung als R und für diejenigen Formen derselben Ordnung, für welche die Norm in Bezug auf irgend ein Symbol kleiner als ν ist. —

Man bezeichne die Ordnung von R mit m und stelle diese Form nach § 9. als Glied einer Uebereinanderschiebung $(R'f)^\nu$ dar. Die Form R' ist von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, lässt sich also nach Annahme in die Form bringen:

$$R' = \Sigma\, W + P(K, \chi).$$

Die Uebereinanderschiebungen $(Wf)^\nu$ besitzen nach dem ersten Satze Glieder Z, welche entweder Formen W oder $P(K, \chi)$ sind. In dem Ausdrucke

$$R = (R - (R'f)^\nu) + \Sigma\,((Wf)^\nu - Z) + P(K, \chi) + \Sigma\, Z$$

besitzen die Glieder $P(K, \chi)$ und Z die verlangte Form, während die Glieder:

$$R - (R', f)^\nu \text{ und } (Wf)^\nu - Z$$

nach § 4. Aggregate symbolischer Producte sind, für welche eine Norm kleiner als ν ist; welche sich also nach Annahme in der verlangten Form darstellen lassen. —

Da nun alle Covarianten und Invarianten von f Aggregate symbolischer Producte R sind, so lassen sie sich in die Form $W + P(K, \chi)$ bringen und da die W ganze Functionen der speciellen Formen A sind, in die Form:

$$\Sigma\, c\, S(A) + P(K, \chi).$$

Hieraus folgt nach § 14., *dass das System der speciellen Formen in Bezug auf die Formen K und χ vollständig ist.*

(Bei Formen f, deren Grad nicht durch 4 theilbar ist, ist das System der speciellen Formen in Bezug auf die Formen χ vollständig).

§ 24.

Das System der Covariante K.

Die Covariante $K = a_x^{\frac{n}{2}}\, b_x^{\frac{n}{2}}\, (ab)^{\frac{n}{2}}$ ist wie f vom n^{ten} Grade, besitzt also ein System von Formen, welche den Covarianten und Invarianten

von f entsprechen. Die speciellen Formen im System von K will ich durch:

$$B_1, \; B_2 \; . \; . \; . \; B_\varrho$$

bezeichnen, während ich die den Formen K und χ_i im System von f entsprechenden Formen $(K,K)^{\frac{n}{2}}$ und $(K,K)^{\frac{n}{2}+2i}$ durch L und ψ_i bezeichnen will. Das aus den Formen B bestehende System ist dann in Bezug auf die Formen L und ψ vollständig und man kann die symbolischen Producte:

$$\text{(I)} \qquad C(B) = \Sigma\, c\, S(B) + P(L\,,\,\psi)$$

setzen. Um dieser Gleichung eine einfachere Form zu geben, bedienen wir uns der folgenden Hülfssätze:

Erster Satz.

Die Uebereinanderschiebung $(K,f)^\nu$ ist eine Form $P(K\,,\,\chi)$, wenn $\nu \geqq \frac{n}{2}$ und $< n$ ist.

Beweis. Die Uebereinanderschiebung:

$$R = (K,f)^\nu = \left(a_x^{\frac{n}{2}}\, b_x^{\frac{n}{2}}\, (ab)^{\frac{n}{2}},\, c_x^n\right)^\nu$$

besitzt folgende Glieder (vgl. § 8.):

$$Z_0 = (ab)^{\frac{n}{2}}\, (ac)^{\frac{n}{2}}\quad (bc)^{\nu-\frac{n}{2}}\, b_x^{n-\nu}\quad c_x^{n-\nu}\,,$$

$$Z_1 = (ab)^{\frac{n}{2}}\, (ac)^{\frac{n}{2}-1}\, (bc)^{\nu-\frac{n}{2}+1}\, a_x\, b_x^{n-\nu-1}\, c_x^{n-\nu}\,,$$

$$Z_2 = (ab)^{\frac{n}{2}}\, (ac)^{\frac{n}{2}-2}\, (bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2}\, a_x^2\, b_x^{n-\nu-2}\, c_x^{n-\nu}\,,$$

. . . .

Die Differenzen benachbarter Glieder haben nach § 8. das unvollständige symbolische Product $(ab)^{\frac{n}{2}+1}$ zum Factor und sind daher nach § 22. Formen $P(\chi)$; demgemäss sind auch die Differenzen von irgend zwei Gliedern sowie die Differenzen $R - Z$ Formen $P(\chi)$. Unsere Behauptung ist erwiesen, wenn man zeigt, dass eines der Glieder Z selbst oder ein Aggregat derselben verschwindet oder eine Form $P(\chi)$ ist.

Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem erstens ν ungerade ist, zweitens den Werth $n - 2$ hat oder drittens gerade und $\leqq n - 4$ ist.

Im ersten Falle verschwindet das Glied Z_0.

Im zweiten Falle ist:

$$Z_1 = (ab)^{\frac{n}{2}}\, (ac)^{\frac{n}{2}-1}\, (bc)^{\frac{n}{2}-1}\, a_x\, b_x\, c_x^2\,.$$

Vertauscht man in diesem symbolischen Producte die Buchstaben a, b, und c mit einander, dann erhält man die Formel:

$$3Z_1 = (ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\frac{n}{2}-1}(bc)^{\frac{n}{2}-1} a_x b_x c_x \{c_x(ab) - b_x(ac) + a_x(bc)\} = 0.$$

Im dritten Falle bedarf es einer etwas längeren Rechnung. Es ist in demselben:

$$Z_1 = (ab)^{\frac{n}{2}}(ac)^{\frac{n}{2}-1}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+1} a_x b_x^{n-\nu-1} c_x^{n-\nu}.$$

Durch Vertauschung der Symbole b und c erhält man die Gleichung:

$$2Z_1 = (ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\frac{n}{2}-1}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+1} a_x b_x^{n-\nu-1} c_x^{n-\nu-1}\{c_x(ab) - b_x(ac)\}$$
$$= -(ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\frac{n}{2}-1}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2} a_x^2 b_x^{n-\nu-1} c_x^{n-\nu-1},$$

und wenn man hierin die Symbole a und b vertauscht:

$$4Z_1 = (ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\nu-\frac{n}{2}+2}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2} a_x^2 b_x^2 c_x^{n-\nu-1}\left\{(a_x(bc))^{n-\nu-3} - (b_x(ac))^{n-\nu-3}\right\}.$$

Diese Formel geht, wenn man für $a_x(bc)$ seinen Werth $b_x(ac) - c_x(ab)$ einträgt, in die folgende über:

$$4Z_1 = (ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\nu-\frac{n}{2}+2}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2} a_x^2 b_x^2 c_x^{n-\nu-1}\left\{(b_x(ac) - c_x(ab))^{n-\nu-3} - (b_x(ac))^{n-\nu-3}\right\}$$
$$= (ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\nu-\frac{n}{2}+2}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2} a_x^2 b_x^2 c_x^{n-\nu-1} \sum_{1}^{n-\nu-3}{}_i \binom{n-\nu-3}{i}(-1)^i (b_x(ac))^{n-\nu-3-i}(c_x(ab))^i$$
$$= \sum_{1}^{n-\nu-3}{}_i \binom{n-\nu-3}{i}(-1)^i (ab)^{\frac{n}{2}+i-1}(ac)^{\frac{n}{2}-i-1}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2} a_x^2 b_x^{n-\nu-i-1} c_x^{n-\nu+i-1}.$$

Das erste Glied dieser Summe hat den Werth $-(n-\nu-3)Z_2$; die übrigen sind symbolische Producte, welche das unvollständige symbolische Product $(ab)^{\frac{n}{2}+1}$ zum Factor haben, also nach § 22. Formen $P(\chi)$.

Da das Aggregat $4Z_1 + (n-\nu-3)Z_2$ eine Form $P(\chi)$ ist, so ist es auch die Uebereinanderschiebung R.

Zweiter Satz.

Bezeichnet man die Invariante $(f,K)^n$ durch J, dann sind die Formen $L = (K,K)^{\frac{n}{2}}$ und $\psi_i = (K,K)^{\frac{n}{2}+2i}$ als Formen $P(\chi, J)$ darstellbar.

Beweis. Zu dem unvollständigen Producte $(aK)^{\frac{n}{2}}$ gehören die Formen:

$$(f,K)^{\frac{n}{2}}, \quad (f,K)^{\frac{n}{2}+1} \ldots (f,K)^{n-1}, \quad (f,K)^n = J.$$

Da sie nach dem vorigen Satze sämmtlich Formen $P(\chi, J)$ sind, so ist auch jedes den symbolischen Factor $(aK)^{\frac{n}{2}}$ enthaltende symbo-

lische Product eine solche Form (vergl. § 6.), mithin auch das symbolische Product:

$$Z = (aK)^{\frac{n}{2}} (ab)^{\frac{n}{2}} (bK)^i b_x^{\frac{n}{2}-i} K_x^{\frac{n}{2}-i}.$$

Dasselbe ist eines der Eintragungsglieder, welche entstehen, wenn man in dem symbolischen Producte:

$$K_x^{\frac{n}{2}-i} K'^{\frac{n}{2}-i}_x (K', K)^{\frac{n}{2}+i} = (K, K)^{\frac{n}{2}+i},$$

für das die Form $K = a_x^{\frac{n}{2}} b_x^{\frac{n}{2}} (ab)^{\frac{n}{2}}$ darstellende Symbol K' seinen Werth einträgt (vergl. § 3.). Die Differenz $(K, K)^{\frac{n}{2}+i} - Z$ ist nach § 4. ein Aggregat symbolischer Producte, welche das unvollständige symbolische Product $(ab)^{\frac{n}{2}+1}$ als Factor enthalten, also von Formen $P(\chi)$.

Da die Ausdrücke Z und $(K, K)^{\frac{n}{2}+i} - Z$ Formen $P(\chi, J)$ sind, so sind es auch die Formen $(K, K)^{\frac{n}{2}+i}$ d. h. die Formen L und ψ.

Ebenso wie die Formen L und ψ ist jede Form $P(L, \psi)$ eine Form $P(\chi, J)$, so dass die Gleichung (I)

$$C(B) = \Sigma c\, S(B) + P(L, \psi)$$

durch die Gleichung:

$$C(B) = \Sigma c\, S(B) + P(\chi, J)$$

ersetzt werden kann, welche aussagt, *dass das aus den Formen B bestehende System in Bezug auf die Formen χ und J vollständig ist.*

§ 25.

Das System der Form f.

Das aus den speciellen Formen A bestehende System ist in Bezug auf die Formen K und χ, also auch in Bezug auf die Formen B und χ, vollständig, das aus den B bestehende System im Bezug auf die Formen χ und J, mithin ist nach § 17. das aus diesen beiden Systemen combinirte System der $[AB]$ in Bezug auf die Formen χ und J vollständig, und zwar eigentlich vollständig, da es die Form f enthält.

Die Grade der Formen χ_i sind kleiner als n; ich mache die Annahme, dass ihre Systeme aufgestellt seien. Combinirt man dieselben, dann erhält man ein vollständiges System S (vergl. § 17.); dasselbe enthält f, ist daher das System dieser Form.

Es enthält im Sinne des § 18. überflüssige Formen; am leichtesten kann man es dadurch reduciren, dass man die einzelnen bei seiner Bildung auftretenden Systeme (vergl. § 13.):

$$A \; ; \; B \; ; \; [A\,, B] \; ; \; [A\,, B\,, \chi_{1k}] \; ; \; (A\,, B\,, \chi_{1k}\,, \chi_{2k}) \; \ldots .$$

jedes für sich reducirt.

Von den Formen A sind diejenigen überflüssig, welche sich in der Form:

$$\Sigma c\, S\,(A) + P\,(K\,, \chi)$$

ausdrücken lassen; eine Anzahl der dahin gehörigen Formen kann man sofort angeben. Bezeichnet man nämlich diejenigen Formen von f, welche K und χ entsprechen, durch K' und χ' (vgl. § 21.), dann lassen sich einige Formen A' als Formen $P\,(K'\,, \chi')$ darstellen; man kann nun zeigen, dass diejenigen speciellen Formen, welche diesen Formen A' entsprechen, Formen $P\,(K\,, \chi)$ sind.

Diejenigen Formen B und $[AB]$, welche in die Form:

$$\Sigma c\, S\,(B) + P\,(\chi\,, J)^{*} \quad \text{und} \quad \Sigma c\, S\,[AB] + P\,(\chi\,, J)$$

gebracht werden können, sind im System S überflüssig; von denselben erwähne ich besonders diejenigen Formen B, welche überflüssigen Formen A entsprechen (vgl. § 24).

In dem System der Formen χ_1 und in dem aus diesem Systeme und dem Systeme der $[AB]$ combinirten Systeme sind alle diejenigen Formen überflüssig, welche sich als ganze Functionen anderer solcher Formen und Formen $P\,(\chi_2\,, \chi_3\,, \ldots, J)$ ausdrücken lassen u. s. w.

Lässt man alle diese Formen weg, dann erhält man das reducirte System der Form f, dessen Formen Herr Cayley (Philosophical Transactions vol. 146) irreductibel genannt hat. Im Allgemeinen kenne ich keine Criterien, um die überflüssigen und nothwendigen Formen von einander zu unterscheiden; ich beschränke mich in den folgenden Beispielen darauf, die als überflüssig erkannten wegzulassen.

§ 26.

Ueber die Form $f = a_x$.

Da die Form $f = a_x$ keine Covariante oder Invariante hat, so besteht ihr System aus ihr allein.

Combinirt man dasselbe mit dem aus den beliebigen Formen:

$$A_1 \;\; , \;\; A_2 \;\; , \;\; \ldots \;\; , \;\; A_\varrho$$

bestehenden Systeme S (vgl. § 12.), dann erhält man ein System T, welches ausser den Formen A und f diejenigen Uebereinanderschiebungen der Form:

$$(A_i \;\; , \;\; f^{\nu})^{\nu}$$

enthält, für welche die Zahl ν nicht grösser als der Grad a_i der Form A_i ist.

Das simultane System einer Anzahl linearer Formen:

$$f_1 \,,\, f_2 \,, \ldots .$$

besteht aus diesen Formen und ihren Functionaldeterminanten.

§ 27.

Ueber die Form $f = a_x^2$.

I. Die Form $f' = a'_x$ (vgl. § 21.) ist hier linear; ihr System besteht aus ihr allein und somit das System der speciellen Formen von f aus f allein.

Die einzige Form χ (vgl. § 22.) ist hier die Invariante

$$(ab)^2 = (f\,, f)^2,$$

in Bezug auf dieselbe ist das aus der Form f allein bestehende System vollständig.

Hieraus folgt, dass die Formen f und $(f\,,\,f)^2$ ein vollständiges System, nämlich das der Form f bilden.

II. Ich gehe nun zu der Aufgabe über, dieses System mit einem beliebigen Systeme S, welches aus den Formen:

$$A_1 \;;\; A_2 \;;\; A_3 \;;\; \ldots \;;\; A_\varrho$$

bestehen möge, zu einem System zu combiniren.

Demgemäss combinire ich das System S mit dem aus der Form f allein bestehenden Systeme und füge alsdann die Invariante $(f\,,\,f)^2$ hinzu.

Das System T enthält nach § 14. ausser den Formen f, $(f\,, f)^2$ und A die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$[S(A)\;,\; f^\varrho]^\nu .$$

Dieselben zerfallen nach § 12. in zwei Gruppen, je nachdem $S(A)$ eine einzelne Form A oder ein Product solcher Formen bedeutet. Die Uebereinanderschiebungen der ersten Gruppe haben entweder die Form:

$$(A_i \;,\; f^\varrho)^{2\varrho-1}$$

oder die Form:

$$(A_i \,,\, f^\varrho)^{2\varrho},$$

wobei jedoch der Grad der Uebereinanderschiebung nicht grösser als derjenige der Form A_i sein darf.

Bei der Aufstellung der Uebereinanderschiebungen der zweiten Gruppe muss man solche Producte $S(A)$ wählen, welche dem Restsystem $(1\,,\,1)$ (vgl. § 12.) entsprechen, also aus zwei Factoren A_i und A_k bestehen, deren Grade a_i und a_k ungerade Zahlen sind.

Für diese Uebereinanderschiebungen muss ausserdem:

$$\nu = 2\varrho = a_i + a_k$$

sein, sie sind Invarianten.

Ist das System S entweder absolut vollständig oder in Bezug auf die Form f eigentlich vollständig, dann ist das System T ein vollständiges System. In demselben kommen im Allgemeinen überflüssige Formen vor; ich will hier nur die folgenden erwähnen, welche sehr häufig auftreten.

Ist nämlich die Form A die Functionaldeterminante zweier anderer Formen A, welche ich durch $\varphi = \varphi_x^r$ und $\psi = \psi_x^s$ bezeichnen will, ist also:

$$A = \varphi_x^{r-1}\,\psi_x^{s-1}\,(\varphi\psi),$$

und findet ferner die Ungleichung statt:

$$2\varrho < r + s - 1,$$

dann ist die Uebereinanderschiebung:

$$(A\,,f^{\varrho})^{2\varrho-1} = (\varphi_x^{r-1}\,\psi^{s-1}\,(\varphi\psi)\;,\;a_x^2\,a_{1,x}^2\,a_{2,x}^2\,\ldots\,a_{\varrho-1,x}^2)^{2\varrho-1}$$

im Systeme T überflüssig.

Beweis. Zerlegt man ϱ in zwei Theile, welche der Ungleichung genügen:

$$r \geqq 2\sigma \qquad ; \qquad s-1 > 2\tau,$$

dann ist das symbolische Product:

$$\varphi_x^{r-2\sigma}\psi_x^{s-1-2\tau}a_x(\varphi a_1)^2(\varphi a_2)^2\ldots(\varphi a_{\sigma-1})^2(\psi a_\sigma)^2(\psi a_{\sigma+1})^2\ldots(\psi,a_{\varrho-1})^2(\varphi a)(\varphi\psi)$$

ein Glied unserer Uebereinanderschiebung. Da sich dasselbe mittelst der Identität:

$$2a_x\,\psi_x\,(\varphi a)\,(\varphi\psi) = a_x^2\,(\varphi\psi)^2 + \psi_x^2\,(\varphi a)^2 - \varphi_x^2\,(\psi a)^2$$

auf Formen niederer Ordnung zurückführen lässt, so ist unsere Uebereinanderschiebung überflüssig (§ 18. Fall I.).

III. Besonderes Interesse bieten die simultanen Systeme mehrerer quadratischer Formen dar; für dieselben hat Herr Bessel in diesem Journal I. Bd. die Systeme der Invarianten bereits angegeben.

Ich beginne mit der Aufstellung des Systems der beiden quadratischen Formen f_1 und f_2; es entsteht durch Combination der einzelnen Systeme dieser Formen. Da dieselben aus den Formen:

$$f_1\;,\;(f_1\,,f_1)^2 \qquad \text{und} \qquad f_2\;,\;(f_2\,,f_2)^2$$

bestehen, so enthält das simultane System ausser diesen Formen noch die Uebereinanderschiebungen:

$$(f_1\,,f_2) \qquad \text{und} \qquad (f_1\,,f_2)^2.$$

IV. Combinirt man dieses System mit dem einer dritten quadratischen Form f_3, dann ergiebt sich das simultane System der drei Formen f_1, f_2 und f_3.

Dasselbe enthält ausser den Formen:

$$f_1\;,\;f_2\;,\;(f_1\,,f_2)\,,\,(f_1\,,f_1)^2\;,\;(f_1\,,f_2)^2\;,\;(f_2\,,f_2)^2,$$

des simultanen Systems der Formen f_1 und f_2 und den Formen:

$$f_3 \text{ und } (f_3\,,\,f_3)^2$$

des Systems von f_3 die Uebereinanderschiebungen:

$$(f_1\,,f_3)\;;\;(f_2\,,f_3)\;;\;((f_1\,,f_2)\,,f_3)\;;\;(f_1\,,f_3)^2\;;\;(f_2\,,f_3)^2\;((f_1\,,f_2)\,f_3)^2.$$

Von denselben ist nach dem obigen Satze die Uebereinanderschiebung $((f_1\,,f_2)\,,f_3)$ überflüssig.

Die Invariante $((f_1\,,f_2)\,,f_3)^2$ ist die Determinante aus den Coefficienten dieser drei Formen; ich will sie durch $(f_1\,,f_2\,,f_3)$ bezeichnen.

V. Fährt man in dieser Weise fort und combinirt man dieses System mit demjenigen der Form f_4 zu dem simultanen Systeme der Formen $f_1\,,f_2\,,f_3\,,f_4$; dieses System wieder mit dem der Form f_5 zu dem simultanen Systeme der Formen $f_1\,,f_2\,,\ldots,f_5$ u. s. f., so gelangt man endlich zu dem simultanen Systeme der n quadratischen Formen:

$$f_1\;,\;f_2\;,\;\cdots\;,\;f_n\,.$$

Dasselbe besteht aus den Formen:

$$f_i\;;\;(f_i\,,f_k)\;;\;(f_i\,,f_k)^2\;;\;(f_i\,,f_k\,,f_l).$$

§ 28.

Ueber die Form $f = a_x^3$.

I. Die Form $f' = a_x'^2$ (vgl. § 21.) ist quadratisch; ihr System besteht aus den Formen:

$$a_x'^2 \text{ und } (a'\,b')^2\,,$$

das System der *speciellen* Formen von f besteht daher aus den Formen:

$$f \text{ und } (f\,,f)^2 = a_x\,b_x\,(ab)^2.$$

Die letztere Form bezeichne ich durch τ, sie ist die einzige Form χ (vgl. § 22.) und im Systeme der speciellen Formen überflüssig.

Nach Weglassung von τ besteht nunmehr das System der speciellen Formen aus f allein, es ist in Bezug auf τ eigentlich vollständig; combinirt man es mit dem System dieser Form, dann erhält man das *System der Form f.*

Dasselbe enthält ausser den Formen:

$$f\,,\,\tau \text{ und } (\tau\,,\,\tau)^2$$

der zu combinirenden Systeme nach § 27. die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f\,,\,\tau^\varrho)^\nu \text{ und } (f^2\,,\,\tau^3)^\sigma,$$

also die Formen:

$$(f\,,\tau)\;,\;(f\,,\,\tau)^2\;,\;(f\,,\,\tau^2)^3\;,\;(f^2\,,\,\tau^3)^6.$$

Die drei letzten Formen sind im Systeme überflüssig.

Die Form:

$$(f, \tau)^2 = a_x (a\tau)^2 = a_x (ab)(ac)(bc)^2$$

nämlich verschwindet in Folge der Identität:

$$3 (f\tau)^2 = (ab)(ac)(bc) \left\{a_x(bc) - b_x(ac) + c_x(ab)\right\} = 0;$$

sie ist die einzige zu dem unvollständigen Producte $(a\tau)^2$ gehörige Form (§ 6.).

Es verschwinden daher alle symbolischen Producte, welche den Factor $(a\tau)^2$ enthalten; da zu denselben auch Glieder der Uebereinanderschiebungen:

$$(f, \tau^2)^3 \qquad \text{und} \qquad (f^2, \tau^3)^6$$

gehören, so sind diese letzteren ein System der Form f überflüssig. Die Formen, welche dieses System bilden, sind somit:

$$f \ ; \ (f, f)^2 = \tau \ ; \ (f, \tau) = p \ ; \ (\tau, \tau)^2$$

zwischen ihnen besteht die bekannte Beziehung:

$$\text{(I)} \qquad 2p^2 + \tau^3 + f^3 . (\tau, \tau)^2 = 0.$$

II. Ich will nun das simultane System T einer cubischen Form f und einer quadratischen Form f' aufstellen. Die in demselben auftretenden Invarianten hat bereits Herr Bessel angegeben.

Das System T entsteht durch Combination der Systeme von f und f', welche aus den Formen:

$$f, \ \tau \ , \ p \ , \ (\tau\tau)^2$$

und:

$$f' \ , \ (f', f')^2$$

bestehen, und enthält ausser denselben die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f^{r_1} \tau^{r_2} p^{r_3} \ , f'^{\varrho})^\nu,$$

also nach § 27. (II) die Formen:

$$(f, f') \ ; \ (f, f')^2 \ ; \ (f, f'^2)^3 \ ; \ (\tau, f') \ ; \ (\tau, f')^2$$
$$(p, f') \ ; \ (p, f')^2 \ ; \ (p, f'^2)^3$$
$$(f^2, f'^3)^6 \ ; \ (fp, f'^3)^6 \ (p^2, f'^3)^6.$$

Von denselben sind die Formen:

$$(p, f') \qquad \text{und} \qquad (p^2, f'^3)^6$$

im Systeme T überflüssig; die erste nach § 27. (II), weil p eine Functionaldeterminante ist, die letztere nach § 18. Fall III, weil das Quadrat der Functionaldeterminante p mittelst Identität (I) durch andere Producte ausdrückbar ist.

III. Ich gehe nun dazu über, das System der cubischen Form f, welches aus den Formen:

$$f \ , p \ , \tau \ , (\tau, \tau)^2$$

besteht, mit einem beliebigen andern Systeme S, welches aus den Formen:

$$A_1 \ , \ A_2 \ , \ A_3 \ , \ \ldots$$

bestehen möge, zu combiniren.

Durch diese Combination entsteht ein System, welches ausser den Formen der beiden Systeme die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A) \ , \ f^r \ p^{r_1} \ \tau^{r_2})^\nu$$

enthält.

Da dieselbe der Coefficient von λ^{r_1} in der Uebereinanderschiebung:

$$(S(A) \ , \ (f + \lambda p)^{r+r_1} \ \tau^{r_2})^\nu$$

ist, so wird man alle Formen des gesuchten Systems dadurch erhalten, dass man zuerst die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A) \ , \ (f + \lambda p)^s \ \tau^{s_1})^\nu$$

bildet, d. h. das System S mit dem System der Formen:

$$f + \lambda p \ ; \ \tau \ ; \ (\tau \ , \ \tau)^2$$

combinirt und alsdann die Coefficienten der Potenzen von λ als einzelne Formen ansieht.

Das so zu bildende System kann man nach §. 19. durch ein anderes System T ersetzen, welches in der folgenden Weise gebildet wird.

Zuerst combinire man das System S mit dem aus der Form

$$f + \lambda (f\tau),$$

welche ich durch q bezeichnen will, allein bestehenden Systeme zu einem neuen Systeme U, bezeichne in demselben diejenigen Formen, in denen das Symbol q nicht in Factoren erster Art auftritt, die Formen A mit inbegriffen, durch:

$$A_1' \ , \ A_2' \ , \ \ldots .$$

und füge dann dem Systeme U die Formen τ , $(\tau \ , \ \tau)^2$ und die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A') \ , \ \tau^\varrho)^\nu$$

hinzu.

Die Bildung des Systems U ist bereits im § 12. angegeben worden; es enthält 1) die Uebereinanderschiebungen der Form

$$(A_i \ , \ q^\varrho)^\nu$$

und 2) Uebereinanderschiebungen der Form:

$$(S(A) \ , \ q^\varrho)^\nu,$$

bei denen das Product $S(A)$ einem der Restsysteme:

$$(1 , 1) \ , \ (1 , 2) \ , \ (2 , 2) \ , \ (1 , 1 , 1) \ , \ (2 , 2 , 2)$$

entspricht.

IV. Als Anwendung dieser Methode will ich nunmehr das simultane System zweier cubischen Formen f und f' aufstellen.

Die einzelnen Systeme dieser Formen enthalten die Formen:

$$f\ ,\ (f\ ,f)^2 = \tau\ ,\ (f\ ,\tau) = p\ ,\ (\tau\ ,\ \tau)^2$$
$$f'\ ,\ (f',f')^2 = \tau'\ ,\ (f'\ ,\tau') = p'\ ,\ (\tau'\ ,\ \tau')^2.$$

Setzt man die Ausdrücke:

$$f + \lambda p = q \qquad \text{und} \qquad f' + \lambda' p' = q'$$

und combinirt man das System:

$$q\ \ ,\ \ \tau\ \ ,\ \ (\tau\ ,\ \tau)^2$$

mit dem Systeme:

$$q'\ \ ,\ \ \tau'\ \ ,\ \ (\tau'\ ,\ \tau')^2,$$

dann erhält man ein System Ω, aus dem das gesuchte simultane System dadurch entsteht, dass man die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als einzelne Formen ansieht.

Das System Ω kann durch ein System T ersetzt werden (vgl. oben III.), welches in der folgenden Weise entsteht. Zuerst combinire man das System

$$q\ \ ,\ \ \tau\ \ ,\ \ (\tau\ ,\ \tau)^2$$

mit dem aus der Form q' allein bestehenden Systeme zu einem neuen Systeme U, bezeichne darin diejenigen Formen, bei denen das Symbol q' nicht in Factoren erster Art auftritt, die Formen $q\ ,\ \tau\ ,\ (\tau\ ,\ \tau)^2$ inbegriffen durch

$$A_1'\ \ ,\ \ A_2'\ \ ,\ \ \ldots .$$

und füge sodann dem Systeme U die Formen $\tau'\ ,\ (\tau'\ ,\ \tau')^2$ und die Uebereinanderschiebungen zweiter Art, der Form:

$$[S(A')\ ,\ \tau'^{\varrho}]^{\nu}$$

hinzu.

Das System U enthält ausser den Formen:

$$q\ ,\ \tau\ ,\ (\tau\ ,\ \tau)^2\ ,\ q'$$

erstens die Uebereinanderschiebungen

$$(q\ ,\ q')^{\nu} \qquad \text{und} \qquad (\tau\ ,\ q')^{\nu},$$

und ferner Uebereinanderschiebungen der Form

$$(q^r\, \tau^s\ ,\ q'^{\varrho})^{\nu},$$

bei denen das Product $q^r \tau^s$ einem der Restsysteme:

$$(1\ ,1)\ \ ,\ \ (1\ ,2)\ \ ,\ \ (2\ ,2)\ \ ,\ \ (1\ ,1\ ,1)\ \ ,\ \ (2\ ,2\ ,2)$$

entspricht (vgl. § 12.).

Da die Grade der Formen q und τ durch den Grad 3 der Form q' dividirt die Reste 0 und 3 lassen, so sind die einzigen Producte

dieser Art: τ^2 und τ^3. Die ihnen entsprechenden Uebereinanderschiebungen sind:

$$(\tau^2\,,\,q')^3 \quad \text{und} \quad (\tau^3\,,\,q'^2)^6,$$

Von denselben ist wegen der Identität (I) (vgl. § 18. dritter Fall) die Invariante $(\tau^3\,,\,q'^2)^6$ im Systeme U überflüssig, dasselbe besteht mithin aus den Formen:

$$q\,;\tau\;;\;(\tau,\tau)^2;\;q'\;;\;(q,q')\;;\;(q,q')^2\;;\;(q,q')^3\;;\;(\tau,q')\;;\;(\tau,q')^2\;;\;(\tau^2,q')^3.$$

Von denselben sind die Formen:

$$q\;;\;\tau\;;\;(\tau\,,\,\tau)^2\;;\;(q\,,\,q')^3\;;\;(\tau^2,q')^3 \qquad \text{Formen } A',$$

da bei den übrigen das Symbol q' in Factoren erster Art auftritt.

Das System T enthält ausser den Formen des Systems U und den Formen:

$$\tau' \text{ und } (\tau'\,,\,\tau')^2$$

die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(q^{r_1}\,\tau^{r_2}\,((\tau^2,q')^3)^{r_3},\,\tau'^{\varrho})^{\nu},$$

also die Formen (vgl. § 27. II.):

$$(q,\tau')\,;(q,\tau')^2\,;\,(\tau,\tau')\,;(\tau,\tau')^2\,;\,((\tau^2,q')^3,\tau')\;;\;((\tau^2,q')^3,(\tau^2,q')^3,\tau')^2$$
$$(q,\tau'^2)\quad;\,(q'(\tau^2,q'^3),\tau'^2)\,;\,(q^2,\tau'^3)^6\,.$$

Von denselben sind die vier Formen:

$$((\tau^2,q')^3,\tau')\;;\;((\tau^2,q')^3\,.\,(\tau^2,q')^3\,,\,\tau')^2\;;\;(q\,.(\tau^2\,,\,q')^3\,,\,\tau'^2)^4\;;\;(q^2\,,\,\tau'^3)^6$$

überflüssig; die ersten drei Formen, weil sie sich von den Producten

$$(\tau,\tau')^2\,.\,(\tau,q')^2\quad;\quad(\tau,\tau')^2\,.\,(\tau^3,q'^2)^6\quad;\quad(\tau,\tau')^2.(\tau\tau')^2.(qq')^3,$$

welche mit ihnen in Symbolen und Norm übereinstimmen, nur um Formen niederer Norm unterscheiden; die letzte Form nach § 18. Fall 3., weil sich die Potenz τ'^3 nach Identität (I) durch andere Producte ausdrücken lässt.

Das in dieser Weise reducirte System Ω besteht aus den Formen:

$$q\;;\;\tau\;;\;(\tau,\tau)^2\;;\;q'\;;\;\tau'\;;\;(\tau',\tau')^2,$$
$$(q,q')\;;\;(q,q')^2\;;\;(q,q')^3\;;\;(\tau,q')\,;(\tau,q')^2\;;\;(\tau^2,q')^3\;;\;(\tau',q)\;;\;(\tau',q)^2\,;$$
$$(\tau'^2,q)^3\;;\;(\tau,\tau')\;;\;(\tau,\tau')^2.$$

Setzt man in denselben für q und q' ihre Werthe $f+\lambda p$ und $f'+\lambda p'$, und betrachtet man sodann die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als besondere Formen, dann erhält man das simultane System der Formen f und f'. Es besteht aus den 34 Formen:

$$f\;;\;\tau\;;\;p\;;\;(\tau,\tau)^2\;;\;f'\;;\;\tau'\;;\;p'\;;\;(\tau',\tau')^2\;;\;(\tau,\tau')\;;\;(\tau,\tau')^2;$$
$$(f,f')\,;\,(f,p')\;;\;(f',p)\;;\;(f',p')\;;\;(f,f')^2\;;\;(f,p')^2\;;\;(p,f')^2\;;\;(p,p')^2;$$
$$(f,f')^3\;;\;(f,p')^3\;;\;(p,f')^3\;;\;(p,p')^3\;;\;(f,\tau')\;;\;(p,\tau')\,;\,(f,\tau')^2\,;\,(p,\tau')^2\,;\,(f,\tau'^2)^3;$$
$$(p,\tau'^2)^3\;;\;(f',\tau)\;;\;(f',\tau)^2\;;\;(f',\tau^2)^3\;;\;(p',\tau);\;(p',\tau)^2\;;\;(p',\tau^2)^3;$$

von welchen diejenigen Functionaldeterminanten überflüssig sind (§ 27.) (II), bei denen p oder p' eine der übereinanderzuschiebenden Formen ist, da sich dieselben durch Formen niederer Ordnung ausdrücken lassen. Es sind dies die fünf Formen:

$$(f,p')\,;\ (p,f')\ ;\ (p,p')\ ;\ (p,\tau')\ ;\ (\tau,p')\,.$$

§ 29.

Ueber die Form $f = a_x{}^4$.

I. *Das System der Form* f. Da der Grad der Form f durch 4 theilbar ist, so existirt eine Covariante K (§ 22.); es ist die Form:

$$(f,f)^2 = a_x^2\, b_x^2\, (ab)^2,$$

ich will sie durch Δ bezeichnen. Die einzige Form χ ist die Invariante $(f,f)^4$.

Das System der Form $f' = a_x'^3$ (vgl. § 21.) und nach § 28. (I) besteht aus den Formen:

$$f'\ ;\ (f',f')^2 = \tau'\ ;\ (f',\tau')\ ;\ (\tau',\tau')^2.$$

Der Form τ' in demselben entspricht die Form Δ des Systems von f und daher entsprechen nach § 25. den das Symbol τ' enthaltenden Formen (f',τ') und $(\tau',\tau')^2$ Formen $P(K,\chi)$.

Diese Formen sind im System der speciellen Formen überflüssig; nach ihrer Weglassung besteht dieses System aus der Form f allein, es ist nach § 23. in Bezug auf die Formen Δ und $(f,f)^4$ eigentlich vollständig. Das System der speciellen Formen von Δ besteht aus dieser Form allein; es ist in Bezug auf die Invarianten $(f,f)^4$ und $(f,\Delta)^4$ vollständig (§ 24.).

Combinirt man die beiden Systeme specieller Formen, dann entsteht ein System T, welches in Bezug auf diese Invarianten eigentlich vollständig ist. Es enthält ausser den Formen f und Δ die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f^r\ ,\ \Delta^\varrho)^\nu.$$

Diese Uebereinanderschiebung gehört nun nach § 11. nur dann der zweiten Art an, wenn sowohl r als auch ϱ gleich 1 ist; wir erhalten somit nur die neuen Formen:

$$(f,\Delta)\ ;\ (f,\Delta)^2\ ;\ (f,\Delta)^3\ ;\ (f,\Delta)^4.$$

Die letzteren drei sind im System T überflüssig, da die Formen $(f,\Delta)^2$ und $(f,\Delta)^3$ nach § 24. als Formen $P(\chi)$ darstellbar sind, also die Invariante $(f,f)^4$ zum Factor haben.

Fügt man zu dem so reducirten System T die Invarianten $(f,f)^4$ und $(f,\Delta)^4$ hinzu, dann erhält man (§ 16. III.) ein vollständiges System, nämlich das der Form f. Es enthält die Formen:

$$f\ ;\ (f,f)^2 = \Delta\ ;\ (f,\Delta) = t\ ;\ (f,f)^4 \text{ und } (f,\Delta)^4,$$

zwischen denen die bekannte Beziehung stattfindet:

$$\text{(II)} \qquad 2t^2 + \Delta^3 - \tfrac{1}{2} f^2\Delta.(f,f)^4 + \tfrac{1}{3} f^3.(f\Delta)^4 = 0.$$

II. Das simultane System einer biquadratischen Form f und einer quadratischen Form f' entsteht durch Combination der einzelnen Systeme dieser Formen.

Diese Systeme bestehen aus den Formen:

$$f\ ;\ (f,f)^2 = \Delta\ ;\ (f,\Delta) = t\ ;\ (f,f)^4\ ;\ (f,\Delta)^4\ ;$$
$$f'\ ;\ (f',f')^2.$$

Das gesuchte System enthält daher nach § 27. ausser diesen Formen die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f,f'^{\varrho})^{\nu}\ ;\ (\Delta,f'^{\varrho})^{\nu}\ ;\ (t,f'^{\varrho})^{\nu},$$

also die Formen:

$$(f,f')\ ;\ (f,f')^2\ ;\ (f,f'^2)^3\ ;\ (f,f'^2)^4\ ;\ (\Delta,f')\ ;\ (\Delta,f')^2\ ;\ (\Delta,f'^2)^3;$$
$$(\Delta,f'^2)^4\ ;\ (t,f')\ ;\ (t,f')^2\ ;\ (t,f'^2)^3\ ;\ (t,f'^2)^4\ ;\ (t,f'^3)^5\ ;\ (t,f'^3)^6,$$

von denen nach § 27. (II) die drei Formen:

$$(t,f')\ ;\ (t,f'^2)^3\ ;\ (t,f'^3)^5$$

überflüssig sind, da t eine Functionaldeterminante ist.

III. Das simultane System einer biquadratischen Form f und einer cubischen Form f' kann dadurch gebildet werden, dass man die einzelnen Systeme dieser Formen:

$$f\ ;\ \Delta = (f,f)^2\ ;\ t = (f,\Delta)\ ;\ (f,f)^4\ ;\ (f,\Delta)^4\ ;$$
$$f'\ ;\ (f',f')^2 = \tau\ ;\ (f'\tau) = p\ ;\ (\tau,\tau)^2$$

mit einander combinirt.

Dieses Verfahren ist jedoch etwas weitläufig; ich will mich daher lieber der § 19. gegebenen und § 28. III. und IV. angewandten Methode bedienen.

Die Ausdrücke $f + \lambda\Delta$ und $f' + \lambda' p$ bezeichne ich durch φ und q und combinire sodann das System:

$$\varphi\ ;\ t\ ;\ (f,f)^4\ ;\ (f,\Delta)^4$$

mit dem aus der Form q allein bestehenden Systeme zu einem Systeme U.

Hierin bezeichne ich ferner diejenigen Formen, bei denen das Symbol q nicht in Factoren erster Art (q_x) auftritt, die Formen

$$\varphi\ ;\ t\ ;\ (f,f)^4\ ;\ (f,\Delta)^4$$

inbegriffen, durch A_1', A_2' ... und füge endlich dem Systeme U die Formen τ und $(\tau,\tau)^2$ und die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A')\ ,\ q^{\varrho})^{\nu}$$

hinzu. Das in dieser Weise gebildete System bezeichne ich durch T; betrachtet man in den Formen derselben, nachdem man für φ und q ihre Werthe $f + \lambda\Delta$ und $f' + \lambda' p$ eingesetzt hat, die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als besondere Formen, dann erhält man das simultane System.

Das System U enthält ausser den Formen

$$\varphi \;;\; t \;;\; (f, f)^4 \;;\; (f, \Delta)^4 \;;\; q$$

zweierlei Uebereinanderschiebungen; erstens die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form (§ 12.)

$$(\varphi, q^\varrho)^\nu \quad \text{und} \quad (t, q^\varrho)^\nu,$$

also die Formen:

$$(\varphi, q) \;;\; (\varphi, q)^2 \;;\; (\varphi, q)^3 \;;\; (\varphi, q^2)^4,$$
$$(t, q) \;;\; (t, q)^2 \;;\; (t, q)^3 \;;\; (t, q^2)^4 \;;\; (t, q^2)^5 \;;\; (t, q^2)^6$$

und zweitens die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form

$$(\varphi^r t^s, q^\varrho)^\nu,$$

bei denen das Product $\varphi^r \cdot t^s$ einem der Restsysteme entspricht:

$$(1, 1) \;;\; (1, 2) \;;\; (2, 2) \;;\; (1, 1, 1) \;;\; 2, 2, 2).$$

Da nun die Grade der Formen φ und t durch den Grad 3 der Form q dividirt die Reste 1 und 0 lassen, so entsprechen hier diesen Restsystemen nur die Producte φ^2 und φ^3 und demnach die Uebereinanderschiebungen:

$$(\varphi^2, q^3)^8 \quad \text{und} \quad (\varphi^3, q^4)^{12}.$$

Die Formen A', diejenigen Formen des Systems U nämlich, bei denen das Symbol q nicht in Factoren erster Art auftritt, sind hier:

$$\varphi \;;\; t \;;\; (f, f)^4 \;;\; (f, \Delta)^4 \;;\; (\varphi, q)^3 \;;\; (t, q)^3 \;;\; (t, q^2)^6 \;;\; (\varphi^3, q^4)^{12}$$

und demgemäss die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form

$$(S(A'), \tau^\varrho)^\nu$$

nach § 27. II.:

$$(\varphi, \tau) \;;\; (\varphi, \tau)^2 \;;\; (\varphi, \tau^2)^3 \;;\; (\varphi, \tau^2)^4,$$
$$(t, \tau) \;;\; (t, \tau)^2 \;;\; (t, \tau^2)^3 \;;\; (t, \tau^2)^4 \;;\; (t, \tau^3)^5 \; (t, \tau^3)^6,$$
$$((\varphi, q)^3, \tau) \;;\; ((t, q)^3, \tau) \;;\; ((t, q)^3, \tau)^2 \;;\; ((t, q)^3, \tau^2)^3,$$
$$((\varphi, q)^3 \cdot (\varphi, q)^3, \tau)^2 \;;\; ((\varphi, q)^3 \cdot (t, q)^3, \tau^2)^4 \;;\; ((t, q)^3 \cdot (t, q)^3, \tau^3)^6.$$

Diese Uebereinanderschiebungen, die Formen des Systems U und die Formen τ und $(\tau, \tau)^2$ bilden zusammen das System T.

Man kann nun leicht zeigen, dass in demselben die Uebereinanderschiebungen:

$$(t, q) \;;\; (t, q)^2 \;;\; (t, q^2)^4 \;;\; (t, \tau) \;;\; (t, \tau^2)^3 \;;\; (t, \tau^3)^5,$$
$$((t, q)^3, \tau) \;;\; ((t, q)^3, \tau^2)^3 \;;\; ((t, q)^3 \cdot (\varphi, q)^3, \tau^2)^4 \;;\; ((t, q)^3 \cdot (t, q)^3, \tau^3)^6$$

überflüssig sind und dass sich die Uebereinanderschiebungen

$$((\varphi,q)^3,\tau)\ ;\ ((t,q)^3,\tau)^2\ ;\ ((\varphi,q)^3\cdot(\varphi,q)^3,\tau)^2$$

durch die Uebereinanderschiebungen

$$(\varphi,q\cdot\tau)^4\ ;\ (t,q\cdot\tau)^5\ ;\ (\varphi^2,q^2\tau)^8$$

ersetzen lassen, welche dieselben Symbole und dieselbe Norm besitzen.

Das in dieser Weise reducirte System T enthält die Formen:

$$\varphi\ ;\ t\ ;\ (f,f)^4\ ;\ (f,\Delta)^4\ ;\ q\ ;\ \tau\ ;\ (\tau,\tau)^2,$$
$$(\varphi,q)\ ;\ (\varphi,q)^2\ ;\ (\varphi,q)^3\ ;\ (\varphi,q^2)^4\ ;\ (\varphi^2,q^3)^8\ ;\ (\varphi^3,q^4)^{12}\ ;$$
$$(\varphi,\tau)\ ;\ (\varphi,\tau)^2\ ;\ (\varphi,\tau^2)^3\ ;\ (\varphi,\tau^2)^4\ ;\ (\varphi,q\tau)^4\ (\varphi^2,q^2\tau)^8,$$
$$(t,q)^3\ ;\ (t,q^2)^5\ ;\ (t,q^2)^6\ ;\ (t,\tau)^2\ ;\ (t,\tau^2)^4\ ;\ (t,\tau^3)^6\ ;\ (t,q\tau)^5\cdot$$

Trägt man in diesen Uebereinanderschiebungen für die Formen φ und q ihre Werthe $f+\lambda\Delta$ und $f'+\lambda' p$ ein und betrachtet alsdann die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als besondere Formen, dann erhält man das simultane System der Formen f und f'; es enthält 93 Formen, von denen die folgenden als überflüssig weggelassen werden können:

1) die Functionaldeterminante (φ,p), da sie sich durch Formen niederer Ordnung darstellen lässt;

2) alle diejenigen Uebereinanderschiebungen, bei denen eine der übereinander zu schiebenden Formen den Factor p^2 oder Δ^3 besitzt, da sich diese Potenzen nach den Identitäten (I) und (II) auf andere Producte zurückführen lassen (vgl. § 18. Fall III.).

IV. Um das System einer biquadratischen Form f mit einem beliebigen Systeme S zu combiniren, dessen Formen ich durch

$$A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots .$$

bezeichne, bediene man sich des § 19. angegebenen Verfahrens.

Zuerst combinire man das System S mit dem aus der Form

$$\varphi = f + \lambda\Delta$$

allein bestehenden Systeme, zu einem Systeme U, bezeichne darin alle diejenigen Formen, bei denen das Symbol φ nicht in Factoren erster Art (φ_x) auftritt, durch A_1', A_2', ..., und füge dann dem Systeme U die Formen t ; $(f,f)^4$; $(f,\Delta)^4$ und die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A'),\ t^{\varrho})^{\nu}$$

hinzu.

Das in dieser Weise entstehende System bezeichne ich durch T; in seinen Formen ersetze ich φ durch seinen Werth $f+\lambda\Delta$ und betrachte dann die Coefficienten der Potenzen von λ als besondere Formen. Sie bilden das gesuchte System.

Das System U enthält nach § 12. zweierlei Uebereinanderschiebungen:

Erstens die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(A_i\ ,\ \varphi^\varrho)^\nu$$

und ferner Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S\,(A)\ ,\ \varphi^\varrho)^\nu,$$

bei denen das Product $S\,(A)$ einem der Restsysteme entspricht:

$$(1,1)\ ;\ (1,2)\ ;\ (2,2)\ ;\ (1,3)\ ;\ (2,3)\ ;\ (3,3)\ ;\ (1,1,1)\ ;\ (1,2,2)\ ;\ (2,3,3);$$
$$(3,3,3)\ ;\ (1,1,1,1)\ ;\ (3,3,3,3).$$

Ist das System S absolut oder in Bezug auf f eigentlich vollständig, dann ist T ein vollständiges System; in diesem Falle kann man darin alle diejenigen Uebereinanderschiebungen der Form:

$$(S\,(A')\ ,\ t^\varrho)^\nu$$

als überflüssig weglassen, bei denen $\varrho > 1$ ist; da bei denselben t^2 nach Identität (II) durch andere Producte ausdrückbar ist (vgl. § 18. Fall 3.). Das System T enthält dann ausser den Formen des Systems U und den Formen t , $(f\,,f)^4$ und $(f,\Delta)^4$ nur die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S\,(A')\ ,\ t)^\nu.$$

V. Um das simultane System zweier biquadratischen Formen f und f' zu erhalten, combinire ich die einzelnen Systeme dieser Formen:

$$f\ ;\ (f\,,f)^2 = \Delta\ ;\ (f\,,\Delta) = t\ ;\ (f\,,f)^4\ ;\ (f\,,\Delta)^4,$$
$$f'\,;\ (f'\,,f')^2 = \Delta'\ ;\ (f'\,,\Delta') = t'\,;\ (f'\,,f')^4\ ;\ (f'\,,\Delta')^4$$

mit einander und wende hierbei die so eben angegebene Methode an.

Die Aggregate $f + \lambda\Delta$ und $f' + \lambda'\Delta'$ bezeichne ich durch φ und φ', und combinire das System:

$$\varphi\ ;\ t\ ;\ (f\,,f)^4\ ;\ (f\,,\Delta)^4$$

mit dem aus der Form φ' allein bestehenden Systeme zu dem Systeme U. In demselben bezeichne ich diejenigen Formen, bei denen das Symbol φ' nicht in Factoren erster Art (φ'_x) auftritt, die Formen:

$$\varphi\ ;\ t\ ;\ (f\,,f)^4\ ;\ (f\,,\Delta)^4$$

inbegriffen durch A_1' , A_2' , . . . und füge dem Systeme U die Formen t ; $(f\,,f)^4$; $(f\,,\Delta)^4$ und die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S\,(A')\ ,\ t^\varrho)^\nu$$

hinzu. Das so entstehende System bezeichne ich durch T. In den

Formen derselben betrachte ich die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als besondere Formen; sie bilden das simultane System.

Das System U enthält ausser den Formen:

$$\varphi \; ; \; t \; ; \; (f, f)^4 \; ; \; (f, \Delta)^4 \; ; \; \varphi'$$

zweierlei Uebereinanderschiebungen:

Erstens die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(\varphi , \varphi'^{\varrho})^{\nu} \quad \text{und} \quad (t , \varphi'^{\varrho})^{\nu},$$

also die Formen:

$$(\varphi , \varphi') \; ; \; (\varphi , \varphi')^2 \; ; \; (\varphi , \varphi')^3 \; ; \; (\varphi , \varphi')^4,$$
$$(t , \varphi') \; ; \; (t , \varphi')^2 \; ; \; (t , \varphi')^3 \; ; \; (t , \varphi')^4 \; ; \; (t , \varphi'^2)^5 \; ; \; (t , \varphi'^2)^6$$

und ferner Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(\varphi^r \, t^s \, , \, \varphi'^{\varrho})^{\nu},$$

bei denen das Product $\varphi^r \, t^s$ einem der Restsysteme entspricht:

$$(1 , 1) \; ; \; (1 , 2) \; ; \; (1 , 3) \; ; \; (2 , 2) \; ; \; (2 , 3) \; ; \; (3 , 3);$$
$$(1,1,1) \; ; \; (1,1,2) \; ; \; (2,3,3) \; ; \; (3,3,3) \; ; \; (1,1,1,1) \; ; \; (3,3,3,3).$$

Da die Grade der Formen φ und t durch den Grad 4 der Form φ' dividirt die Reste 0 und 2 lassen, so entspricht hier diesen Restsystemen nur das Product t^2 und demnach die Uebereinanderschiebungen (§ 12.):

$$(t^2 , \varphi'^3)^{11} \quad \text{und} \quad (t^2 , \varphi'^3)^{12}.$$

Die Formen A', bei denen das Symbol φ' nicht in Factoren erster Art (φ'_x) auftritt, sind hier:

$$\varphi \; ; \; t \; ; \; (f, f)^4 \; ; \; (f, \Delta)^4 \; ; \; (\varphi , \varphi')^4 \; ; \; (t , \varphi')^4 \; ; \; (t^2 , \varphi'^3)^{12}.$$

Das System T enthält daher ausser den Formen des Systems U und den Formen t', $(f' , f')^4$; $(f' , \Delta')^4$ die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$((\varphi^{r_1} \, t^{r_2} \, (t , \varphi')^4)^{r_3} , t')^{\nu},$$

also die Formen:

$$(t', \varphi) \; ; \; (t', \varphi)^2 \; ; \; (t', \varphi)^3 \; ; \; (t' \, \varphi)^4 \; ; \; (t', \varphi^2)^5 \; ; \; (t', \varphi^2)^6$$
$$(t', t) \; ; \; (t', t)^2 \; ; \; (t', t)^3 \; ; \; (t', t)^4 \; ; \; (t', t)^5 \; ; \; (t', t)^6,$$
$$((t,\varphi')^4, t') \; ; \; ((t, \varphi')^4 , t'^2) \; ; \; ((t, \varphi')^4 . (t, \varphi')^4, t')^3 \; ; \; ((t, \varphi')^4 . (t,\varphi')^4, t')^4,$$
$$((t,\varphi')^4 . (t,\varphi')^4 . (t,\varphi')^4, t')^5 \; ; \; ((t,\varphi')^4 . (t,\varphi')^4 . (t,\varphi')^4, t')^6 \; ; \; (\varphi . (t,\varphi')^4, t')^5;$$
$$(\varphi . (t,\varphi')^4, t')^6.$$

In demselben sind die folgenden Formen überflüssig:

I.

$((t,\varphi')^4, t')$; $((t,\varphi')^4, t')^2$; $((t,\varphi')^4.(t,\varphi')^4, t')^3$; $((t,\varphi')^2.(t,\varphi')^2, t')^4$
$((t,\varphi')^4.(t,\varphi')^4.(t,\varphi')^4, t')^5$; $((t,\varphi')^4(t,\varphi')^4.(t,\varphi')^4, t')^6$; $(\varphi.(t,\varphi')^4, t')^5$;
$(\varphi.(t,\varphi')^4, t')^6$,

da diese Uebereinanderschiebungen mit den Producten:

$$\varphi'.(t,t')^6 \; ; \; \varphi'.(t,t')^6 \; ; \; (t,t')^6.(t,\varphi'^2)^5 \; ; \; (t,t')^6.(t,\varphi'^2)^6,$$

$$(t,t')^6.(t^2,\varphi'^3)^{11} \; ; \; (t,t')^6.(t^2,\varphi'^3)^{12} \; ; \; (t,t')^6.(\varphi.\varphi')^3 \; ; \; (t,t')^6.(\varphi,\varphi')^4$$

in den Symbolen und der Norm übereinstimmen, sich also nur um symbolische Producte von niederer Norm von denselben unterscheiden.

II.

$$(t^2, \varphi^3)^{11} \quad \text{und} \quad (t^2, \varphi^3)^{12}$$

weil t^2 nach Identität (II) durch andere Producte ausdrückbar ist (vgl. § 18. Fall III.).

III.

$$(t, \varphi') \; ; \; (t, \varphi')^2 \; ; \; (t, \varphi')^3 \; ; \; (t, \varphi'^2)^5 \; ; \; (t, \varphi'^2)^6 \; ;$$
$$(t', \varphi) \; ; \; (t', \varphi)^2 \; ; \; (t', \varphi)^3 \; ; \; (t', \varphi^2)^5 \; ; \; (t', \varphi^2)^6 \; ;$$
$$(t', t) \; ; \; (t', t)^2 \; ; \; (t', t)^3 \; ; \; (t', t)^4 \; ; \; (t', t)^5 \; ; \; (t', t)^6 \; ;$$

da sie sich mittelst symbolischer Rechnung auf Formen niederer Ordnung und Norm zurückführen lassen.

Lässt man diese überflüssigen Formen weg, dann enthält das reducirte System T die Formen:

$$\varphi \; ; \; t \; ; \; (f, f)^4 \; ; \; (f, \Delta)^4 \; ; \; \varphi' \; ; \; t' \; ; \; (f', f')^4 \; ; \; (f', \Delta')^4 ;$$
$$(\varphi,\varphi') \; ; \; (\varphi,\varphi')^2 \; ; \; (\varphi,\varphi')^3 \; ; \; (\varphi,\varphi')^4 \; ; \; (t,\varphi')^4 \; ; \; (t', \varphi)^4 .$$

Sieht man in diesen Uebereinanderschiebungen, nachdem man für φ und φ' ihre Werthe $f + \lambda\Delta$ und $f' + \lambda'\Delta'$ eingesetzt hat, die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als besondere Formen an, dann gelangt man zu dem simultanen Systeme der Formen f und f'. Es besteht aus den 30 Formen:

$$f \; ; \; \Delta \; ; \; t \; ; \; (f, f)^4 \; ; \; (f, \Delta)^4 \; ; \; f' \; ; \; \Delta' \; ; \; t' \; ; \; (f', f')^4 \; ; \; (f', \Delta')^4 ;$$
$$(f, f') \; ; \; (f, f')^2 \; ; \; (f, f')^3 \; (f, f')^4 \; ; \; (f, \Delta') \; ; \; (f, \Delta')^2 \; ; \; (f, \Delta')^3 \; ; \; (f, \Delta')^4 ;$$
$$(\Delta, f') \; ; \; (\Delta, f')^2 \; ; \; (\Delta, f')^3 \; ; \; (\Delta, f')^4 \; ; \; (\Delta, \Delta') \; ; \; (\Delta, \Delta')^2 \; ; \; (\Delta, \Delta')^3 \; ; \; (\Delta, \Delta')^4 ;$$
$$(t, f')^4 \; ; \; (t, \Delta')^4 \; ; \; (t', f)^4 \; ; \; (t', \Delta)^4 ;$$

§ 30.

Das System der Form $f = a_x^5$.

Die einzige Form χ (§ 22.) ist hier die quadratische Covariante:

$$(f, f)^4 = a_x \, b_x \, (ab)^4,$$

ich will sie durch i bezeichnen.

Da die Form f' (vgl. § 21.) biquadratisch ist, so besteht ihr System nach § 29. I. aus den Formen:

$$f' = a_x'^4\ ;\ (f', f')^2 = \Delta'\ ;\ (f', \Delta')\ ;\ (f', f')^4\ ;\ (f', \Delta')^4 = (a'b')^2 (a'c')^2 (b'c')^2,$$

und mithin das System der speciellen Formen aus den folgenden:

$$f\ ;\ (f, f)^2 = \varphi\ ;\ (f, \varphi) = t\ ;\ (f, f)^4\ ;\ a_x\, b_x\, c_x\, (ab)^2\, (ac)^2\, (bc)^2.$$

Von denselben sind die beiden letzten nach § 25. überflüssig; die Form $(f, f)^4$, weil sie eine Form χ ist, die Form

$$a_x\, b_x\, c_x\, (ab)^2\, (ac)^2\, (bc)^2,$$

weil sie sich in die Form $-(f, i)^2$ bringen, also als Form $P(\chi)$ darstellen lässt.

Das reducirte System der speciellen Formen besteht somit aus den Formen

$$f\ ;\ \varphi\ ;\ t;$$

es ist nach § 24. in Bezug auf die Form i eigentlich vollständig; combinirt man es mit dem System dieser Form, dann gelangt man zu dem System der Form f. Dasselbe enthält ausser den Formen:

$$f\ ;\ \varphi\ ;\ t\ ;\ i\ ;\ (i, i)^2$$

der zu combinirenden Systeme nach § 27. II. zweierlei Uebereinanderschiebungen:

Erstens die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f, i^\varrho)^\nu\ ;\ (\varphi, i^\varrho)^\nu\ ;\ (t, i^\varrho)^\nu;$$

also die Formen:

$$(f, i)\ ;\ (f, i)^2\ ;\ (f, i^2)^3\ ;\ (f, i^2)^4\ ;\ (f, i^3)^5;$$

$$(\varphi, i)\ ;\ (\varphi, i)^2\ ;\ (\varphi, i^2)^3\ ;\ (\varphi, i^2)^4\ ;\ (\varphi, i^3)^5\ ;\ (\varphi, i^3)^6;$$

$$(t, i)\ ;\ (t, i)^2\ ;\ (t, i^2)^3\ ;\ (t, i^2)^4\ ;\ (t, i^3)^5\ ;\ (t, i^3)^6\ ;\ (t, i^4)^7;$$

$$(t, i^4)^8\ ;\ (t, i^5)^9;$$

und zweitens die Uebereinanderschiebungen:

$$(f^2, i^5)^{10}\ ;\ (f.t, i^7)^{14}\ ;\ (t^2, i^9)^{18}.$$

In diesem Systeme der Form f sind die Uebereinanderschiebungen:

$$(t, i)\ ;\ (t, i^2)^3\ ;\ (t, i^3)^5\ ;\ (t, i^4)^7\ ;\ (t^2, i^9)^{18}$$

überflüssig; die vier ersten nach § 27. II., weil t eine Functionaldeterminante ist; die letzte nach § 18. Fall III, weil sich das Quadrat der Functionaldeterminante t durch andere Producte ausdrücken lässt.

§ 31.

Das System der Form $f = a_x^6$.

Die Formen χ (vgl. § 22.) sind hier die Covariante

$$(f, f)^4 = a_x^2\, b_x^2\, (ab)^4$$

und die Invariante $(f, f)^6$; die erstere bezeichne ich durch k, die letztere durch A.

Die Form $f'' = a_x'^5$ (vgl. § 21.) ist vom 5ten Grade; ihr System besteht aus den Formen:

$$f'' ; \varphi' = (f'', f'')^2 ; (f'', \varphi') ; (f'', f'')^4 = i'$$

und Formen $P(i')$ (vgl. § 30.), denen im System der Form f die Formen:

$$f ; \varphi = (f, f)^2 ; (f, \varphi) = t ; (f, f)^4 = k$$

und Formen $P(k, A)$ entsprechen (vgl. § 25.). Dieselben bilden das in Bezug auf die Formen k und A vollständige System der speciellen Formen. Da die Formen k und $P(k, A)$ darin überflüssig sind, so kann man sie weglassen, das reducirte System der speciellen Formen besteht dann aus den Covarianten:

$$f ; \varphi ; \text{und } t .$$

Combinirt man es mit dem Systeme der Form k, dann entsteht ein in Bezug auf die Invariante A vollständiges System und durch Hinzufügung derselben das System der Form f.

Dieses Verfahren ist jedoch mit grossen Weitläufigkeiten verknüpft, da einerseits die Formen der zu combinirenden Systeme, andererseits die dabei auftretenden überflüssigen Formen in zu grosser Anzahl vorhanden sind. Ich will mich daher einer andern Methode bedienen.

Ich bezeichne die quadratische Covariante $(f, k)^1$ durch l und entwickle in der *Annali di Math. Ser. II. t. I. pag. 60.* angegebenen Weise, die Beziehung:

$$\text{(I)} \qquad (f, l)^2 = \tfrac{2}{5}\,(k, k)^2 + \tfrac{1}{3}\,Ak.$$

Sie lehrt, dass die Covariante $(k, k)^2$ eine Form $P(l, A)$ ist und dass demnach das aus der Form k allein bestehende System, welches nach § 29. I. in Bezug auf die Formen $(k, k)^2$ und $(k, k)^4$ vollständig ist, auch in Bezug auf die Formen l, A und $(k, k)^4$ vollständig ist (vgl. § 14.).

Combinirt man es mit dem Systeme der speciellen Formen, dann entsteht ein in Bezug auf die Formen l, A und $(k, k)^4$ ebenfalls vollständiges System U. Dasselbe enthält ausser den Formen:

$$f \;;\; \varphi \;;\; t \;;\; k$$

der zu combinirenden Systeme, die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f^{r_1} \varphi^{r_2} t^{r_3} , k^{\varrho})^{\nu}.$$

Zu dem unvollständigen Producte $(ak)^3$ gehören die Formen:

$$(f, k)^3 = a_x^2\, k_x\, (ak)^3 \quad \text{und} \quad (f, k)^4 = l = a_x^2\, (ak)^4.$$

Da die erste derselben verschwindet, so ist (vgl. § 6.) jedes den symbolischen Factor $(ak)^3$ enthaltende symbolische Product eine Form $P\,(l)$.

Da nun bei denjenigen Uebereinanderschiebungen der Form

$$(f^{r_1}\ \varphi^{r_2}\ t^{r_3}\ , k^{\varrho})^{\nu},$$

für welche $\nu > 2$ ist, solche symbolische Producte als Glieder auftreten, so sind dieselben im System U überflüssig.

Von den übrigen Uebereinanderschiebungen, für welche ν den Werth 1 oder 2 besitzt, nämlich den Formen:

$$(f, k)\ ;\ (f, k)^2\ ;\ (\varphi\, , k)\ ;\ (\varphi\, , k)^2\ ;\ (t\, , k)\ ;\ (t\, , k)^2$$

sind die drei letzten gleichfalls überflüssig.

Zu den unvollständigen symbolischen Producten $(\varphi k)^2$ nämlich gehören die Formen (§ 6.):

$$(\varphi k)^2 = \varphi_x^6\, k_x'^2\, (\varphi k)^2 \quad ; \quad (\varphi k)^3 = \varphi_x^5\, k_x\, (\varphi k)^3 \quad ; \quad (\varphi k)^4 = \varphi_x^4\, (\varphi k)^4\, ;$$

sie lassen sich in die Form bringen:

$$\begin{aligned}(\varphi\, , k)^2 &= c_1\, l\, .\, f + c_2 k^2,\\ (\varphi\, , k)^3 &= c\, (f\, , l),\\ (\varphi\, , k)^4 &= c_1\, (f\, , l)^2 + c_2\, A k,\end{aligned}$$

also durch Formen niederer Classe ausdrücken.

Da nun ein Glied der Uebereinanderschiebung

$$(t\, , k)^2 = [a_x^5\, \varphi_x^7\, (a\varphi)\, , k]^2,$$

nämlich das symbolische Product

$$a_x^5\, \varphi_x^5\, (\varphi k)^2\, (a\varphi)\, k_x^2$$

den Factor $(\varphi k)^2$ besitzt, so ist dieselbe im System U überflüssig (§ 18. Fall IV.).

Die Form $(t\, , k)$ ist überflüssig, weil t eine Functionaldeterminante und $(t\, , k)$ daher auf Formen niederer Ordnung reducirbar ist (§ 27. II.).

Das reducirte System U besteht aus den Formen:

$$f\ ;\ \varphi\ ;\ t\ ;\ k\ ;\ (f\, , k)\ ;\ (f\, , k)^2 = p\ ;\ (\varphi\, , k);$$

es ist in Bezug auf die Formen l, A und $(k\, , k)^4$ vollständig.

Combinirt man es mit dem Systeme der Form l, dann entsteht ein in Bezug auf die Invarianten A und $(k\, , k)^4$ vollständiges System T.

Dasselbe enthält nach § 27. II. ausser den Formen:

$$f\ ;\ \varphi\ ;\ t\ ;\ k\ ;\ (f,k)\ ;\ p\ ;\ (\varphi,k)\ ;\ l\ ;\ (l,l)^2$$

der zu combinirenden Systeme die Uebereinanderschiebungen:

$$(f, l^\varrho)^{2\varrho-1}\ ;\ (\varphi, l^\varrho)^{2\varrho-1}\ ;\ (t, l^\varrho)^{2\varrho-1}\ ;\ (k, l^\varrho)^{2\varrho-1}\ ;\ ((f,k), l^\varrho)^{2\varrho-1};$$
$$(p, l^\varrho)^{2\varrho-1}\ ;\ ((\varphi,k), l^\varrho)^{2\varrho-1};$$
$$(f, l^\varrho)^{2\varrho}\ ;\ (\varphi, l^\varrho)^{2\varrho}\ ;\ (t, l^\varrho)^{2\varrho}\ ;\ (k, l^\varrho)^{2\varrho}\ ;\ ((f,k), l^\varrho)^{2\varrho}\ ;\ (p, l^\varrho)^{2\varrho};$$
$$((\varphi,k), l^\varrho)^{2\varrho}.$$

Von denselben sind die folgenden überflüssig:

I.

$$(\varphi, l)^2 = \varphi_x^6\,(\varphi, l)^2 \quad \text{und} \quad (p, l)^2 = p_x^4\,(p, l)^2.$$

Diese Uebereinanderschiebungen sind die einzigen zu den unvollständigen symbolischen Producten $(\varphi, l)^2$ und $(p, l)^2$ gehörigen Formen; sie lassen sich in die Form bringen:

$$(\varphi, l)^2 = c_1\, k\,.\,l + c_2 f\,.\,(k,k)^4 + c_3\, A\,.\,p,$$
$$(p, l)^2 = c_1\, l^2 + c_2\, A\,(f,l)^2 + c_3\, A^2 k + c_4\, k\,.\,(k,k)^4:$$

also auf Formen niederer Classe reduciren.

II.

Diejenigen der Uebereinanderschiebungen:

$$(\varphi, l^\varrho)^\nu\ ;\ (t, l^\varrho)^\varrho\ ;\ (p, l^\varrho)^\nu\ ;\ ((\varphi,k)\, l^\varrho)^\nu,$$

für welche $\nu > 1$ ist, da bei ihnen Glieder auftreten, welche einen der unvollständigen Producte $(\varphi, l)^2$ und $(p, l)^2$ zum Factor besitzen (§ 18. Fall IV.).

III.

Die Formen:

$$(t, l)\ ;\ ((\varphi,k), l)\ ;\ ((f,k), l^\varrho)^{2\varrho-1},$$

da bei ihnen eine der übereinander zu schiebenden Formen eine Functionaldeterminante ist (vgl. § 27. II.).

IV.

Die Invariante $(k, l^2)^4$; sie lässt sich in die Form bringen:

$$(k, l^2)^4 = c_1\, A\,.\,(l,l)^2 + c_2\, A^2\,.\,(k,k)^4 + c_3\,(k,k)^4\,.\,(k,k)^4.$$

Das reducirte System T besteht aus den Formen:

$$f\ ;\ \varphi\ ;\ t\ ;\ k\ ;\ (f,k)\ ;\ p\ ;\ (\varphi,k)\ ;\ l\ ;\ (l,l)^2\ ;$$
$$(f,l)\ ;\ (f,l)^2\ ;\ (f,l^2)^3\ ;\ (f,l^2)^4\ ;\ (f,l^3)^5\ ;\ (f,l^3)^6\ ;$$
$$(\varphi,l)\ ;\ (k,l)\ ;\ (p,l)\ ;\ (k,l)^2\ (k,l^2)^3\ ;$$
$$((f,k),l)^2\ ;\ ((f,k),l^2)^4\ ;\ ((f,k),l^3)^6\ ;\ ((f,k),l^4)^8\ ;$$

es ist in Bezug auf die Invarianten A und $(k,k)^4$ vollständig, fügt man dieselben hinzu, dann entsteht das System der Form f (vgl. § 16. III.).

Ueber eine geometrische Verwandtschaft fünften Grades.

Von H. Müller in Freiburg i. B.

Im 62. Bande des Crelle'schen Journales hat O. Hesse folgende Aufgabe behandelt:

Es seien in zwei Ebenen E und G zwei Gruppen $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_7$ und $q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_7$ von je 7 Punkten gegeben. Man soll diejenigen Paare von Punkten p und q finden, für welche die Bedingung:

$$p\,(p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_7) \text{ proj. } q\,(q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_7)$$

erfüllt ist.

Es existiren bekanntlich drei solcher Punktepaare. Setzt man zwischen zwei ebenen Systemen in E und G eine Verwandtschaft zweiten Grades fest, so dass die Punkte $p_1\, p_2 \ldots\ldots p_7$ in E den Punkten $q_1\, q_2 \ldots\ldots q_7$ in G der Reihe nach entsprechen, so sind je zwei Punkte p, q eines der genannten Punktepaare, zugeordnete Hauptpunkte der beiden Systeme.

Die Aufstellung der durch die Paare $p_1\, q_1,\ p_2\, q_2 \ldots p_7\, q_7$ entsprechenden Punkte bestimmten Verwandtschaft zweiten Grades zwischen E und G kann durch die Aufeinanderfolge von mehreren linearen Constructionen erreicht werden*). Darauf ergeben sich dann die Hauptpunkte in dem einen der beiden Systeme als gemeinsame Punkte zweier collinearer Systeme oder als Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte, von denen ein gemeinsamer Punkt bekannt ist. Hierdurch ist eine synthetische Lösung der oben genannten, von Hesse analytisch behandelten Aufgabe, gegeben.

Man kann nun dieselbe Frage dadurch, dass man sie mit zwei andern in Zusammenhang bringt, direct, das heisst ohne Zuziehung der Verwandtschaft zweiten Grades, lösen.

Die beiden Aufgaben, welche zur Lösung der ursprünglich gegebenen führen, sind die folgenden:

---

*) Schroeter, Crelle's J. Bd. 62. Reye, Schloemilch's Zeitschrift. Bd. X.

1) In den Ebenen E und G sind zwei Gruppen $p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5$ und $q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, q_5$ von je 5 Punkten gegeben. Jedem Punkte p in E entspricht bekanntlich im Allgemeinen ein einziger Punkt q in G, so dass:

$$p(p_1\, p_2 \,..\, p_5) \text{ proj. } q(q_1\, q_2 \,..\, q_5).$$

Durch diese entsprechenden Punkte p und q ist eine Verwandtschaft zwischen den ebenen Systemen E und G festgestellt, welche näher untersucht werden soll.

2) In E und G seien zwei Gruppen $p_1\, p_2 \ldots p_6$ und $q_1\, q_2 \ldots q_6$ von je 6 Punkten gegeben. Welches ist der geometrische Ort der Punkte p und q, wenn dieselben der Bedingung:

$$p(p_1\, p_2 \ldots p_6) \text{ proj. } q(q_1\, q_2 \ldots q_6)$$

genügen sollen.

Diese Punkte sollen nun im Folgenden behandelt werden. Ausserdem befindet sich in § 3. noch die Angabe einer besonders einfachen Construction der durch 9 Punkte bestimmten Curve dritter Ordnung und des durch 8 Grundpunkte eines Büschels solcher Curven bestimmten neunten Grundpunktes.

§ 1.

Um die Aufgabe 1) zu behandeln, beziehen wir zunächst zwei Punktsysteme s und s_1 in E und G collinear aufeinander, so dass den Punkten $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ in s die Punkte $q_1\, q_2\, q_3\, q_4$ in s_1 entsprechen.

Sodann beziehen wir in denselben Ebenen E und G zwei Systeme σ und σ_1 collinear auf einander, so dass die $p_2\, p_3\, p_4\, p_5$ in σ den Punkten $q_2\, q_3\, q_4\, q_5$ in σ_1 entsprechend sind.

Soll nun zu einem beliebigen Punkte p in E der Punkt q in G gesucht werden, so dass

$$p(p_1\, p_2 \,..\, p_5) \text{ proj. } q(q_1\, q_2 \,..\, q_5),$$

so hat man zu bestimmen:

1) Den Kegelschnitt H, welcher im Systeme s_1 dem als zu s gehörig betrachteten Kegelschnitt $\overline{p\, p_1\, p_2\, p_3\, p_4}$ entspricht.

2) Dem Kegelschnitt J, welcher im Systeme σ_1 dem als zu σ gehörig betrachteten Kegelschnitt $\overline{p\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5}$ entspricht.

R und L haben die drei Punkte $q_2\, q_3\, q_4$ gemein. Ihr vierter Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt q.

Besondere Fälle. Dem Punkte p_1 in E entsprechen in G die Punkte eines Kegelschnitts L_1, welcher durch $q_2\, q_3\, q_4\, q_5$ geht, aber p_1 nicht enthält. L_1 kann mit Benutzung der collinearen Systeme σ und σ_1 construirt werden oder auf andere bekannte Arten*).

---

*) Cremona, ebene Curven Nr. 62.

Ebenso entsprechen den Punkten $p_2\, p_3\, p_4\, p_5$ in E bezüglich die Punkte von Kegelschnitten L_2, L_3, L_4, L_5, welche auch nur je 4 von den 5 Punkten $q_1\, q_2 \ldots q_5$ enthalten.

Ferner entsprechen den Punkten $q_1\, q_2 \ldots q_5$ in G, respective die Punkte von 5 Kegelschnitten $R_1\, R_2 \ldots R_5$ in E.

Allen Punkten des Kegelschnitts $\overline{p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5}$ in E entspricht in G ein einziger Punkt, welcher mit q_{15} bezeichnet werden soll. Derselbe wird erhalten als vierter Durchschnittspunkt der beiden Kegelschnitte, welche in s_1 und σ_1 dem Kegelschnitt $\overline{p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5}$ entsprechen, wenn der letztere nach einander als den beiden Systemen s und σ angehörig betrachtet wird.

Ebenso entspricht den Punkten des Kegelschnitts $\overline{q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, q_5}$ in G ein einziger Punkt p_{15} in E.

Es ist leicht zu sehen, dass alle Kegelschnitte $L_1 \ldots L_5$ durch q_{15} und $R_1 \ldots R_5$ durch p_{15} gehen.

Wir lassen nun den Punkt p gerade Linien auf E beschreiben und fragen, welche Curven der von p eindeutig abhängende Punkt q in G beschreibt.

a) p bewege sich auf der Geraden $p_2\, p_3$. Fällt p mit p_2 oder p_3 zusammen, so entsprechen ihm bezüglich alle Punkte der Kegelschnitte L_2 oder L_3. Ist aber p von p_2 und p_3 verschieden, so muss der entsprechende Punkt q offenbar auf $q_2\, q_3$ gelegen sein. Um ihn zu finden, braucht man z. B. nur den Kegelschnitt M zu construiren, welcher durch $q_1\, q_3\, q_4\, q_5$ geht und über diesen Punkten das Doppelschnittverhältniss $p(p_1\, p_3\, p_4\, p_5)$ fasst.

Bewegt sich p, so bilden die Kegelschnitte M ein mit der von p beschriebenen Punktreihe projectivisches Kegelschnittbüschel. Daher bilden die Schnittpunkte der Kegelschnitte dieses Büschels mit der durch einen der Grundpunkte q_3 gehenden Geraden $q_2\, q_3$ auch eine Punktreihe, welche mit der von p beschriebenen projectivisch ist.

Ebenso entspricht jeder Geraden in E, welche irgend zwei $p_r\, p_s$ der Punkte $p_1\, p_2 \ldots p_5$ verbindet, eine Gerade in G, welche durch die entsprechenden Punkte $q_r\, q_s$ geht, und diese beiden Linien sind durch die Punkte $p\, q$ projectivisch auf einander bezogen.

Zu dieser Linie sind dann noch die zwei Kegelschnitte L_r und L_s zu rechnen, welche den Punkten p_r und p_s selbst entsprechen, so dass die drei Curven eine zusammengesetzte Curve fünfter Ordnung bilden, welche in $q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, q_5$ und q_{15} Doppelpunkte hat.

b) p bewege sich auf einer zum Beispiel durch p_2 gehenden Geraden C, welche keinen andern der Punkte $p_1 \ldots p_5$ enthält. Die Kegelschnitte $\overline{p\, p_1\, p_2\, p_3\, p_4}$ und $\overline{p\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5}$ bilden, während p sich auf C bewegt, zwei durch diesen Punkt projectivisch auf einander bezogene

Kegelschnittbüschel. Dasselbe findet demnach mit den Kegelschnitten H und J statt, als deren vierten Durchschnittspunkt man den Punkt q erhält.

Die beiden Büschel der Curven H und J haben 3 Grundpunkte $q_2\, q_3\, q_4$ gemeinsam. Die entsprechenden Curven derselben schneiden sich also nach bekannten Sätzen*) auf einer Curve vierter Ordnung, welche in $q_2\, q_3\, q_4$ Doppelpunkte hat.

Aus dem vorigen a) sieht man leicht, dass die beiden Kegelschnitte dieser Büschel, welche in zwei Gerade zerfallen (von denen jeweils die eine $q_3\, q_4$ ist) sich entsprechen. Man braucht nämlich nur zu bedenken, dass dem Durchschnitt von C und $\overline{p_3\, p_4}$ in G ein von q_3 und q_4 verschiedener Punkt der Geraden $\overline{q_3\, q_4}$ entspricht. Derselbe muss auf zwei entsprechenden Kegelschnitten H, J liegen, und diese enthalten daher beide die Gerade $\overline{q_3\, q_4}$.

Diese Gerade $\overline{q_3\, q_4}$ ist aber der Frage fremd. Sie wurde nur dadurch erhalten, dass wir zur Construction von q specielle Systeme collinear auf einander bezogen, in welchen die ursprünglich gleichwerthigen Punkte $p_1 \ldots p_5$, $q_1 \ldots q_5$ in verschiedener Weise verwendet waren.

Es bleibt also noch eine Curve D dritter Ordnung übrig, welche einfach durch q_1, q_3, q_4, q_5 geht und in q_2 einen Doppelpunkt hat. D geht aber auch durch q_{15}, denn dieser Punkt ist demjenigen Punkt von E entsprechend, in welchem C von dem Kegelschnitt $\overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}$ zum zweiten Male geschnitten wird.

Wie die durch p_2 gehende Gerade C durch einen weitern Punkt m auf ihr bestimmt ist, so sind auch die Punkte $q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, q_5$, q_{15}, n, von denen q_{15} ein Doppelpunkt von D ist, und n dem Punkte m in E entsprechen soll, zur Bestimmung der Curve D vollständig hinreichend. C und D sind durch die Punkte p, q projectivisch auf einander bezogen.

Fällt p mit den zweiten Durchschnittspunkten von C und den Kegelschnitten R_1, R_3, R_4, R_5, $\overline{p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5}$ zusammen, so geht q bezüglich durch die Punkte q_1, q_3, q_4, q_5, q_{15}.

Fällt dagegen p mit einem der beiden Schnittpunkte von C und R_2 zusammen, so befindet sich q im Doppelpunkt q_2. Durchläuft p die Strecke zwischen diesen beiden Schnittpunkten, so durchläuft q die Schleife des Doppelpunktes.

Dem Punkte p_2 von C selbst entspricht der Kegelschnitt L_2 in G, welcher D ausser in den Punkten q_1, q_3, q_4, q_5, q_{15} noch in einem weitern Punkte x trifft, den man, wenn nur auf die projectivische Be-

*) Cremona, ebene Curven § 10.

ziehung von C und D gesehen wird, auf dieser Curve als p_2 entsprechend zu nehmen hat.

D und L_2 bilden wieder eine zusammengesetzte Curve fünfter Ordnung, welche in $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{15}$ Doppelpunkte hat.

Daher der Satz:

Einer durch p_1 gehenden Geraden C in E entspricht in G eine Curve dritter Ordnung D, welche durch die 6 Punkte $q_1 \ldots q_5, q_{15}$ geht und in q_r einen Doppelpunkt hat. Ausserdem aber noch für den Punkt p_r selbst der Kegelschnitt L_r.

c) Die Gerade C soll durch keinen der 5 Punkte $p_1 p_2 \ldots p_5$ gehen.

Wir denken uns C als perspectivischen Durchschnitt zweier projectivischen Strahlbüschel mit den Mittelpunkten p_2 und p_3, in denen demnach die Gerade $\overline{p_2 p_3}$ sich selbst entsprechen muss. Der Punkt p auf C wird durch zwei entsprechende Strahlen $\overline{p_2 p}$, $\overline{p_3 p}$ projicirt. Diesen beiden Strahlen entsprechen in G zwei Curven D und F dritter Ordnung, welche durch $q_1 q_2 \ldots q_5 q_{15}$ gehen und von denen D in q_2 und F in q_3 einen Doppelpunkt hat. D und F können sich daher nur in einem weitern Punkt q schneiden, welcher dem Punkte p in E entspricht. Bewegt sich p auf C, so beschreiben D und F projectivische Curvenbüschel dritter Ordnung. Die entsprechenden Curven dieser Büschel schneiden sich auf einer Curve sechster Ordnung, welche in q_1, q_4, q_5, q_{15} Doppelpunkte hat und in q_2, q_3 dreifache Punkte. Man sieht aber, dass diejenigen Curven dritter Ordnung, welche in beiden Büscheln der Geraden $\overline{p_2 p_3}$ und somit sich selbst entsprechen, beide die Gerade $\overline{q_2 q_3}$ enthalten. Diese Gerade hat wieder mit unserer Frage nichts zu thun. Es bleibt daher der Satz:

Einer Geraden C in E, welche durch keinen der fünf Punkte $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$ geht, entspricht in G eine einfache Curve S fünfter Ordnung, welche in $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{15}$ Doppelpunkte hat.

Die Curven C und S sind durch die Punkte p und q projectivisch auf einander bezogen. Fällt p mit einem der Durchschnittspunkte von C und R_r zusammen, so befindet sich q in dem Doppelpunkte q_r und durchläuft p die Strecke zwischen diesen beiden Punkten, so beschreibt q die Schleife des Doppelpunktes q_r.

Fällt aber p mit einem der beiden Schnittpunkte von C und $\overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}$ zusammen, so befindet sich q im Doppelpunkte q_{15} und während p die zwischen den beiden Punkten gelegene Strecke durchläuft, muss q die Schleife des Doppelpunktes q_{15} durchlaufen.

Die Gerade C ist durch zwei ihrer Punkte m und m_1 bestimmt. Ebenso ist S bestimmt durch die entsprechenden Punkte n und n_1 in G zusammen mit den 6 festen Doppelpunkten. Die Verwandtschaft der Systeme E und G ist also vom fünften Grade.

§ 2.

Um die zweite Frage zu behandeln, nehmen wir in E und G zwei Gruppen $p_1 p_2 \ldots p_6$ und $q_1 q_2 \ldots q_6$ von je 6 Punkten.

Wie die Punktgruppen $p_1 \ldots p_5$ und $q_1 \ldots q_5$ zur Construction der Punkte p_{15} und q_{15} Veranlassung gaben, so entstehen auf dieselbe Weise aus den Gruppen $p_2 p_3 \ldots p_6$ und $q_2 q_3 \ldots q_6$ die Punkte p_{26} und q_{26}, ferner aus $p_3 \ldots p_6 p_1$ und $q_3 \ldots q_6 q_1$ die Punkte p_{31} und q_{31} etc. Wir nehmen ferner einen Punkt p in E und bestimmen zwei Punkte m und n in G durch die Bedingungen:

$$m(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \text{ proj. } p(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5),$$

$$n(q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \text{ proj. } p(p_2, p_3, p_4, p_5, p_6).$$

Sodann legen wir durch p_2 eine Gerade C_1. Den Punkten p dieser Geraden entsprechen in G:

1) Die Punkte m einer Curve dritter Ordnung M, welche durch $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{15}$ einfach geht und in q_2 einen Doppelpunkt hat.

2) Die Punkte n einer Curve dritter Ordnung N, welche durch $q_3 q_4 q_5 q_6 q_{26}$ einfach geht und in q_2 einen Doppelpunkt hat.

M und N schneiden sich daher noch in zwei Punkten λ und μ.

Von diesen beiden Punkten, z. B. von λ, soll bewiesen werden, dass

$$\lambda(q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6) \text{ proj. } \varrho(p_1 p_2 \ldots p_4 p_5 p_6),$$

wo ϱ ein noch zu bestimmender Punkt der Geraden C ist.

Zunächst ist klar, dass λ als Punkt von M und N zwei Punkte π, φ (deren Zusammenfallen aber bewiesen werden soll) zugehören, so, dass

$$\lambda(q_1 q_2 q_3 q_4 q_5) \text{ proj. } \pi(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)$$

und

$$\lambda(q_2 q_3 q_4 q_5 q_6) \text{ proj. } \varphi(p_2 p_3 p_4 p_5 p_6).$$

Daraus folgt:

$$\lambda(q_2 q_3 q_4 q_5) \text{ proj. } \pi(p_2 p_3 p_4 p_5) \text{ proj. } \varphi(p_2 p_3 p_4 p_5).$$

π und φ liegen daher auf dem durch $p_2 p_3 p_4 p_5$ gehenden Kegelschnitt, welcher über diesen 4 Punkten das Doppelschnittverhältniss $\lambda(q_2 q_3 q_4 q_5)$ fasst. π und φ fallen daher mit dem zweiten Schnittpunkt (ausser q_2) von C und diesem Kegelschnitt zusammen.

Zu dem Punkt λ in G gehört also ein einziger Punkt in E, so dass

$$\lambda(q_1 q_2 \ldots q_6) \text{ proj. } \varrho\ (p_1 p_2 \ldots p_6).$$

Ein analoger Punkt gehört auch zu μ.

Lassen wir C sich um p_2 drehen, so entstehen zwei Curvenbüschel dritter Ordnung der Curven M und N, welche zugleich projectivisch auf einander bezogen sind. Unter den festen Grundpunkten ist ein gemeinsamer Doppelpunkt für alle Curven beider Büschel und drei gemeinsame einfache Punkte.

Die projectivischen Büschel erzeugen daher eine Curve sechster Ordnung mit einem vierfachen Punkt in q_2 und drei Doppelpunkten in $q_3\, q_4\, q_5$, welche ausserdem einfach durch q_2 und q_6 geht.

Diese Curve ist aber nicht einfach. Lässt man nämlich C die Lage $\overline{p_2\, p_3}$ annehmen, so sieht man, dass die entsprechenden Curven M und N beide die Gerade $\overline{q_2\, q_3}$ enthalten. Dieselbe ist also ein Theil jener Curve sechster Ordnung. Dasselbe ist der Fall mit den Geraden $\overline{q_2\, q_4}$ und $\overline{q_2\, q_5}$. Diese 3 Linien sind aber unserer Frage fremd und nur durch die Besonderheit der angewandten Constructionen in das Resultat hereingekommen.

Von dem Ort der Durchschnittspunkte entsprechenden Curven bleibt also noch eine Curve B dritter Ordnung übrig, welche einfach durch $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ geht. Die Curve B geht auch durch die 6 Punkte $q_{15}\, q_{26} \ldots$, welche dadurch erhalten werden, dass man von den 6 Punkten $q_1\, q_2 \ldots q_6$ immer einen auslässt und denjenigen Punkt sucht, welcher von den fünf übrigen gerade so abhängt, wie q_{15} von $q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, q_5$.

Jedem Punkte λ der Curve B entspricht ein einziger Punkt ϱ in E. Die Punkte ϱ liegen ebenso auf einer Curve dritter Ordnung A, welche durch $p_1\, p_2 \ldots p_6$ und $p_{15}, p_{26} \ldots$ geht.

Anmerkung. Es kann auffallen, dass auf der durch p_2 gehenden Geraden C ursprünglich nur zwei Punkte ϱ erhalten wurden, während doch offenbar diese Punkte auf der Curve A dritter Ordnung liegen. Dies erklärt sich daraus, dass p_2 selbst der dritte Schnittpunkt von A und C ist und der diesem Punkt zugehörige σ als Durchschnitt von M und N nicht erhalten wurde, weil ja von dem vollständigen Ort der Punkte m oder n, welche den Punkten p von C entsprechen, immer ein fester Kegelschnitt weggelassen wurde. Doch ist auch der Punkt σ in B enthalten, denn, zieht man die Tangente an A im Punkte p_2, und nimmt dieselbe zur Linie C, so fällt einer der beiden Punkte ϱ mit p_2 zusammen und daher der entsprechende λ in B mit σ.

§ 3.

Durch das Bisherige ist es nun leicht, die drei Punktepaare $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ zu finden, für welche

$$\alpha(p_1\, p_2 \ldots\ldots p_7) \text{ proj. } \beta(q_1\, q_2 \ldots\ldots q_7) \quad \text{u. s. w.}$$

Die Punkte ϱ, λ, für welche die Bedingung gilt:

$$\varrho\ (p_1\, p_2 \ldots p_6) \text{ proj. } \lambda(q_1\, q_2 \ldots q_6),$$

liegen auf zwei Curven dritter Ordnung A und B.

Die Punkte ϱ_1, λ_1, für welche

$$\varrho_1(p_2\, p_3 \cdot\cdot p_6\, p_7) \text{ proj. } \lambda_1(q_2\, q_3 \cdot\cdot q_6\, q_7),$$

liegen ebenso auf zwei Curven A' und B'.

A und A' haben die Punkte $p_2\, p_3\, p_4\, p_5\, p_6$ und p_{26} gemeinsam. Sie schneiden sich in drei weitern Punkten α, α_1, α_2. Diesen 3 Punkten müssen in der Ebene G drei Punkte β, β_1, β_2 entsprechen, welche sowohl auf B als auch auf B_1 liegen.

Sie sind daher die Punkte, welche B und B_1 ausser $q_2\, q_3\, q_4\, q_5\, q_6\, q_{26}$ gemein haben.

Je zwei zugehörige dieser Punkte, z. B. α und β erfüllen daher die Bedingung:

$$\alpha(p_1\, p_2 \ldots . p_7) \text{ proj. } \beta(q_1\, q_2 \ldots . q_7).$$

Bei der analytischen Behandlung der Aufgabe von Hesse treten die drei Punktepaare als Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte auf, welche einen bekannten gemeinsamen Punkt haben. Hier dagegen stellen sich diese Punkte als Durchschnittspunkte von Curven dritter Ordnung dar, welche 6 bekannte gemeinsame Punkte haben. Diese beiden Constructionen lassen sich aber leicht auf einander zurückführen.

Hat man nämlich zwei Curven dritter Ordnung A und A', von denen man fünf gemeinsame Punkte kennt, so lassen sich auf verschiedene Arten zwei Kegelschnitte angeben, welche die 4 übrigen Schnittpunkte von A und A' gemein haben.

Die Mittel zu dieser Zurückführung bietet die Verwandtschaft zweiten Grades.

Zwei Systeme E und E_1 in derselben Ebene seien in einer solchen Verwandtschaft. a, b, c seien die Hauptpunkte im System E_1.

Dann entspricht einem Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt o in E ein projectivisches Kegelschnittbüschel in E_1. Die Grundpunkte des letzteren sind a, b, c und der Punkt ω, welcher in E_1 dem Punkte o entspricht. Die beiden projectivischen Büschel schneiden sich in einer Curve A dritter Ordnung.

Einem andern Strahlbüschel in E mit dem Mittelpunkt o_1 entspricht in E_1 ein Kegelschnittbüschel $(a\, b\, c\, \omega_1)$. Beide schneiden sich in einer andern Curve dritter Ordnung A_1. A und A_1 haben nun gemeinsam:

1) Die Punkte a, b, c.

2) Die Punkte, in denen $o\, o_1$ von dem dieser Geraden in E_1 entsprechenden Kegelschnitt getroffen wird.

Alle weitern A und A_1 gemeinsamen Punkte σ sind solche, in denen entsprechende Punkte der Systeme E und E_1 zusammenfallen.

Diese sich selbst entsprechenden Punkte σ sind aber vier und können auch als gemeinsame Punkte zweier Kegelschnitte erhalten werden, wie folgt:

$m\, n\, p$ seien die den Punkten $a\, b\, c$ zugeordneten Hauptpunkte in E.

Dem Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt m in E entspricht ein projectivisches Strahlbüschel in E_1 mit dem Mittelpunkt a. Beide erzeugen einen Kegelschnitt R. Ebenso erhält man durch die sich entsprechenden Strahlbüschel n und b einen andern Kegelschnitt R_1. R und R_1 schneiden sich in 4 Punkten σ, welche in E und E_1 sich selbst entsprechen.

Sind nun die beiden Curven dritter Ordnung A und A_1 gegeben und fünf a, b, c, d, e ihrer Durchschnittspunkte bekannt, so kommt es darauf an, zwischen zwei Systemen E und E_1 eine Verwandtschaft zweiten Grades festzusetzen, so dass A und A' beide durch entsprechende Strahl- und Kegelschnittbüschel in E und E_1 erzeugt werden.

Hierzu bedürfen wir des Satzes:

Zwischen zwei ebenen Systemen ist eine Verwandtschaft zweiten Grades bestimmt, wenn man die zugehörigen Hauptpunkte $m\,n\,p$ und $a\,b\,c$ beider Systeme wählt und ausserdem festsetzt, dass einer beliebigen, nicht durch m, n, p gehenden Geraden G in E ein beliebiger durch $a\,b\,c$ gehender Kegelschnitt R entspricht.

Beweis. G schneide die Seiten mn, mp, np in den Punkten π, ν, μ. Nimmt man auf G einen weitern Punkt o an, sucht sodann auf R einen Punkt o_1, so dass auf G und R die beiden anharmonischen Verhältnisse $(o\, \pi\, \nu\, \mu)$ und $(o_1\, c\, b\, a)$ gleich sind und bezieht man die Systeme E und E_1 so auf einander, dass $m\,n\,p$ und $a\,b\,c$ der Reihe nach zugeordnete Hauptpunkte in beiden Systemen sind, während ausserdem die Punkte o und o_1 sich entsprechen, so ist leicht zu sehen, dass die Linie G von selbst dem Kegelschnitt R entspricht.

Um nun die Aufgabe selbst zu lösen, seien wieder $A\,A_1$ die gegebenen Curven mit den bekannten gemeinsamen Punkten a, b, c, d, e.

Die Linien $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$, $\overline{de}$ mögen die Curven A und A_1 bezüglich in den Punkten $\gamma\gamma_1$, $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, oo_1 zum dritten Male schneiden. Dann sind alle diese Punkte bekanntlich durch lineare Constructionen zu finden.

p, m, n seien bezüglich die Schnittpunkte der Linienpaare $\overline{\gamma o}$ und $\overline{\gamma_1 o_1}$, $\overline{\alpha o}$ und $\overline{\alpha_1 o_1}$, $\overline{\beta o}$ und $\overline{\beta_1 o_1}$.

Man setze nun zwischen zwei Systemen E und E_1 eine Verwandtschaft zweiten Grades fest, so dass $m\,n\,p$ und $a\,b\,c$ die zugeordneten Hauptpunkte in E und E_1 sind und der Geraden oo_1 der Kegelschnitt $\overline{a\,b\,c\,d\,e}$ entspricht.

Das Strahlbüschel mit dem Mittelpunkte o in E und das entsprechende Kegelschnittbüschel in E_1 erzeugen eine Curve dritter Ordnung, welche zunächst die Punkte $o\,a\,b\,c\,d\,e$ enthält. Auf dieser Curve liegen aber auch die Punkte α, β, γ, denn der Geraden mo in E entspricht in E_1 ein in zwei Gerade zerfallender Kegelschnitt, von dem bc

ein Theil ist, und α als Durchschnittspunkt von mo und bc muss demnach der Curve dritter Ordnung angehören. Ebenso sieht man, dass auch β und γ auf dieser Curve liegen. Eine Curve dritter Ordnung, welche mit der gegebenen Curve A die Punkte $o\,a\,b\,c\,d\,e\,\alpha\,\beta\,\gamma$ gemein hat, muss aber offenbar mit ihr zusammenfallen. Ebenso wird gezeigt, dass der Büschel o_1 in E und der ihm entsprechende Kegelschnittbüschel in E_1 die Curve A_1 erzeugen. Die Punkte, welche ausser $a\,b\,c\,d\,e$ den beiden Curven gemeinsam sind, müssen also diejenigen sein, welche in den Systemen E und E_1 sich selbst entsprechen und können nach dem frühern als die Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte R und R_1 erhalten werden.

Es mag nur noch mit wenigen Worten eines besonderen Falles gedacht werden, der allerdings zu der vorliegenden Untersuchung keine Beziehung mehr hat.

Sind von zwei Curven dritter Ordnung 8 Schnittpunkte bekannt, so kennt man von den oben genannten Kegelschnitten R und R_1 schon 3 Punkte. Der vierte kann nun linear construirt werden. Man sieht daher, dass im Vorhergehenden die Lösung der Aufgabe enthalten ist, den neunten Punkt, in welchem sich zwei durch 8 gegebene Punkte gehende Curven dritter Ordnung noch schneiden, linear zu construiren.

Nur sieht man aus den bisherigen Betrachtungen nicht ein, dass alle durch diese 8 Punkte gehenden Curven dritter Ordnung denselben neunten mit einander gemein haben.

Um auch dies zu erörtern, benutzen wir den folgenden Satz, der sehr leicht zu beweisen ist.

Man kann zwischen zwei ebenen Systemen E und E_1 eine Verwandtschaft zweiten Grades dadurch festsetzen, dass man bestimmt: 4 Linien in E, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, sollen vier durch die Punkte $a\,b\,c$ gehenden Kegelschnitten in E_1 entsprechen, von denen keine drei einem Büschel angehören. $a\,b\,c$ sind dann die Hauptpunkte in E_1.

Seien nun $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$ die gegebenen 8 Punkte. Man beziehe die Systeme E und E_1 in einer Verwandtschaft zweiten Grades so auf einander, dass den Geraden $\overline{de}$, $\overline{df}$, $\overline{ef}$, $\overline{gh}$ in E die Kegelschnitte $\overline{a\,b\,c\,d\,e}$, $\overline{a\,b\,c\,d\,f}$, $\overline{a\,b\,c\,e\,f}$, $\overline{a\,b\,c\,g\,h}$ entsprechen.

$d\,e\,f$ sind dadurch offenbar zu sich selbst entsprechenden Punkten in E und E_1 gemacht.

A sei nun eine beliebige, durch die 8 Punkte gehende Curve dritter Ordnung, welche die Gerade $\overline{gh}$ in dem Punkt o zum dritten Male trifft. Dann wird A offenbar durch das Strahlbüschel o in E und das ihm in E_1 entsprechende Kegelschnittbüschel erzeugt und muss daher durch den vierten in den beiden Systemen sich selbst entsprechenden Punkt σ gehen.

Lässt man o sich auf der Geraden gh bewegen, so erhält man alle Curven des Curvenbüschels, welches durch die 8 Punkte $ab\ldots gh$ bestimmt ist und den gefundenen Punkt σ als neunten Grundpunkt enthält.

Bestimmt man unter diesen Curven diejenige, welche durch einen beliebigen Punkt i geht, so hat man eine Construction der durch die 9 Punkte $abc\ldots ghi$ bestimmten Curve dritter Ordnung. Zu diesem Zwecke ist nur nöthig, den Punkt o so zu bestimmen, dass dem durch o gehenden Strahle oi in E ein durch i gehender Kegelschnitt in E_1 entspricht. Um diesen Punkt zu finden betrachte man das Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt i in E. Demselben entspricht in E_1 ein Kegelschnittbüschel projectivisch. Dem durch i gehenden Kegelschnitt dieses Büschels in E_1 entspricht daher in E ein durch i gehender Strahl, welcher offenbar der gesuchte Strahl oi ist. Der Durchschnitt o dieser Linie mit gh ist der dritte Durchschnittspunkt der Curve dritter Ordnung $\overline{abc\ldots ghi}$ mit der Geraden gh.

§ 4.

Legt man die Ebenen E und G (§ 2.) auf einander, so hat man in derselben Ebene zwei Systeme E, E_1, zwischen welchen jene Verwandtschaft fünften Grades besteht.

Man kann nun nach den Punkten fragen, welche in beiden Systemen sich selbst entsprechen, das heisst für welche

$$m(p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,p_5) \text{ proj. } m(q_1\,q_2\,q_3\,q_4\,q_5).$$

Zunächst soll der Punkt p_5 noch weggelassen und die Punkte n gesucht werden, für welche die Bedingung:

$$n(p_1\,p_2\,p_3\,p_4) \text{ proj. } n(q_1\,q_2\,q_3\,q_4)$$

besteht.

Denkt man sich diesem Doppelschnittverhältniss einen bestimmten Werth gegeben, so befinden sich die diesem Werthe zugehörigen Punkte n auf zwei Kegelschnitten R und L, welche bezüglich durch $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ und $q_1\,q_2\,q_3\,q_4$ gehen und über diesen Punkten das gegebene Doppelschnittverhältniss fassen.

Lässt man den Werth des Doppelschnittverhältnisses sich ändern, so beschreiben R und L projectivische Kegelschnittbüschel. Die Durchschnittspunkte der entsprechenden Curven dieser Büschel liegen auf einer Curve vierter Ordnung V, welche alle gesuchten Punkte n enthält.

Man sieht nun, dass dem aus den Geraden $\overline{p_1\,p_2}$ $\overline{p_3\,p_4}$ bestehenden Kegelschnitte des einen Büschels der aus $\overline{q_1\,q_2}$ $\overline{q_3\,q_4}$ bestehende Kegelschnitt des andern entspricht.

Jene Curve vierter Ordnung geht daher nicht nur durch die acht Punkte $p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,q_1\,q_2\,q_3\,q_4$, sondern auch durch die 6 Schnittpunkte

$(\overline{p_1 p_2}, \overline{q_1 q_2})$ $(\overline{p_1 p_3}, \overline{q_1 q_3}) \dots (\overline{p_3 p_4}, \overline{q_3 q_4})$ und ist durch diese vierzehn Punkte bestimmt.

Diejenigen Punkte o aber, für welche

$$o(p_2\, p_3\, p_4\, p_5) \text{ proj. } o(q_2\, q_3\, q_4\, q_5),$$

liegen auf einer anderen Curve W vierter Ordnung, welche durch die Punkte $p_2 \dots p_5$ $q_2 \dots q_5$ $(\overline{p_2 p_3}, \overline{q_2 q_3}) \dots (\overline{p_4 p_5}, \overline{q_4 q_5})$ geht. V und W haben die Punkte $p_2, p_3, p_4, q_2, q_3, q_4$, $(\overline{p_2 p_3}, \overline{q_2 q_3})$ $(\overline{p_2 p_4}, \overline{q_2 q_4})$ $(\overline{p_3 p_4}, \overline{q_3 q_4})$ gemein und schneiden sich daher in 5 weitern Punkten m, welche die Eigenschaft haben

$$m(p_1\, p_2 \dots p_5) \text{ proj. } m(q_1\, q_2 \dots q_5),$$

und also die gesuchten in jenen Systemen sich selbst entsprechenden Punkte sind.

Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen.

Von Max Noether in Göttingen.

In der Theorie der algebraischen Functionen *einer* complexen Variabeln, die im Wesentlichen auf Abel, Puiseux und Riemann zurückzuführen ist, hat der Letztere eine Classification der Gleichungen aufgestellt*), welche diese Functionen definiren. Das Characteristische einer Classe ist, dass sich alle derselben angehörigen Gleichungen eindeutig durch rationale Substitutionen in einander transformiren lassen. Wenn $f = 0$ die homogene Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung mit d Doppel- und r Rückkehrpunkten, so ist**)

$$p = \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} - d - r$$

die Classenzahl der Classe, zu welcher $f = 0$ gehört, und die Gleichheit dieser Zahl für zwei Curven ist die nothwendige Bedingung für das eindeutige Entsprechen der beiden Curven. Die Zahl p, durch welche man die Ordnung des Zusammenhangs derjenigen Riemann'schen Fläche messen kann, in welcher sich die zur Classe p gehörigen algebraischen Functionen geometrisch darstellen lassen, giebt zugleich die Anzahl der allenthalben endlichen Integrale, welche sich auf eine solche Function beziehen.

Eine Erweiterung dieses Theorems auf Functionen zweier Variabeln ist erst vor kurzer Zeit von Herrn Clebsch gegeben worden***). Wenn sich zwei Flächen rational in einander transformiren lassen, so haben dieselben eine Classenzahl gemeinschaftlich, die Herr Clebsch als das *Geschlecht* der Fläche bezeichnet. Nach dem Theorem, welches Herr Clebsch ohne Beweis mittheilt, ist das Geschlecht p einer Fläche n^{ter} Ordnung $f = 0$, die nur die gewöhnlichen Singularitäten, Doppel- und Rückkehrcurven, besitzen soll, gleich der Anzahl der in einer Fläche $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung noch unbestimmt bleibenden Coefficienten, wenn man diese Fläche durch die Doppel- und Rückkehrcurven von $f = 0$ hindurchgehen lässt.

---

*) Crelle's Journal, Bd. 54.

**) Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen.

***) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences vom 21. Dec. 1868, p. 1238.

In einer kürzlich der Societät zu Göttingen mitgetheilten Notiz*) habe ich diese Theorie nach mehreren Seiten hin ausgedehnt. Der Zweck der folgenden Abhandlung ist nun, das erste Theorem dieser Notiz zu beweisen. Dasselbe ist eine directe Verallgemeinerung des obigen Theorems, und umfasst einmal auch Flächen mit höhern conischen *Knotenpunkten* und höheren vielfachen Curven, sodann aber auch die algebraischen Gebilde von *beliebig vielen* Dimensionen, für welche es in dem analogen Umfange, wie dies eben für Flächen angedeutet wurde, eine Classeneintheilung giebt. Zum Beweise werde ich mich einer Methode bedienen, die von den Herren Clebsch und Gordan in ihrem Werke über die „Abel'schen Functionen" auf die Untersuchung der Functionen *einer* Variabeln angewendet wird, und die den Vortheil besitzt, sich, unter Zufügung einiger Betrachtungen über eindeutiges Entsprechen höherer Gebilde und über algebraische Differentialausdrücke, leicht auf Functionen mehrerer Variabeln ausdehnen zu lassen. Es wird hier nur nöthig, die Beweise für Functionen zweier und dreier Variabeln vollständig durchzuführen, aus denen sich dann das allgemeine Resultat sogleich ergiebt. Ich muss zuerst einige Sätze über das eindeutige Entsprechen zweier Flächen und zweier von drei unabhängig Veränderlichen abhängender Gebilde geben, und gehe dann zur Untersuchung der Differentialausdrücke über, welche sich auf eine algebraische Gleichung beziehen, um hieraus das erwähnte Theorem abzuleiten.

§ 1.

Eindeutiges Entsprechen von Flächen.

Zwei algebraische Gebilde entsprechen sich eindeutig, wenn sie durch rationale Transformationen der Coordinaten in einander übergeführt werden können. Bei diesen eindeutigen Transformationen kommen Eigenthümlichkeiten vor, die eine genauere Betrachtung verlangen.

Die Flächengleichung n^{ter} Ordnung:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{1}$$

werde durch die rationalen Substitutionen

$$\left\{\begin{aligned} \varrho x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \varrho x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \varrho x_3 &= \varphi_3(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \varrho x_4 &= \varphi_4(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{aligned}\right. , \tag{2}$$

*) Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrgang 1869, No. 15: „Zur Theorie der algebr. Functionen mehrerer complexen Variabeln."

wo ϱ ein willkürlicher Parameter, die φ rationale homogene Functionen s^{ter} Ordnung ihrer Argumente y sind, in die Form

$$M \, . \, F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

übergeführt. Der irreductible Factor dieser Gleichung,

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0, \tag{3}$$

stellt die transformirte Fläche dar, welche der gegebenen eindeutig entspricht. Ein Factor M muss sich im Allgemeinen absondern, da F nicht eine Function der φ sein kann, wenn es möglich sein soll, mit Hülfe der Gleichung $F = 0$ aus den Gleichungen $\varrho x_i = \varphi_i$ die y auch als rationale Functionen der x darzustellen. Sobald F dieser letztern Bedingung genügt, repräsentiren die Gleichungen (2) und (3) eine eindeutige Transformation. Im Allgemeinen entspricht hier jedem Punkte der Fläche $F = 0$ *ein* Punkt x der Fläche $f = 0$, und umgekehrt; im Besondern kann es jedoch eintreten, dass für einzelne oder auch für eine einfach unendliche Reihe von Werthsystemen der y die Functionen φ sämmtlich verschwinden, also die x aus den obigen Substitutionsformeln unbestimmt hervorgehen, sowie in den umgekehrten Formeln die y unbestimmt werden können. Die Functionen φ lassen sich als Gleichungen von Flächen betrachten, die mit $F = 0$ Punkte oder eine Curve gemein haben können. Für solche Werthsysteme der y ergeben sich die entsprechenden Werthsysteme der x, indem man das Werthsystem der y sich dem betrachteten Punkte y annähern lässt. Man kann dabei eines der y, z. B. y_4, als Constante ansehen, dann für y_1, y_2, y_3 resp. $y_1 + \varepsilon\eta_1$, $y_2 + \varepsilon\eta_2$, $y_3 + \varepsilon\eta_3$ setzen, die φ nach aufsteigenden Potenzen von ε ordnen und diese Grösse gegen 0 convergiren lassen. Wenn die Functionen φ in diesem Punkte y einfach verschwinden, so hebt sich dabei der Factor ε heraus, den man in ϱ eingehen lässt; indem man hierauf $\varepsilon = 0$ setzt, gehen die Gleichungen (2) in die folgenden über:

$$\left\{\begin{aligned}
\varrho x_1 &= \varphi_1'(y_1) \cdot \eta_1 + \varphi_1'(y_2) \cdot \eta_2 + \varphi_1'(y_3) \cdot \eta_3 \\
\varrho x_2 &= \varphi_2'(y_1) \cdot \eta_1 + \varphi_2'(y_2) \cdot \eta_2 + \varphi_2'(y_3) \cdot \eta_3 \\
\varrho x_3 &= \varphi_3'(y_1) \cdot \eta_1 + \varphi_3'(y_2) \cdot \eta_2 + \varphi_3'(y_3) \cdot \eta_3 \\
\varrho x_4 &= \varphi_4'(y_1) \cdot \eta_1 + \varphi_4'(y_2) \cdot \eta_2 + \varphi_4'(y_3) \cdot \eta_3
\end{aligned}\right. . \tag{4}$$

Zugleich hat man, wenn $F = 0$ in y ebenfalls einen einfachen Punkt besitzt, für die η die Beziehung:

$$0 = F'(y_1) \cdot \eta_1 + F'(y_2) \cdot \eta_2 + F'(y_3) \cdot \eta_3 \, . \tag{5}$$

Die Elimination von ϱ und der η aus diesen Gleichungen (4) und (5) führt auf die Gleichungen zweier Ebenen, deren Schnittlinie auf der Fläche $f = 0$ liegt und dem betrachteten Punkte y von $F = 0$ entspricht. Dies giebt den Satz:

„Wenn für einen einfachen Punkt von $F = 0$ die Functionen φ in (2) einfach verschwinden, so entspricht diesem Punkte eine Gerade auf $f = 0$.“

Im Falle die φ in dem einfachen Punkte von $F = 0$ sämmtlich μfach verschwinden, hebt sich in der Entwicklung der Gleichungen (2) nach Potenzen von ε der Factor ε^μ heraus, indem alle Glieder bis zur μ^{ten} Ordnung verschwinden, und diese Gleichungen nehmen die Gestalt an:

$$(6)\left\{\begin{aligned} \varrho x_i = \frac{\partial^\mu \varphi_i}{\partial y_1^\mu} \cdot \eta_1^\mu + \mu \cdot \frac{\partial^\mu \varphi_i}{\partial y_1^{\mu-1} \partial y_2} \cdot \eta_1^{\mu-1} \cdot \eta_2 + \mu \cdot \frac{\partial^\mu \varphi_i}{\partial y_1^{\mu-1} \cdot \partial y_3} \cdot \eta_1^{\mu-1} \cdot \eta_3 \\ + \cdots\cdots + \frac{\partial^\mu \varphi_i}{\partial y_3^\mu} \cdot \eta_3^\mu \end{aligned}\right.$$

$$(i = 1\,,\, 2\,,\, 3\,,\, 4).$$

Indem man eines der η aus Gleichung (5) linear und homogen durch die beiden andern ausdrückt und in die Gleichungen (6) einsetzt, findet man die Coordinaten x der dem Punkte y entsprechenden Curve als rationale homogene Functionen μ^{ter} Ordnung zweier Parameter η, was zu dem allgemeineren Satze führt:

„Wenn für einen einfachen Punkt von $F = 0$ die Functionen φ in (2) μfach verschwinden, so entspricht diesem Punkte auf der Fläche $f = 0$ eine Curve μ^{ter} Ordnung, welche die Eigenschaft hat, ihre Coordinaten als rationale Functionen eines Parameters ausdrücken zu lassen.“

Dass diese letztere Eigenschaft stattfinden muss, liess sich schon unmittelbar aus dem obigen specielleren Satze erkennen. Denn man kann immer an Stelle derjenigen Transformation, welche von der Fläche $f = 0$ mit der Curve μ^{ter} Ordnung zur Fläche $F = 0$ führt, zwei successive eindeutige Transformationen setzen, von denen die erste von $f = 0$ zu einer Fläche $f_1 = 0$ mit einer Geraden führt, die zweite von $f_1 = 0$ zu $F = 0$. Wenn dann die Curve μ^{ter} Ordnung und die Gerade *einem* Punkte y von $F = 0$ entsprechen, so müssen, da die beiden Flächen f und f_1 sich eindeutig entsprechen, auch die beiden Curven sich Punkt für Punkt entsprechen und somit das gleiche Geschlecht p haben. Die Transformation zwischen f und f_1 findet man, indem man die Ausdrücke der y aus Transformationsformeln zwischen f_1 und F, die sich immer angeben lassen, in die Formeln zwischen f und F einsetzt. Von diesem *Princip der successiven Transformation* werden wir noch weiterhin zur Vereinfachung der Untersuchung Gebrauch machen.

Einem νfachen Knotenpunkte von $F = 0$ entspricht auf $f = 0$ eine Curve, welche durch die Gleichung:

$$(7)\quad 0 = \frac{\partial^\nu F}{\partial y_1^\nu}\cdot \eta_1^\nu + \nu \frac{\partial^\nu F}{\partial y_1^{\nu-1}\cdot \partial y_2}\eta_1^{\nu-1}\eta_2 + \nu \frac{\partial^\nu F}{\partial y_1^{\nu-1}\,\partial y_3}\eta_1^{\nu-1}\cdot \eta_3 + \cdots + \frac{\partial^\nu F}{\partial y_3^\nu}\cdot \eta_3^\nu$$

in Verbindung mit den Gleichungen (4) oder (6) bestimmt wird. Diese Gleichungen führen zu dem folgenden Satze:

Wenn für einen νfachen Knotenpunkt von $F = 0$ die Functionen φ sämmtlich μfach verschwinden, so entspricht diesem Knotenpunkte auf $f = 0$ eine Curve, deren Geschlecht durch Gleichung (7) bestimmt ist. Den νFortschreitungsrichtungen innerhalb einer durch den Knotenpunkt gehenden Ebene entsprechen ν Punkte dieser Curve, die auf einer Curve μ^{ter} Ordnung liegen, welche die Eigenschaft hat, ihre Coordinaten rational durch einen Parameter ausdrücken zu lassen.

Noch einen weitern ganz ähnlichen Satze erhält man für die Curve, welche eine vielfache Curve von $F = 0$ abbildet. Wenn F die Form hat:

$$(8)\qquad 0 = \varkappa \cdot A^\nu + \varkappa_1 A^{\nu-1}\cdot B + \cdots + \varkappa_\nu B^\nu = 0,$$

und die Functionen φ durch die Curve $A = 0$, $B = 0$ einfach hindurchgehen, also die Substitutionsformeln die Form annehmen:

$$(9)\qquad \varrho x_i = \lambda_i A + \mu_i B,$$

wo die $\varkappa$, λ, μ Functionen der y sind, so findet man die ν verschiedenen Punkte x, welche einem gegebenen Punkte y der vielfachen Curve $A = 0$, $B = 0$ entsprechen, indem man die Coordinaten dieses Punktes in die $\varkappa$, λ, μ, und sodann die ν Werthe von $\frac{A}{B}$ aus (8) in (9) einsetzt. Die Coordinaten dieser Punkte x werden dann von der Form:

$$\sigma x_i = \lambda_i A_s + \mu_i B_s\ ,\quad (s = 1, 2, \ldots \nu),$$

woraus folgt, dass die ν Punkte x auf einer Geraden liegen. Allgemeiner hat man:

Wenn durch eine νfache Curve von $F = 0$ die Functionen φ μfach hindurchgehen, so entsprechen einem Punkte dieser Curve ν Punkte auf $f = 0$, die auf einer Curve μ^{ter} Ordnung vom Geschlechte 0 liegen.

Die Abbildung von vielfachen Curven ergiebt sich, indem man aus den Gleichungen:

$$\begin{cases} 0 = \varkappa \cdot \eta_1^\nu + \varkappa_1\, \eta_1^{\nu-1}\cdot \eta_2 + \cdots + \varkappa_\nu \cdot \eta_2^\nu, \\ A = 0\ ,\ B = 0, \\ \varrho x_i = \lambda_i\, \eta_1 + \mu_i\, \eta_2, \end{cases}$$

die Verhältnisse der y, ferner $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ und ϱ eliminirt.

Ich will noch bemerken, dass Rückkehrpunkte von νfachen Curven oder eine Rückkehrcurve selbst ebenfalls in diesen Satz einge-

schlossen sind, und nur ein unendlich nahes Zusammenrücken der betreffenden Punkte x bedingen.

Wenn in den bisher betrachteten Fällen die Functionen φ in einem singulären Punkte y von $F=0$ nicht verschwinden, so bildet sich der Punkt y durch einen einzelnen Punkt x auf $f=0$ ab, und es ergiebt sich zu jeder Fortschreitungsrichtung in y auf $F=0$ eine solche in dem entsprechenden Punkte x von $f=0$, so dass die Curven auf F, die in y einen νfachen Punkt zeigen, einen ebensolchen in ihrer Abbildung in x zeigen müssen. Wenn endlich drei der Functionen φ und die Fläche $F=0$ mehrere Punkte gemein haben, so entspricht diesen Punkten im Allgemeinen *ein* Knotenpunkt auf $f=0$, der jedoch eine höhere Singularität zeigt, als die eines conischen Punktes, ein Fall, den wir daher aus unseren späteren Betrachtungen ausschliessen werden. So können einem biplanaren Punkte, der sich im Allgemeinen durch zwei sich schneidende gerade Linien oder diesen entsprechende Curven abbildet, speciell zwei getrennte Punkte entsprechen, wie z. B. in der Reciprokalfläche.

Diese und alle weiteren Fälle ergeben sich, wenn man mehrere Transformationen nach einander ausführt und bei diesen nur die bisher entwickelten Abbildungen eintreten lässt.

§ 2.

Eindeutiges Entsprechen von höheren Mannigfaltigkeiten.

Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades mit $r+2$ Variabeln:

$$f(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\ldots\,x_{r+2})=0$$

definirt das Verhältniss zweier der Variabeln als algebraische Function von r unabhängig veränderlichen complexen Grössen und stellt eine $2r$fach unendliche Mannigfaltigkeit vor. Zur Abkürzung werde ich im Folgenden eine $2h$fach unendliche Mannigfaltigkeit als eine $\infty^{2.h}$ bezeichnen. Die auf $f=0$ liegenden Mannigfaltigkeiten sind dann als $\infty^{2.r-1}$, $\infty^{2.r-2}$, ... $\infty^{2.1}$ (Curven), ∞^{0} (Punkte) zu bezeichnen.

Wenn sich zwei $\infty^{2.r}$, $f(x)=0$ und $F(y)=0$, Punkt für Punkt eindeutig entsprechen, so wird es im Besondern eintreten, je nachdem sämmtliche oder einige der Functionen φ der eindeutigen Transformation mehrfach verschwinden, dass einer $\infty^{2.h}$ auf $F=0$ eine $\infty^{2.\varkappa}$ auf $f=0$ entspricht, wo $\varkappa \geqq h\ ,\ r>h\geqq 0$.

Da bereits der Fall einer $\infty^{2.3}$ die bei den Abbildungen eintretenden Verhältnisse deutlich übersehen lässt, so beschränke ich mich hier auf diesen Fall, der überdies noch dadurch weiteres geometrisches Interesse hat, dass auf ihn die Gleichungen der *Liniencomplexe* zurückführen.

Die Gleichungen (2) und (3) des vorhergehenden Paragraphen stellen wieder, wenn sie zu den folgenden

$$\varrho x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (i = 1, 2, ..5)$$
$$0 = F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$$

erweitert werden, eine eindeutige Transformation dar, durch welche man von der $\infty^{2.3}$, $F = 0$, zu der $\infty^{2.3}$

$$0 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

und umgekehrt, übergeht.

Für diejenigen Werthsysteme der y, für welche die φ_i, und zwar nicht sämmtlich mehrfach, verschwinden, ergeben sich die zugehörigen Werthsysteme der x aus den Gleichungen:

$$\varrho x_i = \varphi_i'(y_1) \cdot \eta_1 + \varphi_i'(y_2) \cdot \eta_2 + \varphi_i'(y_3) \cdot \eta_3 + \varphi_i'(y_4) \cdot \eta_4$$
$$(i = 1, 2, ..5).$$

Im Falle hier für einen einfachen Punkt y von $F = 0$ die Functionen φ sämmtlich einfach, oder eines der φ oder mit Hülfe von $F = 0$ zwei der φ zweifach, die übrigen einfach verschwinden, folgt, dass dem Punkte y eine auf $f = 0$ liegende *Ebene* entspricht.

Kann man mit Hülfe von $F = 0$ in einem Punkte y drei lineare Combinationen der φ im 2[ten] Grade verschwinden machen, während die übrigen φ für diesen Punkt nur einfach verschwinden, so ergiebt die Elimination der ϱ und η drei lineare Gleichungen, deren Lösungen $f = 0$ genügen, also eine auf $f = 0$ liegende *Gerade*, welche dem Punkte y entspricht.

Wendet man nun auf den Fall des mehrfachen Verschwindens der φ das Princip der successiven Transformation an, so hat man den folgenden Satz:

Im Falle die Functionen φ in einem einfachen Punkte von $F = 0$ sämmtlich verschwinden, entspricht diesem Punkte auf $f = 0$ eine Fläche, die sich rational durch zwei Parameter, oder eine Curve, die sich rational durch einen Parameter ausdrücken lässt.

Von grösserem Interesse ist der Fall, dass einer Curve auf $F = 0$ eine Fläche auf $f = 0$ entspricht. Wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen der Curve sind, so werden hier die Transformationsformeln für den Fall, dass die φ nur einfach verschwinden:

$$0 = F(y) = \lambda A + \mu B + \nu C$$
$$\varrho x_i = \lambda_i A + \mu_i B + \nu_i C \qquad (i = 1, 2, ... 5),$$

und die Elimination der A, B, C führt zu dem unvollständigen Determinantensystem:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ x_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ x_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ x_4 & \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 \\ x_5 & \lambda_5 & \mu_5 & \nu_5 \\ 0 & \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Denkt man sich nun in die λ, μ, ν die Coordinaten eines Punktes y

der Curve $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ eingesetzt, so stellt dieses System die dem Punkte y entsprechende Curve, eine *Gerade* vor.

Die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ bestimmen aber eine Curve, der eine ganze Fläche entspricht. Diese erhält man, wenn man aus den Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \lambda\,\eta_1 + \mu\,\eta_2 + \nu\,\eta_3 \\ \varrho x_i = \lambda_i\eta_1 + \mu_i\eta_2 + \nu_i\eta_3\,, \quad (i = 1, 2, \ldots 5) \\ A = 0\,,\, B = 0\,,\, C = 0 \end{array}\right.$$

drei der Verhältnisse der y und eines der Verhältnisse $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, $\frac{\eta_1}{\eta_3}$ eliminirt. Die x erscheinen dann als rationale lineare homogene Functionen zweier der η, deren Coefficienten selbst algebraische Functionen einer Variabeln sind, deren Irrationalität gegeben ist durch die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Der Curve auf $F = 0$ entspricht also auf $f = 0$ eine aus geraden Linien gebildete Fläche, eine *Regelfläche*. Die in den Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ enthaltene Irrationalität kann man durch Einführen zweier neuen Variabeln s, z auf die in einer Gleichung $\psi(s, z) = 0$ enthaltene zurückführen, die, wenn sie von der m^{ten} Ordnung wird, einen Kegel m^{ter} Ordnung, also eine Fläche m^{ter} Ordnung mit einem $m$fachen Knotenpunkte darstellt. Mit Hülfe des unten folgenden Theorems, dessen Beweis den Gegenstand des vorliegenden Aufsatzes bildet, ergiebt sich aus dieser Bemerkung der wichtige Satz, dass die einer einfachen Curve auf $F = 0$ entsprechenden Regelflächen auf $f = 0$ das Flächengeschlecht 0 haben. Nimmt man noch die leicht zu beweisende Bemerkung hinzu, dass die Kegel sich im Allgemeinen nicht eindeutig auf einer Ebene abbilden lassen, so findet man mittelst Erweiterung durch das Princip der successiven Transformation den Satz:

Im Falle die Functionen φ längs einer einfachen Curve von $F = 0$ sämmtlich μfach verschwinden, entspricht jedem Punkte der Curve eine Curve μ^{ter} Ordnung auf $f = 0$, die sich rational durch einen Parameter ausdrücken lässt. Die der Curve auf F entsprechende Fläche auf f wird durch die Bewegung dieser veränderlichen rationalen Curve μ^{ter} Ordnung erzeugt und hat das Geschlecht 0, lässt sich aber im Allgemeinen nicht rational durch zwei Parameter ausdrücken.

Von den noch übrigen Besonderheiten, welche bei Abbildungen zweier $\infty^{2.3}$ auf einander eintreten, will ich nur noch die folgenden erwähnen. Wenn $F = 0$ einen Knotenpunkt enthält und die φ verschwinden in diesem Punkte, so löst sich derselbe auf $f = 0$ im Allgemeinen in eine Fläche auf, deren Irrationalität mit derjenigen übereinstimmt, welche die Gleichung $F = 0$ in der Nähe des Knotenpunktes besitzt. Eine vielfache Curve von $F = 0$, längs deren die φ

verschwinden, löst sich in ihrer Abbildung auf $f = 0$ ebenfalls in eine Fläche auf. Bei μfachem Verschwinden der φ längs dieser Curve von F entspricht jedem Punkte dieser vielfachen Curve eine Curve auf $f = 0$ (von höherem Geschlecht im Allgemeinen), die auf einer Fläche vom Grade μ liegt, deren Coordinaten sich rational durch zwei Parameter ausdrücken lassen. Auch eine νfache Fläche von $F = 0$ löst sich, wenn die φ in allen ihren Punkten verschwinden, in ihrer Abbildung auf $f = 0$ in eine Fläche auf, und jedem ihrer Punkte entsprechen νPunkte auf f, die auf einer Curve vom Geschlecht 0 liegen.

Auch hier gilt die Bemerkung, dass sich alle weiteren Fälle mittelst des Princips der successiven Transformation erledigen lassen. Man führt mittelst desselben alle Fälle auf diejenigen des Entsprechens zwischen Fläche und Punkt und zwischen Fläche und Curve zurück.

§ 3.

Die algebraischen Differentialausdrücke und deren Integrale.

Ich betrachte diejenigen Irrationalitäten, welche mit der Gleichung einer irreductibeln $\infty^{2.r}$:

$$f(s\,,\; z_1\,,\; z_2\,,\; \ldots\; z_r) = 0,$$

die s als algebraische Function von r complexen Variabeln z definirt, verbunden sind. Zur symmetrischen Darstellung der Differentialausdrücke, welche sich auf $f = 0$ beziehen, denke ich mir diese Gleichung in homogenen Variabeln geschrieben in der Form:

$$(1) \qquad f(x_1\,,\; x_2\,,\; \ldots\; x_{r+2}) = 0,$$

und führe hier r neue unabhängig Veränderliche derart ein, dass hierdurch keine weitere Irrationalität in die Gleichung eingeht. Man erreicht dies dadurch, dass man als neue unabhängig Veränderliche r rationale Functionen, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$, von $s, z_1, \ldots z_r$ (identisch mit homogenen rationalen Functionen 0^{ter} Ordnung von $x_1, x_2, \ldots x_{r+2}$) einführt; denn diese Substitution geschieht durch Gleichungen von der Form:

$$\varphi_1 + \lambda_1 \varphi_1' = 0 \quad , \quad \varphi_2 + \lambda_2 \varphi_2' = 0, \ldots \varphi_r + \lambda_r \varphi_r' = 0\;,\; s = s,$$

die als die Formeln einer eindeutigen Transformation aufzufassen sind, bei der sich, mit Hülfe von $f = 0$, auch die x rational durch

$$s\,,\; \lambda_1\,,\; \lambda_2\,,\; \ldots\; \lambda_r$$

ausdrücken. Ich denke mir diese Formeln zur Definition der x als *algebraische* Functionen der r complexen Variabeln λ benutzt.

Es sei Gleichung (1) homogen von der n^{ten} Ordnung. Man hat für alle Werthe der unabhängig Veränderlichen λ die $r + 1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{r+2}}\cdot x_{r+2}=nf=0\\
&\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{r+2}}\cdot\frac{\partial x_{r+2}}{\partial\lambda_1}=0\\
&\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{r+2}}\cdot\frac{\partial x_{r+2}}{\partial\lambda_2}=0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_r}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_r}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{r+2}}\cdot\frac{\partial x_{r+2}}{\partial\lambda_r}=0.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass sich die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ verhalten wie die Unterdeterminanten nach den c_i der Determinante:

$$\begin{vmatrix}
c_1 & c_2 & \cdots & c_{r+2}\\
x_1 & x_2 & \cdots & x_{r+2}\\
\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_1} & \cdots & \frac{\partial x_{r+2}}{\partial\lambda_1}\\
\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_2} & \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{\partial x_{r+2}}{\partial\lambda_2}\\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_r} & \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_r} & \cdots & \frac{\partial x_{r+2}}{\partial\lambda_r}
\end{vmatrix},$$

und somit ist der Ausdruck

$$\frac{\Sigma\pm c_1\,x_2\,\frac{\partial x_3}{\partial\lambda_1}\,\frac{\partial x_4}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{\partial x_{r+2}}{\partial\lambda_r}}{\sum\limits_i c_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}},$$

der in Bezug auf die x symmetrisch ist, unabhängig von den ganz willkürlichen Grössen c.

Bezeichnet ferner Θ eine rationale homogene Function $n-r-2^{\text{ter}}$ Ordnung der x, so ist

$$\Omega=\frac{\Theta\cdot\Sigma\pm c_1\,x_2\,\frac{\partial x_3}{\partial\lambda_1}\,\frac{\partial x_4}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{\partial x_{r+2}}{\partial\lambda_r}}{\sum\limits_i c_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

ein nach den λ genommener Differentialausdruck, der, als homogene Function 0^{ter} Ordnung, nur noch von den Verhältnissen der x abhängt, daher ein algebraischer Differentialausdruck in Bezug auf die λ, dessen Irrationalität jedoch nur durch Gleichung (1) bedingt ist.

In der Theorie der Functionen *einer* Variabeln betrachtet man allenthalben endliche einfache Integrale, genommen über Differentialausdrücke, die Ω analog sind, und weist nach, dass bei einer ein-

deutigen Transformation die Eigenschaft der Endlichkeit erhalten bleibt. Um hier einen ähnlichen Gang einzuschlagen und Anhaltspunkte für eine geeignete Bestimmung der Function Θ im Zähler von Ω zu gewinnen, wollen wir einen Blick auf die vielfachen Integrale von Ω werfen:

$$\omega = \int \frac{\Theta \cdot \Sigma \pm c_1\, x_2\, \frac{\partial x_3}{\partial \lambda_1}\, \frac{\partial x_4}{\partial \lambda_2} \cdots \frac{\partial x_{r+2}}{\partial \lambda_r}}{\sum\limits_i c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}} \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2 \cdots d\lambda_r\,.$$

Das Werthgebiet, über welches das $r$fache Integral ausgedehnt werden soll, kann man sich dadurch festgelegt denken, dass man der Reihe nach die λ festbestimmte, einfach unendliche Werthreihen durchlaufen lässt, von constanten Grenzen an bis zu einem Werthsysteme λ, und zugleich jedem Werthsysteme λ bestimmte Werthe der x zuertheilt, wodurch dann ω eine bestimmte Function der λ wird, wenn innerhalb des Integrationsgebiets keine Unstetigkeiten vorkommen. Eine Aenderung der Integrationsweise innerhalb desselben Integrationsgebiets, d. h. innerhalb einer gegebenen $r$fach unendlichen Werthreihe der x, kann durch Einführung anderer Functionen μ statt der λ bewirkt werden, und geschieht dann durch eine eindeutige Transformation, hat also auf die Irrationalität, die sich in den Werthen der Integrale ω ausprägt, keinen Einfluss. Auch in Bezug auf Unstetigkeiten verhält sich das Integral ω bei veränderter Integrationsweise, wie das Integral eines eindeutig transformirten Ausdrucks Ω', den wir hier aber so bestimmen wollen, dass er ganz analoge Unstetigkeiten besitzen soll, wie Ω selbst.

Einige einfache Betrachtungen über die Unstetigkeiten der vielfachen Integrale ergeben nun Folgendes:

Vor Allem wird ω unstetig in denjenigen Werthsystemen der λ, für welche der Nenner von Θ verschwindet. Um nur endliche Integrale zu betrachten, setzen wir daher voraus, dass Θ eine *ganze*, homogene Function $(n - r - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung der x sei.

Dann sind die Unstetigkeiten von ω auf diejenigen Stellen beschränkt, in denen

$$\sum_i c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

verschwindet. Die Punkte, in welchen

$$\sum_i c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\,,$$

ohne dass die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sämmtlich einzeln verschwinden, repräsentiren zusammen das *Verzweigungsgebilde* von $f = 0$, das hier eine $\infty^{2(r-1)}$ ist.

Für Flächen fällt dieses Gebilde mit der Curve zusammen, in welcher $f=0$ vom Tangentenkegel des Punktes c berührt wird. Irgend ein $r$fach unendliches Integrationsgebiet hat im Allgemeinen mit dem Verzweigungsgebilde wenigstens eine ∞^{r-2} gemein, so dass man genöthigt ist, über diese Gebilde hinweg zu integriren. Indessen ergiebt sich, dass die Unstetigkeit der Differentialausdrücke in den Verzweigungsgebilden bei den Integralen wegfällt.

Den Punkten, in welchen die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sämmtlich verschwinden, entsprechen die auf $f=0$ liegenden vielfachen Mannigfaltigkeiten. Wir werden hier nur diejenige Eigenschaft der Function Θ anführen, welche man durch einfache Betrachtungen für die Endlichkeit der Integrale als *nothwendig* erkennt, und von der wir im Folgenden allein Gebrauch zu machen haben. Wir setzen dabei voraus, dass die vielfachen, auf $f=0$ liegenden Mannigfaltigkeiten nicht selbst wieder specielle Singularitäten enthalten, die denen analog wären, welche bei einer Fläche durch das Zusammenfallen von Tangentenebenen längs einer vielfachen Curve oder durch den Uebergang eines conischen Knotenpunkts in einen planaren eintreten, und die sich in der, für die Punkte in der Nähe der betreffenden Singularität modificirten Gleichung $f=0$ durch das Absondern von Factoren oder auch, bei vielfachen $\infty^{2(r-1)}$ auf $f=0$, durch das Zusammenfallen von Factoren ausdrücken würden. Diese Singularitäten erfordern jedesmal ganz specielle Untersuchungen. Nur der Fall, dass längs einer doppelt zu zählenden $\infty^{2(r-1)}$ auf $f=0$ die beiden linearen Factoren, in welche $f=0$ in der Nähe jedes Punktes dieser $\infty^{2(r-1)}$ zerfällt, zusammenfallen, also speciell der Fall einer Rückkehrcurve auf einer Fläche $f=0$, ist hier noch mit berücksichtigt.

Die Bedingung, dass die Integrale, genommen über allgemeine Integrationsgebiete, die durch Werthsysteme von vielfachen ∞^{2h} hindurchgehen, nicht unendlich werden sollen, erfordert, dass Θ längs jeder μfach zählenden ∞^{2h} auf $f=0$ $(\mu-r+h)$mal verschwinde, d. h. diese ∞^{2h} selbst als eine $(\mu-r+h)$mal zählende besitze. Für $\mu+h \lesseqgtr r$ hat Θ keiner Bedingung zu genügen.

Eine eingehende Untersuchung des Verhaltens der vielfachen Integrale in allen hier möglichen Fällen in Bezug auf ihre Unstetigkeiteu, sowie die noch weitergehende Untersuchung in Bezug auf ihre Werthe bei verschiedenen Integrationsgebieten, liegt unserm eigentlichen Gegenstande viel zu fern, als dass wir sie hier führen könnten. Beiläufig bemerke ich, dass schon die Doppelintegrale die Eigenschaft haben, bei stetig veränderten Integrationsgebieten *zwischen denselben Grenzen* im Allgemeinen sich stetig ändernde Werthe zu geben*).

---

*) Diese Untersuchungen führen unter andern interessanten Resultaten auch

§ 4.

Die eindeutigen Transformationen.

Wir benutzen die vorstehenden Betrachtungen dazu, die Differentialausdrücke

$$\Omega = \frac{\Theta\, \Sigma \pm c_1 x_2 \frac{\partial x_3}{\partial \lambda_1} \frac{\partial x_4}{\partial \lambda_2} \cdots \frac{\partial x_{r+2}}{\partial \lambda_r}}{\sum_i c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

zu normiren. Wir legen der Function Θ die Eigenschaften bei, erstens,

---

auf die Erweiterung des Abel'schen Theorems für vielfache Integrale, die schon Jacobi nach verschiedenen, an mehreren Orten zerstreuten Bemerkungen für speciellere Fälle gekannt hat. Dasselbe spricht sich für unsere Differentialausdrücke, in denen Θ eine ganze Function ist, folgendermassen aus:

„Die Summe

$$\Sigma \frac{\Theta\,.\,\Sigma \pm c_1 x_2 \frac{\partial x_3}{\partial \lambda_1} \frac{\partial x_4}{\partial \lambda_2} \cdots \frac{\partial x_{r+2}}{\partial \lambda_r}}{\sum_i c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}},$$

ausgedehnt über die $n\,.\,m_1 m_2 \ldots m_r$ Schnittpunkte von $f = 0$ mit

$$\varphi_1 + \lambda_1 \varphi_1' = 0, \quad \varphi_2 + \lambda_2 \varphi_2' = 0, \ldots \varphi_r + \lambda_r \varphi_r' = 0,$$

welche einem gegebenen Werthsysteme der λ entsprechen, ist gleich Null."

In speciellen Fällen, in denen f mit einigen der φ höhere Mannigfaltigkeiten gemein hat, reducirt sich natürlich die Anzahl der Glieder dieser Summe bedeutend.

Man beweist dieses Theorem entweder durch Betrachtungen, die den von Riemann über das einfache Abel'sche Theorem angestellten analog sind, oder rein algebraisch, indem man Zähler und Nenner des Ausdrucks Ω mit der Determinante

$$\Sigma \pm k_1 f_2 (\varphi_1 + \lambda_1 \varphi_1')_3 \ldots (\varphi_r + \lambda_r \varphi_r')_{r+2},$$

wo die k_i Constanten und $(\varphi + \lambda \varphi')_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i}$, multiplicirt und auf das Product den von Jacobi herrührenden, von Clebsch in Crelle's Journal Bd. 63, p. 228 bewiesenen Satz anwendet.

Für die nicht homogene Form $f(s, x_1, x_2, \ldots x_r) = 0$ lautet der Satz:

„Die Summe:

$$\Sigma \frac{Q}{\frac{\partial f}{\partial s}} \cdot \Delta,$$

wo Q eine ganze Function $(n - r - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung der s und x, Δ die Functionaldeterminante der x nach den λ, ist, wenn ausgedehnt über die $n\,.\,m_1 m_2 \ldots m_r$ Schnittpunkte von $f = 0$ mit den $\varphi_i + \lambda_i \varphi_i'$, welche einem gegebenen Werthsysteme der λ entsprechen, gleich Null."

Die Gesammtheit der so entstehenden, den verschiedenen Werthen von Θ entsprechenden Gleichungen bildet ein simultanes System partieller Differentialgleichungen r^{ter} Ordnung mit r unabhängigen Variabeln, das eine particuläre algebraische Integration zulässt.

eine *ganze* Function $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu sein, und zweitens, jede μfach zählende $\infty^{2 \cdot h}$ auf $f=0$ selbst als eine $(\mu-r+h)$fach zählende $\infty^{2 \cdot h}$ zu besitzen. Dabei sollen die in dem vorhergehenden §. für die Singularitäten der vielfachen $\infty^{2 \cdot h}$ angenommenen Voraussetzungen gelten. Wenn Θ diesen Forderungen gemäss bestimmt ist, so nennen wir der Kürze wegen das zugehörige Ω einen *für* $f=0$ *normirten* Ausdruck Ω.

Die Anzahl p der für $f=0$ normirten Ausdrücke Ω ist eine endliche und gleich der Anzahl von Coefficienten, die in Θ noch unbestimmt bleiben, wenn Θ den obigen Bedingungen genügt, nämlich gleich der Anzahl solcher speciellen Functionen Θ', aus denen sich das allgemeinste, den Bedingungen genügende Θ linear zusammensetzt. Giebt es keine Mannigfaltigkeiten Θ mit den geforderten Eigenschaften, so ist die Anzahl $p=0$ zu setzen.

Um unsern Zweck zu erreichen, eine charakteristische Zahl für die Irrationalität, die mit der Gleichung $f=0$ verbunden ist, aufzustellen, werden wir die für $f=0$ normirten Ausdrücke Ω in andere Ausdrücke eindeutig transformiren, die sich auf eine neue Gleichung $F(y)=0$ beziehen, welche $f(x)=0$ eindeutig entspricht. Es seien die rationalen Transformationsformeln:

$$x_i = \varphi_i(y), \quad (i=1, 2, .., r+2),$$

in denen die φ ganze Functionen der s^{ten} Ordnung. Durch diese Formeln geht $f(x)=0$ über in:

$$M \,.\, F(y) = 0,$$

wobei sich ein Factor M nach § 1 absondern muss. Durch die gleiche Transformation wird sodann der für $f=0$ normirte Ausdruck Ω übergehen in einen Ausdruck Ω':

$$\Omega = \Omega' = \frac{\Theta \,.\, D \,.\, \Sigma \pm k_1\, y_2 \frac{\partial y_3}{\partial \lambda_1} \frac{\partial y_4}{\partial \lambda_2} \cdots \frac{\partial y_{r+2}}{\partial \lambda_r}}{s \,.\, M \,.\, \sum\limits_i k_i \frac{\partial F}{\partial y_i}},$$

wo

$$D = \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial x_{r+2}}{\partial y_{r+2}},$$

$$k_h = \sum_i c_i \frac{\partial y_h}{\partial x_i}.$$

Auf den Werth von Ω' bleiben die Grössen k_h ganz ohne Einfluss, und diese lassen sich daher als willkürliche Constanten, als die Coordinaten eines beliebigen Punktes, betrachten.

Der neue Ausdruck Ω' hat ganz die Form von Ω. Wir werden nun nachweisen, dass, wenn das Entsprechen von $f(x)=0$ und $F(y)=0$ ein eindeutiges ist, der Zähler ΘD von Ω', der eine ganze Function

der y ist, durch die gemeinschaftlichen Werthsysteme von $M = 0$ mit $F = 0$ ebenso oft als M selbst hindurchgeht, woraus dann zu schliessen ist, dass $\frac{\Theta D}{M}$ mit Hülfe von $F = 0$ zu einer *ganzen* Function gemacht werden kann; wir werden ferner zeigen, dass diese ganze Function $\frac{\Theta D}{M}$ in den vielfach zu zählenden Mannigfaltigkeiten von $F = 0$ diejenigen Eigenschaften besitzt, welche Ω' zu einem für $F = 0$ normirten Ausdrucke Ω machen. Bei eindeutigem Entsprechen kann man daher aus jedem für $f = 0$ normirten Ausdrucke Ω einen solchen in Bezug auf $F = 0$, und umgekehrt, ableiten, und die Anzahl p dieser Ausdrücke ist folglich dieselbe in Bezug auf beide Gleichungen. Da sich diese Zahl p aus dem Grade und den Singularitäten jeder Gleichung zusammensetzen lässt, so kann man sie als eine für die Irrationalität dieser Gleichung charakteristische Zahl aufstellen; ihre Gleichheit bei zwei $2r$fach unendlichen Mannigfaltigkeiten ist eine *nothwendige* Bedingung für die Möglichkeit des eindeutigen Entsprechens derselben.

Die erwähnten Beweise werde ich hier für drei unabhängige Variable führen, aber in einer Form, die sich direct erweitern lässt und die Beweise allgemein gültig macht. Ich schicke einige Hülfssätze über das Verhalten der Substitutionsdeterminante D, die ich im Folgenden anzuwenden habe, voraus.

§ 5.

Untersuchung der Determinante der Substitution.

Durch die Transformationsformeln

$$x_i = \varphi_i\ (y_1\ , y_2\ , y_3\ , y_4\ , y_5)\quad ,\quad (i = 1\ , 2\ , \ldots 5),$$

wo die φ von der s^{ten} Ordnung, werde $f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_5) = 0$ in $F(y_1\, , y_2\, , \ldots y_5) = 0$ übergeführt. Wir werden das Verhalten der Substitutionsdeterminante der Reihe nach in den Fällen untersuchen, in denen einer niedrigeren Mannigfaltigkeit auf $f = 0$ eine höhere auf $F = 0$, und umgekehrt, entspricht. Dabei können wir uns wieder auf die einfachsten Arten der Transformation beschränken, indem sich die übrigen Fälle auf diese mittelst des Princips der successiven Transformation zurückführen lassen.

1. Wenn einem Punkte auf f eine Fläche auf F entspricht, so kann man die Transformationsformeln in die Form setzen:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= A\ .\ \psi_1\\
\varrho x_2 &= A\ .\ \psi_2\\
\varrho x_3 &= A\ .\ \psi_3\\
\varrho x_4 &= A\ .\ \psi_4\\
\varrho x_5 &= \quad\ \ \varphi_5 .
\end{aligned}$$

Die Determinante

$$D = \Sigma \pm \left(A\,\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} + \psi_1\,\frac{\partial A}{\partial y_1}\right)\cdot\cdot\left(A\,\frac{\partial\psi_4}{\partial y_4} + \psi_4\,\frac{\partial A}{\partial y_4}\right)\cdot\frac{\partial\varphi_5}{\partial y_5}$$

verschwindet im *dritten* Grade längs des Schnittes von $A = 0$ mit $F = 0$.

2. Wenn einem Punkte auf f eine Curve auf F entspricht, so werden die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= A\psi_1 + B\psi_1' \\ \varrho x_2 &= A\psi_2 + B\psi_2' \\ \varrho x_3 &= A\psi_3 + B\psi_3' \\ \varrho x_4 &= A\psi_4 + B\psi_4' \\ \varrho x_5 &= \varphi_5. \end{aligned}$$

Die Transformationsdeterminante D verschwindet hier im *zweiten* Grade in dem Schnitt von $A = 0$, $B = 0$, $F = 0$.

3. Wenn einer Curve auf f eine Fläche auf F entspricht, so kann man in der Nähe jedes Punktes dieser Fläche den Transformationsformeln die Gestalt 2. geben, und D verschwindet daher ebenfalls *zweimal* längs der auf F liegenden Fläche.

In den umgekehrten Fällen verschwinden die 5 Functionen φ_i, jedoch, wie wir annehmen, nicht sämmtlich in höherm, als dem ersten Grade.

Es seien die Elemente von D bezeichnet mit $\varphi_{ik} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}$ und die Unterdeterminanten von D seien $D_{ik} = \frac{\partial D}{\partial\varphi_{ik}}$. Wir gehen aus von der identischen Gleichung:

$$(\alpha)\qquad D\,.\,y_\lambda = s\,.\,\sum_h D_{h\lambda}\,.\,\varphi_h,$$

durch Differentiation nach y_μ, wo μ von λ verschieden, ergiebt sich:

$$\frac{\partial D}{\partial y_\mu}\cdot y_\lambda = s\sum_h\left\{\frac{\partial D_{h\lambda}}{\partial y_\mu}\cdot\varphi_h + D_{h\lambda}\cdot\varphi_{h\mu}\right\};$$

da aber identisch:

$$\sum_h D_{h\lambda}\,\varphi_{h\mu} = 0,$$

so folgt:

$$(\beta)\qquad \frac{\partial D}{\partial y_\mu}\cdot y_\lambda = s\sum_h\frac{\partial D_{h\lambda}}{\partial y_\mu}\,.\,\varphi_h.$$

4. Die Functionen φ sollen einen *Punkt* gemein haben. In diesem Punkte verschwinden nach (α) und (β) die Determinante D und ihre ersten Differentialquotienten, d. h. in einem gemeinsamen *Schnittpunkte* der φ verschwindet D *zweifach*.

Eine weitere Differentiation nach y_ν, wo ν von μ und λ verschieden, ergiebt:

$$(\gamma)\qquad \frac{\partial^2 D}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \cdot y_\lambda = s \sum_h \frac{\partial D_{h\lambda}}{\partial y_\mu} \cdot \varphi_{h\nu} + s \sum_h \frac{\partial^2 D_{h\lambda}}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \cdot \varphi_h .$$

Aber aus der identischen Gleichung $\sum_h D_{h\lambda} \varphi_{h\nu} = 0$ folgt die wiederum identische Gleichung:

$$(\delta)\qquad \sum_h \left\{ \frac{\partial D_{h\lambda}}{\partial y_\mu} \cdot \varphi_{h\nu} + D_{h\lambda} \cdot \frac{\partial \varphi_{h\nu}}{\partial y_\mu} \right\} = 0 ,$$

daher:

$$(\gamma')\qquad \frac{\partial^2 D}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \cdot y_\lambda = - s \sum_h D_{h\lambda} \cdot \frac{\partial \varphi_{h\nu}}{\partial y_\mu} + s \sum_h \cdot \frac{\partial^2 D_{h\lambda}}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \cdot \varphi_h .$$

5. Die Functionen φ sollen eine *Curve* gemein haben. In diesem Falle kann man immer in jedem Punkte dieser Curve einen Parameter q so bestimmen, dass nicht nur:

$$\varphi_i = s \,.\, \sum_k \varphi_{ik} \cdot y_k = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots 5) ,$$

sondern auch in diesem Punkte:

$$\sum_k \varphi_{ik} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots 5) .$$

Aus dem System dieser Gleichungen folgt sogleich, dass in diesem Punkte die sämmtlichen ersten Unterdeterminanten D_{ik} von D verschwinden. Daher verschwinden auch nach (γ') die zweiten Differentialquotienten von D, d. h. längs einer den φ gemeinsamen Curve verschwindet die Determinante D *dreifach*.

Aus (γ) folgt durch weitere Differentiation nach y_π, wo π von λ, μ, ν verschieden:

$$\frac{\partial^3 D}{\partial y_\mu \partial y_\nu \partial y_\pi} \cdot y_\lambda = s \sum_h \left\{ \frac{\partial^2 D_{h\lambda}}{\partial y_\mu \partial y_\pi} \cdot \varphi_{h\nu} + \frac{\partial D_{h\lambda}}{\partial y_\mu} \cdot \frac{\partial \varphi_{h\nu}}{\partial y_\pi} + \frac{\partial^3 D_{h\lambda}}{\partial y_\mu \partial y_\nu \partial y_\pi} \cdot \varphi_h + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 D_{h\lambda}}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \cdot \varphi_{h\pi} \right\} .$$

Die identische Gleichung (δ) giebt aber:

$$\sum_h \left\{ \frac{\partial^2 D_{h\lambda}}{\partial y_\mu \partial y_\pi} \cdot \varphi_{h\nu} + \frac{\partial D_{h\lambda}}{\partial y_\mu} \cdot \frac{\partial \varphi_{h\nu}}{\partial y_\pi} + \frac{\partial D_{h\lambda}}{\partial y_\pi} \cdot \frac{\partial \varphi_{h\nu}}{\partial \varphi_\mu} + D_{h\lambda} \frac{\partial^2 \varphi_{h\nu}}{\partial y_\mu \partial y_\pi} \right\} = 0 .$$

Benutzt man die Beziehung, die aus dieser durch Vertauschung von ν und π hervorgeht, so wird die vorhergehende Gleichung:

$$(\varepsilon)\qquad \frac{\partial^3 D}{\partial y_\mu \partial y_\nu \partial y_\pi} \cdot y_\lambda = s \sum_h \left\{ \frac{\partial^3 D_{h\lambda}}{\partial y_\mu \partial y_\nu \partial y_\pi} \cdot \varphi_h - \frac{\partial D_{h\lambda}}{\partial y_\pi} \cdot \frac{\partial \varphi_{h\nu}}{\partial y_\mu} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial D_{h\lambda}}{\partial y_\mu} \cdot \frac{\partial \varphi_{h\pi}}{\partial y_\nu} - \frac{\partial D_{h\lambda}}{\partial y_\nu} \cdot \frac{\partial \varphi_{h\pi}}{\partial y_\mu} - D_{h\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{h\nu}}{\partial y_\mu \partial y_\pi} - D_{h\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{h\pi}}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \right\} .$$

6. Die Functionen φ sollen eine *Fläche* gemein haben. Nach 5. ist $\varphi_h = 0$, $D_{h\lambda} = 0$. Ferner kann man hier in jedem Punkte der Fläche immer zwei Parameter q, r so bestimmen, dass zugleich:

$$\varphi_i = s \sum_k \varphi_{ik}\, y_k = 0,$$

$$\sum_k \varphi_{ik} \frac{\partial y_k}{\partial q} = 0,$$

$$\sum_k \varphi_{ik} \frac{\partial y_k}{\partial r} = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots 5),$$

woraus folgt, dass die sämmtlichen ersten und zweiten Unterdeterminanten D_{ik} und $\frac{\partial D_{ik}}{\partial \varphi_{\lambda\mu}}$ von D verschwinden. Da

$$\frac{\partial D_{ik}}{\partial y_\pi} = \sum \frac{\partial D_{ik}}{\partial \varphi_{\lambda\mu}} \cdot \frac{\partial \varphi_{\lambda\mu}}{\partial y_\pi},$$

so folgt auch, dass sämmtliche $\frac{\partial D_{ik}}{\partial y_\pi}$ verschwinden. Nach (ε) verschwinden also auch die dritten Differentialquotienten von D; d. h. längs einer den φ gemeinsamen Fläche verschwindet die Determinante D *vierfach.*

Hat man vier Functionen φ von gleichem Grade, welche *Flächen* bedeuten, so bezeichnet man die Functionaldeterminante dieser vier Functionen als die Jacobi'sche Fläche der φ, und die Sätze 4. und 5. bedeuten hier:

„In einem gemeinsamen Schnittpunkte der Flächen $\varphi_i = 0$ hat dio Jacobi'sche Fläche derselben einen Doppelpunkt. Haben diese vier Flächen gleichen Grads eine Curve gemein, so ist diese Curve zugleich eine dreifache Curve der Jacobi'schen Fläche.“

§ 6.

Untersuchung der transformirten Ausdrücke Ω.

Eine Untersuchung der Ausdrücke Ω' ist nur für diejenigen Punkte anzustellen, in denen M oder in denen die $F'(y_h)$ sämmtlich verschwinden. Für diese Punkte hat man die Gleichungen:

$$M \,.\, F'(y_h) = 0 = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_h}, \quad (h = 1, 2, \ldots 5).$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man schon in den einfacheren Fällen, in denen niedrigeren Mannigfaltigkeiten auf f höhere auf F entsprechen, zeigen, dass der Zähler $\Theta \,.\, D$ in Ω' durch die M und

F gemeinschaftlichen Werthsysteme wenigstens ebenso oft als M hindurchgeht.

1. Einem *einfachen* Punkte auf f entspreche eine Fläche auf F. Nach den Transformationsformeln § 5. 1. wird sich M hier wie A, die Determinante D wie A^3 verhalten. $\frac{D}{M}$ muss also längs der Fläche *zweimal* verschwinden, und ebenso Ω'. Diesen Umstand werden wir noch weiterhin zu benutzen haben.

2. Einem *Doppelpunkt* auf f entspreche eine Fläche auf F. Nach § 5. 1. verhält sich M wie A^2, D wie A^3, d. h. $\frac{D}{M}$ verschwindet *einmal* längs der Fläche.

3. Einem höhern Knotenpunkte auf f entspreche eine Fläche auf F. Man hat hier, wie schon bei 2.:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Θ verschwindet dabei, wenn der Knotenpunkt ein μfacher ist, $(\mu-3)$mal, M verhält sich wie A^μ, D wie A^3. ΘD verschwindet also ebenso oft wie M.

4. Einer einfachen Curve auf f entspreche eine Fläche auf F. Nach § 5. 3. verschwindet D zweimal, während M einmal verschwinden kann, also D jedenfalls einmal mehr als M, längs der Fläche, welchen Umstand wir ebenfalls noch zu benutzen haben werden.

5. Einer μfachen Curve auf f entspreche eine Fläche auf F. Hier verschwindet Θ $(\mu-2)$mal, D zweimal, M kann μmal verschwinden, also ΘD ebenso oft als M.

6. Einer μfachen Fläche entspreche eine Fläche auf F. Da die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(\mu-1)$mal verschwinden, muss nach der obigen Gleichung auch M $(\mu-1)$mal verschwinden; aber Θ verschwindet hier ebenso oft als M.

Die Untersuchungen der umgekehrten Fälle, in denen die φ sämmtlich einfach, also die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ und ebenso die $MF'(y_h)$ $(n-1)$fach verschwinden, erfordert eine nähere Betrachtung der Abbildungen der auf $f=0$ liegenden vielfachen Mannigfaltigkeiten. Ich werde hierbei, mit den entsprechenden Erweiterungen, den Weg verfolgen, der von Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, § 16., für Curven und von Clebsch, diese Zeitschrift, Bd. I, p. 270, für die Abbildung der Doppelcurven rationaler Flächen eingeschlagen worden ist.

Wenn y und y' zwei Werthsysteme sind, denen ein Werthsystem der x entspricht, so hat man, um die Abbildung der auf $f=0$ liegenden vielfachen Mannigfaltigkeiten zu finden, aus den Bedingungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi_i(y) = \varphi_i(y') \\ F(y') = 0 \end{cases}$$

die y' zu eliminiren. Um nicht auf identische Gleichungen zu kommen, lässt man den Punkt $x' = \varphi(y')$ sich zunächst dem Punkt x nur annähern, indem man

$$(2) \qquad x'_i = \varphi_i(y') = \varphi_i(y) + \varepsilon z_i$$

setzt, und eliminirt aus (2) und $F(y')$ die y'. Wenn man noch in der Resultante dieser Gleichungen ε gegen Null convergiren lässt, schreibt sich dieselbe in der Form:

$$(3) \qquad 0 = R = z_1 f'(\varphi_1) + z_2 f'(\varphi_2) + \cdot\cdot + z_5 f'(\varphi_5).$$

Das Schnittsystem von $R = 0$, $F(y) = 0$ hängt noch von den ganz willkürlichen Grössen z ab, die durch die Art der Elimination (2) eingehen und in einem unwesentlichen Factor herauszuschaffen sind. Die Gleichungen (2) werden nun noch erfüllt, wenn sich die y' von den y nur um gewisse Grössen von der Ordnung ε unterscheiden, wenn man also setzt:

$$y'_i = y_i + \varepsilon \eta_i,$$

und wenn zugleich die y einer weitern von den z abhängigen Gleichung genügen, die sich durch Elimination aus den Gleichungen ergiebt, in die jetzt die (2) übergehen:

$$\frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y_1} \cdot \eta_1 + \cdot\cdot + \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y_5} \eta_5 = z_i,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} \cdot \eta_1 + \cdot\cdot + \frac{\partial F}{\partial y_5} \eta_5 = 0,$$

nämlich:

$$(4) \qquad S = 0 = \begin{vmatrix} \varphi_1'(y_1), & \varphi_1'(y_2), & \cdot\,\cdot & \varphi_1'(y_5), & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_5'(y_1), & \varphi_5'(y_2), & \cdot\,\cdot & \varphi_5'(y_5), & z_5 \\ F'(y_1), & F'(y_2), & \cdot\,\cdot & F'(y_5), & 0 \end{vmatrix}.$$

So lange die Coefficienten der z keinen gemeinschaftlichen Factor haben, werden die auf $f = 0$ liegenden vielfachen Gebilde durch die Gleichungen:

$$\frac{R}{S} = 0, \quad F(y) = 0$$

abgebildet. Da hier jedoch im Allgemeinen auch auf $f = 0$ Fundamental-Punkte und -Curven liegen, so wird S in Factoren zerfallen, von denen einige nicht in R enthalten sein müssen. Wir haben hier diese Fälle genauer zu discutiren.

$R = 0$ geht, nach dem Ausdrucke (3), $(\mu - 1)$mal durch die Abbildung jeder μfach zählenden, auf $f = 0$ liegenden Mannigfaltigkeit hindurch. Um das entsprechende Verhalten von S zu finden, könnte

man die Coefficienten der z in (4) auf dem nämlichen Wege untersuchen, wie die Determinante D in § 5. behandelt wurde. Wir können indess auch aus dem Verhalten von D auf das von S schliessen. Man hat nämlich, da die z_i beliebige Grössen sind:

$$\frac{R}{S} = \frac{f'(\varphi_1)}{\Sigma \pm \varphi_2'(y_1) \ldots \varphi_5'(y_4)\, F'(y_5)},$$

und gleich den analogen Quotienten. Aus den Gleichungen:

$$MF'(y_h) = \sum_i f'(\varphi_i) \cdot \varphi_i'(y_h)$$

folgt aber, dass diese Quotienten auch gleich $\frac{M}{D}$, also:

$$\frac{R}{S} = \frac{M}{D}.$$

D verschwindet längs einer Fläche auf F, welche einem einfachen und einem Doppelpunkte auf f entspricht, resp. zweimal und einmal mehr als M, und längs einer Fläche, welche einer einfachen Curve auf f entspricht, einmal mehr als M. Die entsprechenden Factoren, welche auch in S enthalten sein müssen, sind nicht in R enthalten. Mit Hülfe der am Anfang dieses § für $\frac{M}{D}$ erhaltenen Resultate sieht man überhaupt, dass, wenn einem Punkte oder einer Curve auf f eine Fläche auf F entspricht, S den entsprechenden Factor resp. zweimal oder einmal enthält. Wir sondern nun von S diejenigen Factoren doppelt ab, welche einfachen Punkten auf f, und diejenigen einfach ab, welche Doppelpunkten und einfachen Fundamentalcurven auf f entsprechen, und bezeichnen den Rest mit S'. Dieses S' ist in R mit Hülfe von $F = 0$ theilbar. $\frac{R}{S'}$ geht noch $(\mu - 1)$fach durch die Abbildung der μfachen Fläche, $(\mu - 2)$fach durch die einer μfachen Curve, und $(\mu - 3)$fach durch die eines μfachen Punktes hindurch. Die Function Θ geht nun genau ebenso oft durch diese gemeinschaftlichen Werthsysteme von $\frac{R}{S'}$ und F hindurch, folglich, da $\frac{R}{S} = \frac{M}{D}$, auch ebenso oft wie $\frac{M}{D'}$, wo D' aus D gerade so entsteht, wie S' aus S.

Hiermit ist bewiesen, dass Θ durch alle Punkte, in denen die ganze Function $\frac{M}{D'}$ verschwindet, ebenso oft als $\frac{M}{D'}$, also wenigstens ebenso oft als $\frac{M}{D}$ hindurchgeht.

7. Wir können jetzt mit wenigen Worten alle die Fälle erledigen, in denen höheren Mannigfaltigkeiten auf f niedrigere auf F entsprechen. Hier verschwinden die sämmtlichen x einfach, daher Θ, als Function der $(n-5)^{\text{ten}}$ Ordnung, im Allgemeinen $(n-5)$mal. Aber nach dem eben bewiesenen Satze tritt hier, vermöge der auf $f = 0$

liegenden singulären Mannigfaltigkeiten, der besondere Umstand ein, dass Θ in den einfachen Fundamentalgebilden von $F=0$ in ebenso hoher Ordnung als $\frac{M}{D}$, also in höherer Ordnung, als der $(n-5)^{\text{ten}}$ verschwindet. So in einem Punkte, der einer Fläche auf f entspricht, $(n-3)$mal, in einer einfachen Fundamentalcurve $(n-4)$mal, und ebenso oft in einem Doppelpunkte, der einer Fläche auf $f=0$ entspricht (da hier M $(n-2)$mal, D zweimal verschwindet). Man sieht, dass, wenn sich zwei Flächen eindeutig entsprechen, die Ausdrücke Ω längs derjenigen Mannigfaltigkeiten auf der einen Fläche, welche einfachen Fundamentalgebilden der andern Fläche entsprechen, immer solche Singularitäten zeigen müssen, wie sie unter 1. und 4. dieses § erwähnt sind.

8. Wenn auf F ein μfacher Knotenpunkt entsteht, werden die $MF'(y_h)$ Null in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, also M in der $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Ordnung. D verschwindet nach § 5. 4. zweifach; Θ verschwindet $(n-5)$fach, also $\frac{\Theta D}{M}$ $(\mu-3)$fach. Wenn auf F eine μfache Curve entsteht, findet man ebenso mit Hülfe von § 5. 5., dass $\frac{\Theta D}{M}$ $(\mu-2)$fach verschwindet, und wenn eine μfache Fläche entsteht, mit Hülfe von § 5. 6., dass $\frac{\Theta D}{M}$ $(\mu-1)$fach verschwindet.

Strenge genommen, haben wir sub 1. bis 7. nur nachgewiesen, dass ΘD durch das ganze Schnittsystem von $M=0$, $F=0$ hindurchgeht, und es müsste noch der in der Curven- und Flächentheorie fortwährend gebrauchte Satz dargethan werden, dass ΘD sich deshalb nothwendiger Weise in die Form setzen lässt:

$$\Theta D \equiv A \,.\, M + B \,.\, F.$$

Es seien ΘD, M, F Functionen der s und x, F vom Grade m. Man kann nun M immer mit einem solchen Factor λ multipliciren, dass aus $M \,.\, \lambda$ mit Hülfe von $F=0$ alles s verschwindet, und hat dann:

$$M\lambda = \Phi + \mu \,.\, F,$$

wo Φ nur noch eine Function der x. Dividirt man nun $\lambda \,.\, \Theta D$ durch F, so lässt sich der Rest auf die $(m-1)^{\text{te}}$ Potenz in Bezug auf s erniedrigen, also:

$$\Theta D \,.\, \lambda = \nu \,.\, F + \Phi_1 s^{m-1} + \Phi_2 \,.\, s^{m-2} + \ldots + \Phi_m,$$

wo die Φ Functionen der x. Für jedes Werthsystem der x, das Φ zu Null macht, lassen sich m Wurzeln für s angeben, für welche auch F verschwindet. Für alle diese Werthsysteme verschwindet aber auch M oder λ, also $\Theta D \,.\, \lambda$, daher auch der Ausdruck:

$$\Phi_1 s^{m-1} + \Phi_2 s^{m-2} + \ldots + \Phi_m.$$

Da nun dieser Ausdruck nur für $(m-1)$ Wurzeln zu 0 werden könnte, müssen alle Φ_i entweder identisch verschwinden, oder Φ zum Factor haben, und man hat die Darstellung:

$$\Theta D \,.\, \lambda = \nu F + \varrho \Phi = (\nu - \varrho\mu) F + \varrho\lambda \,.\, M,$$

oder:

$$\Theta D \equiv \varrho M + \frac{\nu - \varrho\mu}{\lambda} \cdot F.$$

Da ΘD eine ganze Function ist, so muss, wenn F und λ keinen gemeinschaftlichen Factor haben, λ in $\nu - \varrho\mu$ theilbar sein. Ein gemeinschaftlicher Factor von λ und F könnte nach der Gleichung $M\lambda = \Phi + \mu F$ nur von den x abhängig sein, ein Fall, der durch eine vorhergehende lineare Transformation immer zu vermeiden ist. Die verlangte Darstellung ist somit für jeden Fall bewiesen.

§ 7.

Das Geschlecht der algebraischen Gebilde.

Die bisher geführten Untersuchungen liefern den Beweis, dass den für $f = 0$ normirten Ausdrücken Ω bei eindeutiger Transformation wieder für $F = 0$ normirte Ausdrücke entsprechen, und dass also deren Anzahl p die gleiche ist. Um das Gesammtgebiet der hier behandelten Fälle zu übersehen, braucht man nur wieder successive Transformationen auf die speciell betrachteten Fälle anzuwenden, um zu dem Resultate zu kommen, dass alle Gleichungen, die $\infty^{2 \cdot r}$ mit vielfachen $\infty^{2 \cdot h}$ ausdrücken, welche nicht selbst wieder solche specielle Singularitäten besitzen, wie sie in § 3. bezeichnet sind, in die Betrachtung eingeschlossen sind. Wir bezeichnen die Zahl p als das *Geschlecht* der $\infty^{2 \cdot r}$, $f = 0$, und haben, um das ganze Gebiet der algebraischen Gleichungen mit den eben erwähnten Beschränkungen nach dieser Zahl p in Classen einzutheilen, in diesem Umfange das folgende Theorem bewiesen:

Das Geschlecht p der $\infty^{2 \cdot r}$, $f = 0$, ist gleich der Anzahl der in einer $\infty^{2 \cdot r}$ vom Grade $n - r - 2$, $\Theta = 0$, noch unbestimmt bleibenden Constanten, wenn $\Theta = 0$ gezwungen wird, durch jede μfache auf $f = 0$ liegende $\infty^{2 \cdot h}$ $(\mu - r + h)$fach hindurchzugehen. Für $\mu + h \overline{\gtrless} r$ hat Θ keiner Bedingung zu genügen.

Die Zahl p hat die Eigenschaft, für zwei $\infty^{2 \cdot r}$, $f = 0$ und $F = 0$, welche sich im Allgemeinen Punkt für Punkt eindeutig entsprechen, die gleiche zu sein, so dass p die Classenzahl ist für die Classe, zu der $f = 0$ und $F = 0$ gehören. Die Gleichheit der Zahl p ist das *nothwendige* Kriterium für die Möglichkeit

einer eindeutigen rationalen Transformation zweier $\infty^{2 \cdot r}$ in einander.

Die Frage nach den weiteren und hinreichenden Bedingungen des eindeutigen Entsprechens, die ich schon in meiner oben citirten Notiz behandelt habe, muss ferneren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Göttingen, den 16. August 1869.

Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen.

Von Dr. E. Schröder in Pforzheim.

Das vielbehandelte Problem der Auflösung einer Gleichung wird im Folgenden aus einem, meines Wissens, neuen Gesichtspunkte in Angriff genommen, welcher die gemeinschaftliche Quelle sowohl für mehrere bekannte, als auch für unzählige noch nicht beachtete Auflösungsmethoden bildet. Die Untersuchungen beziehen sich nicht nur auf algebraische, sondern auch auf transcendente Gleichungen mit *einer* Unbekannten. Anregung zu denselben erhielt ich 1867 durch einige Mittheilungen von Herrn Dr. Heinrich Eggers aus Meklenburg — vormals Professor am Gymnasium zu Schaffhausen und gegenwärtig nach Amerika ausgewandert — dem ich namentlich die Kenntniss eines grossen Theiles der in den §§ 2., 3., 7., 8., 11., 12., und 15. vorgelegten, übrigens selbstständig von mir hergeleiteten Resultate verdanke.

§ 1.

Charakter der Auflösungsmethoden und Bedingung ihrer Anwendbarkeit.

Ist $f(z)$ irgend eine eindeutig definirte Function des complexen Argumentes $z = x + iy$, welches wir uns stets durch einen Punkt der Zahlenebene dargestellt denken wollen, so besteht die Aufgabe, welche den Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen bildet, darin, die Gleichung:

$$(1) \qquad f(z) = 0$$

aufzulösen, das heisst, irgend eine Zahl (Wurzel) z_1 zu finden, von der Eigenschaft, dass

$$(2) \qquad f(z_1) = 0$$

ist. Es soll jedoch nur von denjenigen Wurzeln der beliebigen algebraischen oder transscendenten Gleichung (1) die Rede sein, in welchen und um welche herum die Function $f(z)$ stetig ist, für welche

ferner die Function von endlicher Ordnung Null wird. Nehmen wir das Zeichen z_1 um irgend eine erste eben dieser Wurzeln vorzustellen, so wird also die Function $f(z)$ in einem gewissen, den Punkt z_1 umschliessenden Gebiete T einwerthig stetig und endlich, und wird $f(z_1)$ von endlicher Ordnung 0 sein.

Aus der Functionentheorie ist nun bekannt*), dass der Grad der Vielfachheit der Wurzel z_1 oder die Ordnung des Verschwindens der innerhalb T einwerthigen Function $f(z)$, ebenso wie die Ordnung des Unendlichwerdens der reciproken Function $\frac{1}{f(z)}$ in dem Punkte z_1 eine (positive) ganze Zahl p sein muss, so dass man setzen kann:

(3) $$f(z) = (z - z_1)^p \, \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ eine ebenfalls innerhalb T einwerthige Function ist, deren Grenze

$$\lim_{z=z_1} \psi(z)$$

einen bestimmten von 0 und ∞ verschiedenen Werth erhält. Da ferner die Derivirte $d_z \psi(z) = \psi^{(1)}(z)$ daselbst ebenfalls wieder einwerthig und endlich sein, da mithin:

(4) $$\lim_{z=z_1} (z - z_1) \, \psi(z) = 0$$

sein muss**), so folgt aus der differenzirten Gleichung (3), nämlich aus:

(5) $$f^{(1)}(z) = (z - z_1)^{p-1} \left\{ p \psi(z) + (z - z_1) \, \psi^{(1)}(z) \right\}$$

leicht, dass die Derivirte $f^{(1)}(z)$ unsrer Function im Punkte z_1 von der Ordnung $p - 1$ verschwindet.

Die Gleichung:

(6) $$\frac{f(z)}{f^{(1)}(z)} = 0$$

muss demnach die nämlichen Wurzeln wie die Gleichung (1) — eine jede nur *einfach* — besitzen; ausserdem hat sie aber innerhalb T noch diejenigen Werthe von z zu einfachen Wurzeln — und nur diese Werthe — für welche $f(z)$ unendlich wird.

Dieses vorausgesetzt, hat man zur Auflösung der Gleichung (1) bekanntlich unter verschiedenen Methoden die Wahl. Es giebt nun eine grosse und, wie sich zeigen wird, sogar unendliche Mannigfaltigkeit von Auflösungsmethoden, welchen allen dieser Charakter gemeinsam ist, dass man mit einer nahezu ganz willkürlichen Zahl z nach bestimmten Gesetzen zu rechnen beginnt, und durch eine hinreichend

---

*) Vergleiche z. B. Durège, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse, Leipzig 1864, § 29.

**) Ibidem § 24. und 27.

weit fortgesetzte Reihe von Operationen zu einem Resultat geführt wird, welches der gesuchten Wurzel z_1 so nahe kommt, als man will. Jener *Anfangswerth* z kann manchmal als ein erster (oder nullter) Näherungswerth für die gesuchte Wurzel z_1 angesehen werden, von welchem aus man durch den Algorithmus der Auflösungsmethode successive zu besseren und genaueren Näherungswerthen geführt wird; oft auch ist man dabei des Durchganges durch zwischenliegende Näherungswerthe nicht benöthigt. Von der Wahl des Anfangswerthes hängt es in beiden Fällen ab, welche Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ man finden wird; im Uebrigen erscheint er als eine innerhalb gewisser Gebiete beliebige Constante, deren Einfluss auf das Endresultat um so mehr verschwindet, je weiter die Rechnung fortgesetzt wird. Auflösungsmethoden der einen und der andern Art bilden den Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen.

§ 2.

Methoden der ersten Art (Algorithmen).

Ohne dass über die Natur der Function f sogleich irgend etwas vorausgesetzt werde, soll nun die Gleichung (1) zunächst durch einen Algorithmus aufgelöst werden, durch dessen wiederholte Anwendung man von einem innerhalb gewisser Schranken beliebig angenommenen oder errathenen nullten Näherungswerth z ausgehend successive zu genaueren und genaueren Nährungswerthen für die Wurzel z_1 geführt werde. Es handelt sich dann darum, eine solche Function F aufzufinden, dass die Gleichung:

$$z' = F(z) \tag{7}$$

stets einen Punkt z' liefert, welcher der Wurzel z_1 näher liegt als der anfänglich angenommene Punkt z.

Stellen wir uns nämlich eine solche Function F als bereits bekannt vor, so wird die Berechnung von:

$$z'' = F(z')$$

einen neuen Punkt liefern, welcher von der gesuchten Wurzel z_1 noch weniger weit entfernt ist, als die beiden vorhergehenden z und z'; und definiren wir überhaupt:

$$z^{(r)} = F(z^{(r-1)}) \,, \tag{8}$$

so wird die Distanz des letzten Punktes $z^{(r)}$ von der Wurzel z_1 nach der über F gemachten Annahme kleiner sein, als die eines jeden der vorhergehenden Punkte:

$$z^{(0)} = z \,, \; z^{(1)} = z' \,, \; z^{(2)} = z'' \,, \; \ldots \,, \; z^{(r-1)}$$

von der nämlichen Wurzel; mit andern Worten die Moduln der Differenzen:

$$z - z_1\,,\; z' - z_1\,,\; z'' - z_1\,,\; \ldots\,,\; z^{(r-1)} - z_1\,,\; z^{(r)} - z_1,$$

welche man als die *Fehler* der verschiedenen Näherungswerthe bezeichnen kann, werden eine abnehmende Reihe bilden.

Eine fernere Forderung, die an die Function F gestellt werden muss, ist aber noch die, dass erstere Distanz bei wachsendem r nicht allein stets abnehme, sondern auch wirklich bis zu 0 abnehme, sodass:

(9) $$\lim_{r=\infty} z^{(r)} = z_1$$

werde.

Wenn diese Forderung, nebst der vorigen, die analytisch ausgedrückt lautet:

(10) $$\text{mod.}\,\{z^{(r)} - z_1\} < \text{mod.}\,\{z^{(r-1)} - z_1\},$$

für alle Werthe von r, wenigstens von einem bestimmten an bis $r = \infty$, erfüllt ist, so giebt die Gleichung (7) in der That einen *Algorithmus* von der verlangten Art an, durch dessen successive Anwendung man die Wurzel z_1 der Gleichung (1) beliebig genau zu ermitteln im Stande ist, und von welchem wir einfach sagen wollen, dass er von dem Anfangswerthe z an gegen die Wurzel z_1 *convergire*.

Die Auflösung der Gleichung $f(z) = 0$ kann alsdann symbolisch wie folgt dargestellt werden:

(11) $$z_1 = \lim_{r=\infty} F^r(z),$$

wenn wir nämlich, wie künftig geschehen soll, die $r$fach wiederholte oder *iterirte* Function:

(12) $$\underset{1}{\overset{\frown}{F}}\,(\underset{2}{\overset{\frown}{F}}\,\{\ldots \underset{r-1}{\overset{\frown}{F}}\,[\underset{r}{\overset{\frown}{F}}\,(z)]\ldots\}) = F^r(z)$$

bezeichnen.

Die Bedingungen (9) und (10), welche also durch die Function F erfüllt werden sollen, lassen sich aber in vortheilbringender Weise umgestalten.

Der Anfangswerth z soll nämlich innerhalb eines den Wurzelpunkt z_1 umschliessenden Gebietes U, welches füglich das *Convergenzgebiet* des Algorithmus für die Wurzel z_1 genannt werden kann, ein beliebiger sein. Stellt also $z = z_1 + \varepsilon$ einen hinreichend nahe an z_1 innerhalb dieses Convergenzgebietes gewählten Anfangswerth vor, und rechnet man den folgenden Näherungswerth z' oder:

$$F(z_1 + \varepsilon) = z_1 + \varepsilon'$$

aus, so muss nach (10) stets mod. $\varepsilon' <$ mod. ε sein; es muss folglich, wenn ε irgendwie der 0 zustrebt, um so mehr auch ε' der 0 zustreben, oder es muss:

$$\lim_{\varepsilon=0} F(z_1 + \varepsilon) = z_1$$

sein. Diese Gleichung lehrt, dass die Function F erstens in dem Punkte z_1 stetig sein, und zweitens die Bedingung:

$$F(z_1) = z_1 \tag{13}$$

erfüllen muss.

Nun könnte zwar von dem Punkte z_1 noch eine Unstetigkeitslinie der Function F ausgehen, oder ein Verzweigungsschnitt, wenn diese Function in mehrere Blätter fortgesetzt würde; wir wollen uns aber auf die Aufsuchung solcher Functionen F beschränken, welche innerhalb U, oder wenigstens innerhalb eines den Punkt z_1 umschliessenden Theils dieses Convergenzgebietes, einwerthig sind.

Alsdann lässt sich $F(z)$ oder $F(z_1 + \varepsilon)$ innerhalb eines den Mittelpunkt z_1 umschliessenden Kreises, oder für ein ε von hinreichend kleinem Modul, in eine Taylor'sche Reihe entwickeln:

$$F(z_1 + \varepsilon) = F(z_1) + \varepsilon F^{(1)}(z_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} F^{(2)}(z_1) + \cdots,$$

oder wegen (7) und (13):

$$z' = z_1 + \varepsilon F^{(1)}(z_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} F^{(2)}(z_1) + \cdots. \tag{14}$$

Vorausgesetzt, dass zunächst $F^{(1)}(z_1)$ von 0 verschieden sei, wird für ein hinreichend kleines ε das Glied $\varepsilon F^{(1)}(z_1)$ alle rechts nachfolgenden Glieder überwiegen, und man wird für ein unendlich kleines ε setzen können:

$$z' - z_1 = \varepsilon F^{(1)}(z_1).$$

Soll der Modul dieser Differenz gemäss der Forderung (10) kleiner sein, als derjenige von $z - z_1 = \varepsilon$, so erhalten wir als zweite Bedingung, welcher die Function F unterworfen sein muss:

$$\text{mod. } F^{(1)}(z_1) < 1. \tag{15}$$

Wäre $F^{(1)}(z_1) = 0$, so würde diese Bedingung ohnehin erfüllt sein.

Wenn nun aber die Bedingung (15) überhaupt erfüllt ist, so wird der Fehler des ersten Näherungswerthes, d. i. $z' - z_1$, seinem Modul nach geschätzt, nur ein Bruchtheil des ursprünglichen Fehlers der Annahme, d. i. $z - z_1 = \varepsilon$ sein, und da man durch wiederholtes Multipliciren mit einem constanten echten Bruche jede Zahl der 0 so nahe bringen kann als man will, so ist es unschwer nachzuweisen, dass dieser Fehler des Näherungswerthes, bei fortgesetzter Anwendung des Algorithmus, der 0 in der That zustrebt, oder dass auch die Forderung (9) erfüllt ist.

Es lassen sich also, wenn wir uns auf eine einwerthige Function F beschränken, die beiden Bedingungen (9) und (10) durch die (13) und (15) ersetzen.

Ferner kann man beiläufig den Satz aussprechen:

Ist $F(z)$ eine um den Punkt z_1 herum einwerthige Function, welche den Bedingungen (13) *und* (15) *genügt, so kann man immer eine übrigens willkürliche Zahl z nahe genug an z_1 annehmen, damit die Gleichung* (11) *erfüllt werde; mit andern Worten, für alle Punkte z eines gewissen um den Punkt z_1 herum liegenden Gebietes strebt die ohne Ende fort iterirte Function $F(z)$ der Wurzel z_1 der Gleichung $F(z) = z$ als Grenze zu.*

Wir hatten gefunden, dass unter den Voraussetzungen (13) und (15) die Gleichung (7) einen Algorithmus von der verlangten Art angiebt.

Wird der Fall: $F^{(1)}(z_1) = 0$ ausgeschlossen, so möge die Convergenz des alsdann vorliegenden Algorithmus eine *lineare*, oder *von der ersten Ordnung* genannt werden, weil hier der Fehler des Näherungswerthes der *ersten* Potenz des Fehlers beim Anfangswerthe um so genauer proportional ist, je kleiner der Modul des letzteren ist.

Einen viel brauchbareren Algorithmus erhält man jedoch, wenn die Function F so gewählt wird, dass zu den früheren Bedingungen noch die Gleichung:

(16) $$F^{(1)}(z_1) = 0$$

hinzutritt. Ist hier die nächst höhere Derivirte $F^{(2)}(z_1)$ von 0 verschieden, so wird für ein unendlich kleines ε der Fehler des Näherungswerthes:

$$z' - z_1 = \frac{\varepsilon^2}{2} F^{(2)}(z_1)$$

dem Quadrate des ursprünglichen Fehlers ε der Annahme proportional, er wird von der Ordnung dieses Quadrates, und kann die Annäherung füglich eine *quadratische* genannt werden.

Ebenso erhält man überhaupt einen Algorithmus, welcher eine Annäherung *von der ω^{ten} Ordnung* gewährt, wenn die Function F so bestimmt ist, dass gleichzeitig

(17) $$F^{(1)}(z_1) = 0 \quad , \quad F^{(2)}(z_1) = 0 \quad , \quad \ldots \; F^{(\omega-1)}(z_1) = 0$$

ist, während $F^{(\omega)}(z_1)$ von 0 verschieden ist, denn alsdann wird für ein unendlich kleines ε:

$$z' - z_1 = \frac{\varepsilon^\omega}{2 \,.\, 3 \ldots \omega} F^{(\omega)}(z_1),$$

also der Fehler bei dem Näherungswerthe proportional der ω^{ten} Potenz des Fehlers beim Anfangswerthe.

Ist in der That der nullte Näherungswerth oder Anfangswerth — seinem Modul nach geschätzt — auf s Decimalstellen hinter dem Komma genau, so wird der folgende oder erste Näherungswerth bei dem quadratisch convergirenden Algorithmus schon auf $2s$, bei dem Algorithmus der ω^{ten} Ordnung schon auf ungefähr ωs Decimalen nach dem Komma richtig sein, das heisst, genauer gesprochen: die Zahl s

kann so gross gedacht werden, dass für sie und für jede noch grössere Zahl s die Behauptung in aller Strenge richtig ist.

Es möge nun das Resultat recapitulirt werden:

Ist z_1 *eine Wurzel einer Gleichung* $f(z) = 0$, *ist ferner* $F(z)$ *eine Function, welche innerhalb eines den Punkt* z_1 *umschliessenden Gebietes einwerthig ist und dortselbst den Werth* z_1 *annimmt, so dass die Gleichung* (13)*:*

$$F(z_1) = z_1$$

erfüllt ist, so stellt die Gleichung (7):

$$z' = F(z)$$

einen Algorithmus vor, welcher ebenfalls innerhalb eines, jenen Punkt umschliessenden Gebietes, gegen die Wurzel z_1 *convergirt, wenn* (15)*:*

$$\text{mod. } F^{(1)}(z_1) < 1$$

ist, und zwar nur linear, wenn dieser Werth von 0 *verschieden, hingegen von der* ω^{ten} *Ordnung, wenn* (17)*:*

$$F^{(1)}(z_1) = 0 \;,\; F^{(2)}(z_1) = 0 \;,\; \ldots\; F^{(\omega-1)}(z_1) = 0 \;,\; \text{mod. } F^{(\omega)}(z_1) > 0$$

ist.

§ 3.

Beispiele von Algorithmen.

Wir lassen jetzt die im § 1 erwähnte Voraussetzung über die Einwerthigkeit der Function $f(z)$ eintreten.

I. Der bekannteste Algorithmus der gedachten Art um eine Gleichung $f(z) = 0$ aufzulösen, ist der Newton'sche; derselbe ist dargestellt durch die Formel:

$$z' = z - \frac{f(z)}{f^{(1)}(z)},$$

und ist also für ihn $F(z)$ oder:

$$F = z - \frac{f}{f^{(1)}},$$

wenn jetzt Kürze halber die Argumente z weggelassen werden.

Ist nämlich die Wurzel z_1 eine $p$fache, und bezeichnen wir

$$z - z_1 = \varepsilon,$$

sodass gemäss § 1:

$$f = \varepsilon^p \psi \quad , \quad f^{(1)} = \varepsilon^{p-1}(p\psi + \varepsilon\psi^{(1)})$$

und:

$$F = z - \frac{\varepsilon\psi}{p\psi + \varepsilon\psi^{(1)}}, \text{ mithin: } F^{(1)} = 1 - \frac{\psi}{p\psi + \varepsilon\psi^{(1)}} - \varepsilon\, \partial_z \frac{\psi}{p\psi + \varepsilon\psi^{(1)}}$$

wird, so erkennt man in der That sofort, dass für $z = z_1$ oder $\varepsilon = 0$:

$$F = z_1 \text{ sowie } F^{(1)} = 1 - \frac{1}{p}\,, \quad \text{folglich mod. } F^{(1)} < 1 \text{ ist,}$$

dass also die gefundenen Grundbedingungen eines Algorithmus durch den Newton'schen erfüllt werden.

Falls $p > 1$, ist $F^{(1)}$ von 0 verschieden; der Algorithmus convergirt also nur linear, wenn eine vielfache Wurzel durch denselben gefunden werden soll, und zwar um so schlechter, je vielfacher die gesuchte Wurzel ist. Ist aber $p = 1$, die Wurzel eine einfache, so ist der Newton'sche Algorithmus von quadratischer Convergenz, da alsdann $F^{(1)}(z_1) = 0$ wird, während $F^{(2)}(z_1)$ im Allgemeinen von 0 verschieden bleibt.

Will man auch für den ersten Fall einen quadratisch convergirenden Algorithmus erhalten, während der Grad p der Vielfachheit der Wurzel bekannt ist, so braucht man nur zu setzen:

$$F = z - p\,\frac{f}{f^{(1)}};$$

desselben Algorithmus könnte man sich mit Vortheil bedienen, wenn p nahezu gleiche Wurzeln vorhanden wären.

In dem besondern Falle, wo $f(z) = (z - z_1)^p$ selbst, also $\psi(z) = 1$ ist, liefert der letztere Algorithmus für jeden Anfangswerth z sofort die richtige Wurzel der Gleichung, indem $z' = z - \varepsilon = z_1$ wird.

II. Bezeichnet man eine beliebige um den Punkt z_1 herum einwerthige Function, welche in diesem Punkte selbst nicht etwa unendlich ist, durch

$$\frac{\varphi^{(1)}(z)}{\varphi(z)},$$

so liefert die Gleichung:

$$z' = z - \frac{f(z)\,\varphi(z)}{\varphi(z)\,f^{(1)}(z) - f(z)\,\varphi^{(1)}(z)} \qquad \text{oder} \qquad F = z - \frac{1}{\dfrac{f^{(1)}}{f} - \dfrac{\varphi^{(1)}}{\varphi}}$$

einen Algorithmus zur Auffindung der Wurzel z_1, welcher im Allgemeinen nur linear convergirt, wenn diese Wurzel eine vielfache, hingegen quadratisch, wenn sie eine einfache ist.

Derselbe ergiebt sich, wenn man den Newton'schen Algorithmus zur Auflösung der Gleichung

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = 0$$

bildet, resp. in den Formeln sub I. überall $\frac{f}{\varphi}$ statt f setzt. Auch die letztere Gleichung besitzt nämlich die Wurzel z_1, und kann an Stelle der Gleichung $f(z) = 0$ aufgelöst werden, wenn nur, wie dies in der obigen Voraussetzung implicirt ist, die Function φ nicht zugleich mit f verschwindet.

Auch ohne den letzteren Algorithmus aus dem Newton'schen abzuleiten, kann man die Zulässigkeit desselben direct darthun, indem man durch Einsetzung von $f = \varepsilon^p \psi$ bildet:

$$F = z - \frac{\varepsilon}{p + \varepsilon\frac{\psi^{(1)}}{\psi} - \varepsilon\frac{\varphi^{(1)}}{\varphi}},$$

und diesen Ausdruck nach z differenzirt.

Wegen der Willkürlichkeit der Function φ umfasst aber der gegenwärtige allgemeine Algorithmus unendlich viele specielle Algorithmen, z. B. der Newton'sche selbst geht durch die Annahme

$$\varphi(z) = \text{Const.}$$

wieder aus ihm hervor.

III. Die Function φ lässt sich jedoch so wählen, dass der Algorithmus sogar für eine vielfache Wurzel quadratische Convergenz behält — und dies giebt den bemerkenswerthesten Specialfall des allgemeinen Algorithmus; zufolge der an Gleichung (6) geknüpften Bemerkung wird derselbe erhalten, indem man $\varphi = f^{(1)}$ annimmt. Hier findet man nach einer leichten Reduction:

$$F = z - \varepsilon\,\frac{p + \varepsilon\frac{\psi^{(1)}}{\psi}}{p + \varepsilon^2\left(\frac{\psi^{(1)}}{\psi}\right)^2 - \varepsilon^2\,\frac{\psi^{(2)}}{\psi}},$$

und da für $\varepsilon = 0$ sofort auch $F^{(1)} = 0$ folgt, so ist also:

$$z' = z - \frac{f(z)\,f^{(1)}(z)}{f^{(1)}(z)^2 - f(z)\,f^{(2)}(z)}$$

ein stets mit quadratischer Schnelligkeit convergirender Algorithmus.

§ 4.

Die allgemeinsten Algorithmen von gegebener Convergenzgeschwindigkeit.

Ich gehe jetzt dazu über, in der allgemeinsten Weise zu zeigen, wie sich leicht Algorithmen $z' = F(z)$ construiren lassen, welche gegen eine Wurzel z_1 der Gleichung $f(z) = 0$ mit beliebig gegebener Schnelligkeit convergiren.

Die Function f sei jedoch der im § 1. erwähnten Bedingung der Einwerthigkeit unterworfen, ebenso die Function F gemäss § 2.

Der beliebige, nur hinreichend nahe an z_1 zu wählende Anfangswerth z werde Kürze halber weggelassen, wo er als Argument einer Function auftritt; ist aber in einer Formel statt des allgemeinen Argumentes z das specielle z_1 zu denken, so werde die Gleichung $z = z_1$ oder die für unsern Zweck äquivalente: $f(z) = 0$ zur Unterscheidung daneben geschrieben. Die besonders häufig auftretenden Derivirten der Function f:

$$\partial_z^{\,a} f(z) = f^{(a)}(z)$$

mögen ferner mit f_a bezeichnet, jede andere Differentiation nach z

aber mittelst der Symbole ∂_z, resp. ∂_z^a, kürzer ∂, resp. ∂^a angedeutet werden, und erstrecke sich der Einfluss eines solchen Symbols stets auf alles Folgende bis zum nächsten $+$ oder $-$ Zeichen.

Mit φ, φ_1, φ_2, ... werde ich arbiträre Functionen von z bezeichnen, die nur in der Umgebung des Punktes z_1 einwerthig sind und in diesem Punkte selbst nicht unendlich werden.

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir uns endlich auf die Voraussetzung beschränken, dass jede Wurzel z_1 der aufzulösenden Gleichung $f=0$ eine einfache sei; denn enthält diese Gleichung vielfache Wurzeln, so besitzt die Gleichung $\frac{f}{f_1}=0$, wie schon erwähnt, die nämlichen Wurzeln, eine jede nur einfach; man braucht also nur in den für den ersteren Fall erhaltenen Resultaten die Function f durchweg durch $\frac{f}{f_1}$ zu ersetzen, um das Entsprechende für den letzteren Fall zu erhalten.

Die erste an die Function F zu stellende Forderung war nun die, dass $F=z_1$ sei für $z=z_1$ oder $f=0$; und diese Forderung wird auf die allgemeinste Weise erfüllt, wenn man setzt:

$$F = z - \varphi,$$

wo die arbiträre Function φ ausser der schon erwähnten Eigenschaft auch noch die besitzt, für $f=0$ zu verschwinden. Da diese letztere Bedingung erfüllt wird, wenn man setzt:

$$\varphi = f\cdot\varphi_1,$$

und zwar wiederum auf die allgemeinste Weise, so lange φ_1 unbestimmt gelassen wird, so ist:

$$F = z - f\varphi_1$$

die allgemeinste Form einer Function, welche die erste Forderung erfüllt.

Soll nun dieser Algorithmus zum mindesten von quadratischer Convergenz sein — (für diejenigen von linearer Convergenz, für welche nur noch eine Ungleichung erfüllt werden, nämlich mod. $\partial F<1$ sein muss für $f=0$, lässt sich nicht wohl eine allgemeine Formel aufstellen; überdies sind dieselben in der Praxis viel weniger brauchbar) — so tritt als zweite Forderung hinzu: $\partial F=0$ für $f=0$. Dies liefert:

$$f_1\varphi_1 + f\partial\varphi_1 = 1 \text{ für } f=0,$$

oder, weil $\partial\varphi_1$ so wenig als φ_1 unendlich sein kann im Punkte z_1:

$$f_1\varphi_1 = 1 \text{ für } f=0,$$

und weil endlich, nach der Voraussetzung einer einfachen Wurzel, f_1 nicht zugleich mit f verschwinden kann:

$$\varphi_1 = \frac{1}{f_1} \text{ für } f=0.$$

Lässt man diese Gleichung, welche nur für $z = z_1$ zu gelten brauchte, sogleich für ein beliebiges z gelten, und fügt noch ein arbiträres mit f zugleich verschwindendes Glied hinzu, setzt man also überhaupt:

$$\varphi_1 = \frac{1}{f_1} + f\varphi_2,$$

so erfüllt sich auch die zweite Forderung in der allgemeinsten Weise, und es umfasst also die Gleichung:

$$F = z - \frac{f}{f_1} - f^2\varphi_2$$

bei unbestimmt gelassener Function φ_2 alle möglichen Algorithmen zweiter Ordnung oder von quadratischer Convergenz.

[In der That ist die Function φ_2 leicht so zu bestimmen, dass der Algorithmus beispielsweise in den sub II. im vorigen Paragraphen angegebenen ebenso allgemeinen Algorithmus übergeht; zu dem Ende braucht man nur die beiden Ausdrücke von F einander gleichzusetzen und φ_2 mittelst dieser Gleichung durch die dortige Function φ auszudrücken.]

Soll weiter der Algorithmus cubisch convergiren, so muss die Function F die fernere Forderung: $\partial^2 F = 0$ für $f = 0$ erfüllen. Bildet man aber die Gleichung $\partial^2 F = 0$, und setzt darin $f = 0$, ohne im Uebrigen auch das Argument z in z_1 zu verwandeln, so lässt sich daraus die Function φ_2 in der allgemeinsten Weise der Forderung entsprechend bestimmen, wenn man noch ein arbiträres, mit f gleichzeitig verschwindendes Glied hinzufügt. So ergiebt sich nach leichter Rechnung:

$$\varphi_2 = \frac{f_2}{2f_1^3} + f\varphi_3,$$

und liefert folglich die Function:

$$F = z - \frac{f}{f_1} - \frac{f^2 f_2}{2f_1^3} - f^3\varphi_3$$

den allgemeinen Algorithmus von cubischer Convergenz.

Fährt man fort, in dieser Weise zu schliessen, so gelangt man zu folgendem Resultate:

Der allgemeinste Algorithmus $z' = F(z)$, dessen Convergenz von der ω^{ten} Ordnung ist, wird erhalten, indem man:

$$F = z - \frac{f}{1!}\cdot\frac{1}{f_1} + \frac{f^2}{2!}\cdot\frac{1}{f_1}\partial\frac{1}{f_1} - \frac{f^3}{3!}\cdot\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^2\frac{1}{f_1} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{\omega-1}\frac{f^{\omega-1}}{(\omega-1)!}\cdot\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{\omega-2}\frac{1}{f_1} - f^\omega\varphi_\omega,$$

oder in kürzerer Bezeichnung:

$$(18)\qquad F = z + \sum_{a=1}^{a=\omega-1}(-1)^a\frac{f^a}{a!}\cdot\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-1}\frac{1}{f_1} - f^\omega\cdot\varphi_\omega$$

annimmt, wo φ_ω eine arbiträre Function ist.

Zur Erklärung muss ich bemerken, dass ich mich für die Facultäten $1.2.3\ldots(a-1).a$ hier, sowie im Folgenden, Kürze halber der von Schlömilch eingeführten Bezeichnung $a!$ bediene, ferner dass der Ausdruck:

$$\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-1}$$

kein Quantitätssymbol, sondern ein Operationssymbol vorstellen soll, welches fordert, dass das darauf folgende Operationssubject $\frac{1}{f_1}$ nach einander $a-1$ mal erst differenzirt und dann mit $\frac{1}{f_1}$ multiplicirt werde, sodass z. B.:

$$\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^4 \frac{1}{f_1}$$

den Sinn hat:

$$\frac{1}{f_1}\partial\frac{1}{f_1}\partial\frac{1}{f_1}\partial\frac{1}{f_1}\partial\frac{1}{f_1}.$$

Um nun die Richtigkeit des obigen Satzes zu beweisen, muss man nur noch darthun, dass die sämmtlichen Derivirten der Function F, bis zur $\omega-1^{\text{ten}}$ einschliesslich, für $f=0$ verschwinden. Zu diesem Zwecke hat man aber nicht nöthig, die genannten Derivirten sämmtlich zu bilden; es genügt, die Gleichung (18) ein einziges Mal zu differenziren. Thut man dies in allen Gliedern zuerst nach dem Factor vor, dann nach dem Factor hinter dem $\cdot$ Zeichen, ohne die letztere Operation mehr als nur anzudeuten, so kommt:

$$\partial F = 1 + \sum_{a=1}^{a=\omega-1}(-1)^a\frac{af^{a-1}f_1}{a!}\cdot\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-1}\frac{1}{f_1} - \omega f^{\omega-1}f_1\cdot\varphi_\omega +$$
$$+\sum_{a=1}^{a=\omega-1}(-1)^a\frac{f^a}{a!}\cdot\partial\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-1}\frac{1}{f_1} - f^\omega\cdot\partial\varphi_\omega.$$

In der ersten Summe rechts vereinfacht sich aber das allgemeine Glied zu:

$$(-1)^a\frac{f^{a-1}}{(a-1)!}\cdot\partial\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-2}\frac{1}{f_1},$$

und man sieht sogleich, dass sich das erste Glied dieser Summe gegen den Term 1 weghebt; ebenso heben sich alle folgenden Glieder dieser Summe gegen die $\omega-2$ ersten Glieder der zweiten Summe, sodass nur das letzte Glied dieser letzteren stehen bleibt, nebst den zwei noch ausserhalb befindlichen Termen.

Man hat also:

$$\partial F = f^{\omega-1}\left\{\frac{(-1)^{\omega-1}}{(\omega-1)!}\,\partial\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{\omega-2}\frac{1}{f_1} - \omega f_1\,\varphi_\omega - f\,\partial\varphi_\omega\right\},$$

und da diese Function den Factor $f^{\omega-1}$ enthält, also mit f zugleich $\omega-1$ fach verschwindet, so müssen auch die höheren Derivirten derselben bis zur $\omega-2^{\text{ten}}$ inclus. für $f=0$ verschwinden, wie gezeigt werden sollte.

§ 5.

Auflösungsmethode der zweiten Art als Grenzfall der Algorithmen.

Nachdem wir nun zu einem allgemeinen Ausdruck (18) für den Algorithmus von der Ordnung ω gelangt sind, liegt der Gedanke nahe, auch einmal $\omega = \infty$ anzunehmen.

Es erscheint dann die Function F in Gestalt einer unendlichen Reihe, nämlich:

$$(19) \qquad F = z + \sum_{a=1}^{a=\infty} (-1)^a \frac{f^a}{a!} \left(\frac{1}{f_1} \partial\right)^{a-1} \frac{1}{f_1},$$

wenn wir noch das niemals erscheinende Glied $- f^\omega \varphi_\omega$ durch die Annahme $\varphi_\omega = 0$ zum Wegfall bringen, und hat die Function selbstverständlich nur insofern einen Sinn, als die genannte Reihe convergent ist. In einer grossen Classe von Fällen wird die Reihe in der That für ein gewisses Bereich von z convergiren, da sie sich für $f = 0$ auf das Anfangsglied $z = z_1$ reducirt, und da die Grösse f, nach deren Potenzen die Reihe ansteigt, so klein gemacht werden kann, als man will, wenn man nur z hinreichend nahe an z_1 annimmt. [Sollte sich aber dieses Bereich in den Punkt z_1 zusammenziehen, so dürfte es durch passende Annahme von φ_ω in Gleichung (18) nicht selten gelingen, die divergente Reihe durch einen Grenzwerth zu ersetzen, welcher endlich bleibt.]

Im Convergenzfalle nun stellt die Reihe (19) eine Function dar, deren sämmtliche Derivirte für $f = 0$ verschwinden. Der Werth dieser Funcfion für einen hinreichend nahe an z_1 gewählten Anfangswerth z liefert also einen Näherungswerth z' für die Wurzel z_1, dessen Fehler einer unendlich hohen Potenz des Fehlers beim Anfangswerthe proportional, das ist 0 sein muss. In der That giebt die Gleichung (14) für diesen Fall: F oder

$$(20) \qquad z' = z_1 .$$

Der Algorithmus von unendlich rascher Convergenz giebt daher als ersten Näherungswerth sofort die richtige Wurzel der Gleichung; derselbe besitzt den Charakter eines eigentlichen Algorithmus oder *wiederholt* anzuwendenden Rechenverfahrens nicht mehr, sondern er bildet eine Auflösungsmethode von der zweiten in § 1 erwähnten Art, bei der man der Vermittelung von Näherungswerthen behufs Auflösung der Gleichung nicht bedarf.

Es mögen nun die angedeuteten Differentiationen in den ersten Gliedern der Reihe wirklich ausgeführt werden. Die Reihe lautet dann:

$$(21)\quad \begin{aligned} z_1 = F = z &- \frac{f}{1!}\cdot\frac{1}{f_1} - \frac{f^2}{2!}\cdot\frac{f_2}{f_1^3} - \frac{f^3}{3!}\cdot\frac{3f_2^2 - f_1 f_3}{f_1^5} - \\ &- \frac{f^4}{4!}\cdot\frac{15 f_2^3 - 10 f_1 f_2 f_3 + f_1^2 f_4}{f_1^7} - \\ &- \frac{f^5}{5!}\cdot\frac{105 f_2^4 - 105 f_1 f_2^2 f_3 + 10 f_1^2 f_3^2 + 15 f_1^2 f_2 f_4 - f_1^3 f_5}{f_1^9} - \ldots \end{aligned}$$

und ist in dieser Form auf einem andern Wege und ohne Beziehung zu den von uns betrachteten Algorithmen schon von Theremin*) abgeleitet worden.

Bezeichnet man das allgemeine Glied mit:

$$-\frac{f^a}{a!}\cdot\frac{\chi_a}{f_1^{2a-1}},$$

so lassen sich die Zähler χ_a leicht recurrent nach dem Schema bilden:

$$(22)\qquad \chi_{a+1} = (2a-1)\, f_2\, \chi_a - f_1\, \partial\chi_a\,.$$

In conciser Weise lässt sich die Reihe auch noch folgendermassen darstellen:

$$(23)\quad z_1 = F(z) = z + \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{(-1)^a f(z)^a}{a!} \lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^{a-1} \left\{\frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon}\right\}^{-a},$$

oder aber:

$$(24)\qquad z_1 = \sum_{a=0}^{a=\infty} \frac{(-1)^a f(z)^a}{a!}\, \partial_{f(z)}^a z\,;$$

indem die Identität besteht:

$$(25)\quad \left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-1}\frac{1}{f_1} = \frac{(-1)^{a-1}\chi_a}{f_1^{2a-1}} = \lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^{a-1}\left\{\frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}\right\}^{-a} = \partial_{f(z)}^a z,$$

welche nach den bekannten Sätzen für die Vertauschung der unabhängigen Variabeln leicht erwiesen werden kann.

§ 6.

Beispiel der quadratischen Gleichung.

Um zu den letzten Ergebnissen auch ein Beispiel anzuführen, will ich dieselben auf die quadratische Gleichung anwenden, welche zwar schon von Theremin (l. c.) jedoch nicht mit befriedigender Strenge und Vollständigkeit behandelt worden ist.

Sei also:

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0$$

die auf dem angegebenen Wege aufzulösende Gleichung; dann ist:

---

*) Crelle's Journal, Bd. 49, pag. 187 — 243: Recherches sur la résolution des équations de tous les dégrés.

$$\frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon} = \varepsilon + 2z - z_1 - z_2,$$

und:

$$\partial_\varepsilon^{a-1} \cdot \frac{1}{(\varepsilon + 2z - z_1 - z_2)^a} = \frac{(-1)^{a-1}(2a-2)!}{(a-1)!\,(\varepsilon + 2z - z_1 - z_2)^{2a-1}}.$$

Setzt man den hieraus für $\varepsilon = 0$ sich ergebenden Werth nebst demjenigen von $f(z)$ in die Gleichung (23) ein, so folgt:

$$z' = z - \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{(2a-2)!}{(a-1)!\,a!} \cdot \frac{(z-z_1)^a (z-z_2)^a}{(2z - z_1 - z_2)^{2a-1}},$$

oder weil

$$\frac{(2a-2)!}{(a-1)!\,a!} = (-1)^{a-1}\, 2^{2a-1} \left(\frac{1}{2}\right)_a$$

ist, falls der Binomialcoefficient

$$\frac{s!}{a!\,(s-a)!}$$

stets mit $(s)_a$ bezeichnet wird,

$$z' = z + \left(z - \frac{z_1+z_2}{2}\right) \sum_{a=1}^{a=\infty} (-1)^a \left(\frac{1}{2}\right)_a \left\{\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{\left(z - \frac{z_1+z_2}{2}\right)^2}\right\}^a.$$

Als untere Grenze der Summe rechter Hand kann man auch 0 nehmen, wenn man dafür von dieser Summe 1 abzieht; dann aber stellt die Summe die nach Potenzen der Grösse:

$$t = -\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{\left(z - \frac{z_1+z_2}{2}\right)^2}$$

fortschreitende Binomialreihe für den Exponent $\frac{1}{2}$ vor.

Nun hat Abel*) nachgewiesen, dass die Binomialreihe

$$\sum_{a=0}^{a=\infty} (s)_a\, t^a$$

convergirt und einen der Werthe von $(1+t)^s$ vorstellt, wenn überhaupt mod. $t < 1$ ist, und auch noch für mod. $t = 1$ falls der reelle Theil von $s > -1$ ist, mit Ausnahme endlich des Specialwerthes $t = -1$ wenn real. $s \gtrless 0$. Da gegenwärtig $s = \frac{1}{2}$ ist, convergirt unsere Reihe also für mod. $t \leqq 1$, und ist dann:

$$z' = z + \left(z - \frac{z_1+z_2}{2}\right)\left\{\pm\sqrt{1+t} - 1\right\} = z + \left(z - \frac{z_1+z_2}{2}\right)\left\{\frac{\pm\frac{z_1-z_2}{2}}{z - \frac{z_1+z_2}{2}} - 1\right\},$$

also:

$$z' = \frac{z_1+z_2}{2} \pm \frac{z_1-z_2}{2},$$

das heisst $z' = z_1$ wenn das obere, und $z' = z_2$ wenn das untere Zeichen gilt. Welcher von diesen beiden Fällen vorliegt, muss aber

*) Oeuvres complètes, T. I. No. VII, Christiania 1839, pag. 66.

noch discutirt werden; desgleichen wollen wir uns von der Beschaffenheit des Convergenzgebietes Rechenschaft geben.

Setzen wir:

$$z - z_1 = \varrho_1 e^{i\vartheta_1}, \quad z - z_2 = \varrho_2 e^{i\vartheta_2}, \quad z - \frac{z_1 + z_2}{2} = \varrho e^{i\vartheta},$$

so sind ϱ_1, ϱ_2, ϱ beziehungsweise die Abstände des Punktes z von den Punkten z_1, z_2 und $\frac{z_1 + z_2}{2}$, welcher letztere zwischen den beiden ersten in der Mitte liegt, und die Convergenzbedingung für die Reihe lautet:

$$\varrho_1 \varrho_2 \leqq \varrho^2.$$

Nennt man aber $2E$ den Abstand der beiden Wurzelpunkte z_1 und z_2 von einander, so ist nach einem bekannten Satze über die Mittellinie (Schwerlinie, Mediane) jedes Dreiecks:

$$\varrho^2 = \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{2} - E^2,$$

und verwandelt sich die Convergenzbedingung in:

$$(\varrho_1 - \varrho_2)^2 \geqq 2E^2 \qquad \text{oder} \qquad \pm (\varrho_1 - \varrho_2) \geqq E\sqrt{2}.$$

Das Convergenzgebiet ist also von einer gleichseitigen Hyperbel begrenzt, deren Brennpunkte die Wurzeln z_1 und z_2 der quadratischen Gleichung sind, und zwar ist es derjenige Theil der Zahlenebene, in welchem diese Brennpunkte selbst liegen. Die Hyperbel selbst gehört noch zu dem Convergenzgebiete.

Abel hat auch (l. c.) gezeigt, welchen Werth der unendlich vieldeutigen Function $(1 + t)^s$ die Binomialreihe ausdrückt, falls sie überhaupt convergirt. Zu dem Ergebnisse dieses Theiles der Abel'schen Untersuchung kann man aber, da für reelle Argumente jene Summe unzweideutig bekannt ist, leichter direct nach dem Satze der Functionentheorie gelangen, dass eine Potenzreihe eine einwerthige und stetige Function des Argumentes ist, und dass eine solche Function — wenigstens einem bestimmten Flächenstreifen entlang — nur auf *eine* Weise stetig in der Ebene fortgesetzt werden kann. Die Function $\log z$ möge, wie es bei vielen Untersuchungen zweckmässig erscheint, in der ganzen Zahlenebene eindeutig definirt werden durch die Festsetzung, dass sie für positive z reell genommen und von der Axe der positiven Zahlen stetig bis an die Axe der negativen Zahlen fortgesetzt werden soll, so, dass der imaginäre Theil von $\log z$ auf der negativen Axe selbst $+\pi i$, unendlich dicht unterhalb derselben aber $-\pi i$ ist, und die Function also längs der Axe der negativen Zahlen eine Unstetigkeitslinie besitzt. Die Summe der Binomialreihe ist dann unzweideutig dargestellt durch den Ausdruck: $e^{s \log(1+t)}$. Für unser Beispiel ist aber:

$$1 + t = \left(\frac{E e^{i\vartheta_0}}{\varrho e^{i\vartheta}}\right)^2 = \left(\frac{E}{\varrho}\right)^2 e^{2i(\vartheta_0 - \vartheta)},$$

wenn wir noch mit ϑ_0 die Amplitude der Zahl

$$\frac{z_1 - z_2}{2} = E e^{i\vartheta_0}$$

bezeichnen, also:

$$e^{\frac{1}{2}\log(1+t)} = \frac{E}{\varrho} e^{\frac{1}{2}\log e^{2i(\vartheta_0 - \vartheta)}}.$$

Beachtet man, dass für eine reelle Zahl y:

$$\log e^{iy} = i(y + 2h\pi)$$

ist, wo die positive oder negative ganze Zahl h so gewählt werden muss, dass $y + 2h\pi$ zwischen $-\pi$ (excl.) und π (incl.) liegt, so ergiebt sich:

$$e^{\frac{1}{2}\log(1+t)} = \frac{E}{\varrho} e^{i(\vartheta_0 - \vartheta + h\pi)} = \frac{\frac{z_1 - z_2}{2}}{z - \frac{z_1 + z_2}{2}} \cdot e^{h\pi i},$$

wo h so zu wählen ist, dass $\vartheta_0 - \vartheta + h\pi$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ (exclus.) und $\frac{\pi}{2}$ (inclus.) liegt. Der Fahrstrahl ϱ des Punktes z schliesst nun mit der Verbindungslinie von z_1 und z_2 zwei supplementäre Winkel ein, von welchen der auf der Seite des Punktes z_1 liegende ω_1, der andere ω_2 heissen möge, und welche stets zwischen 0 und π genommen werden können. Wählt man noch die Amplituden ϑ_0, ϑ, etc. stets zwischen $-\pi$ und π, so ist es leicht, nach dem Satze vom Aussenwinkel des Dreiecks, die Differenz $\vartheta_0 - \vartheta$ durch ω_1 oder ω_2 auszudrücken, und man findet, dass h eine gerade Zahl 0 oder 2, mithin $e^{h\pi i} = 1$ sein muss, wenn $\omega_1 < \frac{\pi}{2}$, hingegen eine ungerade Zahl ± 1, mithin $e^{h\pi i} = -1$, wenn $\omega_2 < \frac{\pi}{2}$. Im ersten Falle gilt in der Formel für z' das obere Zeichen und wird $z' = z_1$, im zweiten Falle das untere und wird $z' = z_2$. Als Summe der Reihe ergiebt sich also stets diejenige Wurzel der quadratischen Gleichung, deren Zahlenort derjenige Hyperbelbrennpunkt ist, welcher auf der nämlichen Seite der kleinen Axe in der Ebene liegt, wie der Zahlenort des Punktes z, dem also z sich nähern kann ohne die Curve zu überschreiten.

§ 7.

Einführung der symmetrischen Functionen A, B der Wurzeln.

Nachdem die Auffindung der allgemeinsten Algorithmen zur Auflösung einer Gleichung $f(z) = 0$ im Vorausgehenden erledigt ist, gehe ich zur Aufstellung der bemerkenswerthesten speciellen Algorithmen über. Da ich indess die Motive hierzu der Theorie der *algebraischen*

Gleichungen entlehne, werde ich mich von nun an auf diesen Fall beschränken — wo also $f(z)$ eine rationale Function ist — wenngleich die Endresultate grossentheils auch auf den Fall einer beliebigen einwerthigen Function ausgedehnt werden könnten.

Die von 0 und ∞ verschiedenen Wurzeln der Gleichung, um deren Aufsuchung es sich *allein* handelt, seien: $z_1, z_2, z_3, \dots . z_n$.

Die gedachten Algorithmen beruhen nun auf den Eigenschaften gewisser symmetrischer Functionen dieser sämmtlichen Wurzeln, welche in der Form enthalten sind:

$$C_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{z_a^\lambda \chi(z_a)}{(z - z_a)^{\omega+1}}, \tag{26}$$

worin ω und λ beliebige, aber positive ganze Zahlen bedeuten sollen und χ eine den willkürlichen Anfangswerth z nicht enthaltende Function eines Argumentes ist, die für keine Wurzel z_a der Gleichung 0 oder ∞ wird.

Die Eigenschaften jener Function (26) bilden den nächsten Gegenstand unserer Betrachtung.

Setzt man:

$$F(z) = \frac{C_\omega^{(\lambda+h)}(z)}{C_\omega^{(\lambda)}(z)}, \tag{27}$$

wo h wieder eine natürliche Zahl bedeutet, so lässt sich zuerst der Satz aufstellen:

I. *Ist das Argument der Function F eine Wurzel der Gleichung $f = 0$, so ist der Werth der Function die h^{te} Potenz dieser Wurzel, oder*:

$$F(z_1) = z_1^h, \tag{28}$$

wobei z_1 oder das für die erste der Wurzeln eingeführte Zeichen selbstredend zugleich der Repräsentant einer beliebigen von diesen Wurzeln ist.

Um diesen Satz zu beweisen, multiplicire man Zähler und Nenner des Bruches (27) mit $(z - z_1)^{\omega+1}$, damit sie für $z = z_1$ nicht mehr ∞ werden; dadurch entsteht:

$$F(z) = \frac{\sum_{a=1}^{a=n} z_a^{\lambda+h} \chi(z_a) \left(\frac{z - z_1}{z - z_a}\right)^{\omega+1}}{\sum_{a=1}^{a=n} z_a^{\lambda} \chi(z_a) \left(\frac{z - z_1}{z - z_a}\right)^{\omega+1}}. \tag{29}$$

Ist nun die Wurzel z_1 eine $p$fache (wo p auch $= 1$ sein kann), ist z. B.:

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_p, \tag{30}$$

so verschwinden für $z = z_1$ im Zähler und Nenner alle Glieder, welche auf das p^{te} folgen, oder für welche die Summationsvariable $a > p$ ist;

in den Gliedern hingegen, für welche a einen der Werthe 1, 2, 3, ... p besitzt, nimmt der Factor

$$\left(\frac{z-z_1}{z-z_a}\right)^{\omega+1}$$

den Werth 1 an, und da alle diese Glieder einander gleich sind, beträgt ihre Summe das $p$fache des ersten Gliedes, oder es wird:

$$F(z_1) = \frac{p\, z_1{}^{\lambda+h}\, \chi(z_1)}{p\, z_1{}^{\lambda}\, \chi(z_1)},$$

was auf Gleichung (28) hinauskommt.

Unter der Annahme $h=1$ erfüllt also die Function F die erste Grundbedingung: $F(z_1)=z_1$, welcher, wie wir gesehen haben, eine Function unterworfen sein muss, wenn sie einen Algorithmus liefern soll.

II. *Liegt der Punkt z dem Zahlenort der Wurzel z_1 näher, als allen übrigen Wurzelpunkten, ist also mod. $(z-z_1)$ der kleinste unter den Moduln der sämmtlichen von einander verschiedenen unter den Differenzen $z-z_1$, $z-z_2$, ..., $z-z_n$, sodass:*

(31) mod. $(z-z_1) <$ mod. $(z-z_a)$ für $a = p+1$, $p+2, \ldots n$,

so ist der Grenzwerth:

(32) $$\lim_{\omega=\infty} F(z) = z_1{}^h.$$

Denn, da

$$\text{mod.}\ \frac{z-z_1}{z-z_a}$$

ein echter Bruch ist für jedes $a > p$, so ist der Grenzwerth

$$\lim_{\omega=\infty}\left(\frac{z-z_1}{z-z_a}\right)^{\omega+1} \text{ gleich } 0 \text{ für } a > p;$$

hingegen ist derselbe gleich 1 für $a = 1, 2, 3, \ldots p$. In dem Zähler und Nenner von (29) verschwinden also für $\omega = \infty$ wieder alle auf das p^{te} folgenden Glieder, und ziehen sich die übrigen zusammen genau wie beim vorigen Satze, wo $z = z_1$ gesetzt wurde.

III. *Die Derivirte $\partial_z F(z)$ wird 0 in der Ordnung ω, wenn das Argument z in eine Wurzel z_1 übergeht, oder es kann:*

(33) $$\partial_z F(z) = (z-z_1)^{\omega} \cdot \Psi(z)$$

gesetzt werden, wo $\Psi(z)$ eine Function ist, die für $z=z_1$ nicht ∞ wird und im Allgemeinen, so lange nicht besondere Relationen zwischen den Wurzeln vorausgesetzt werden, auch nicht verschwindet.

Zum Zweck des Beweises setze man in die aus (27) durch Differentiation sich ergebende Gleichung:

$$\partial_z F(z) = \frac{C_\omega^{(\lambda)}(z)\, \partial_z C_\omega^{(\lambda+h)}(z) - C_\omega^{(\lambda+h)}(z)\, \partial_z C_\omega^{(\lambda)}(z)}{\left\{C_\omega^{(\lambda)}(z)\right\}^2}$$

die aus (26) hervorgehenden Ausdrücke der Functionen C ein, wobei

aber in den zu differenzirenden Functionen C die Summationsvariable a zur Unterscheidung durch einen andern Buchstaben b ersetzt werden möge, und führe die rechts angedeuteten Differentiationen aus; dann erhält man nach einer leichten Zusammenziehung:

$$C_\omega^{(\lambda)}(z)^2 \cdot \partial_z F(z) = -(\omega+1)\sum_{a=1}^{a=n}\sum_{b=1}^{b=n} \frac{z_a^\lambda z_b^\lambda \chi(z_a)\chi(z_b)}{(z-z_a)^{\omega+1}(z-z_b)^{\omega+1}} \cdot \frac{z_b^h - z_a^h}{z-z_b}.$$

Die Ausdrücke unter den Doppelsummen rechter Hand sind unsymmetrisch in Bezug auf die Summationsvariabeln a und b wegen des Factors:

$$\frac{z_b^h - z_a^h}{z-z_b};$$

dieselben können aber symmetrisch gestaltet werden, wenn man bedenkt, dass wegen des Zählers $z_b^h - z_a^h$ zunächst alle diejenigen Glieder aus der Doppelsumme herausfallen, in welchen die Summationsindices a und b einander gleich sind. Bei den übrig bleibenden Termen findet sich zu jeder Combination a, b der beiden Indices die entsprechende b, a vor, und man ist deshalb berechtigt, anstatt jenes Factors unter der Doppelsumme zu schreiben:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{z_b^h - z_a^h}{z-z_b} + \frac{z_a^h - z_b^h}{z-z_a}\right\} = \frac{1}{2}\frac{(z_a^h - z_b^h)(z_a - z_b)}{(z-z_a)(z-z_b)}.$$

Dadurch wird endlich:

$$(34)\quad \partial_z F(z) = -\frac{\omega+1}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{a=1}^{a=n}\sum\limits_{b=1}^{b=n}\frac{z_a^\lambda z_b^\lambda (z_a^h - z_b^h)(z_a - z_b)}{(z-z_a)^{\omega+2}(z-z_b)^{\omega+2}}\chi(z_a)\chi(z_b)}{\left\{\sum\limits_{c=1}^{c=n}\frac{z_c^\lambda \chi(z_c)}{(z-z_c)^{\omega+1}}\right\}^2},$$

worin man also auch berechtigt ist, a und b als irgend zwei verschiedene unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ anzusehen.

Wir wollen nun Zähler und Nenner in (34) mit einer solchen Potenz von $z - z_1$ multipliciren, dass dieselben für $z = z_1$ nicht mehr ∞ werden; es frägt sich, welche Potenz dieser Differenz hierzu erforderlich ist.

Ist zunächst die Wurzel z_1 eine einfache, so muss man den Bruch in (34) des Gesammtnenners wegen offenbar mit dem Factor

$$\{(z-z_1)^{\omega+1}\}^2 = (z-z_1)^{2\omega+2}$$

erweitern. Um aber im Zähler das genannte Resultat zu erzielen, würde schon die Multiplication mit $(z-z_1)^{\omega+2}$ genügen, da wegen der Verschiedenheit der Indices a und b eine höhere Potenz von $z - z_1$ in den Nennern der einzelnen Glieder nicht vorkommen kann. Es bleibt also noch der Factor:

$$(z-z_1)^{2\omega+2-(\omega+2)} = (z-z_1)^\omega$$

in eine für $z = z_1$ nicht mehr ∞ oder 0 werdende Function multiplicirt übrig.

Für den Fall einer vielfachen, nämlich $p$fachen Wurzel z_1 wird man leicht dieselbe Schlussweise anwendbar finden, nachdem man darauf Rücksicht genommen, dass alsdann mehrere Glieder im Zähler des Ausdrucks (34) sich fortheben, während andere im Zähler und auch im Nenner sich zusammenziehen.

Da also die Derivirte $\partial_z F(z)$ für $z = z_1$ in der That ωfach verschwindet, so müssen auch die höheren Differentialquotienten der Function $F(z)$ bis zum ω^{ten} einschliesslich für $z = z_1$ verschwinden, oder es erfüllt die Function $F(z)$ die zweite Grundbedingung, welcher eine Function unterworfen sein muss, wenn sie einen Algorithmus der $\omega + 1^{\text{ten}}$ Ordnung liefern soll.

IV. Es erübrigt noch als eine vierte Eigenschaft der Function C die Relation anzuführen:

$$C_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{c=0}^{c=h} (-1)^c (h)_c z^{h-c} C_{\omega-c}^{(\lambda-h)}(z), \tag{35}$$

worin $(h)_c$ den Binomialcoefficienten $\frac{h!}{c!(h-c)!}$ bezeichnet.

Der Beweis ist leicht zu führen, denn setzt man die aus der Definition (26) sich ergebenden Ausdrücke ein, so kommt die Relation auf die nach dem Binomialtheorem identische Gleichung hinaus:

$$z_a^h = \Sigma_c{}_{c=0}^{c=h} (-1)^c (h)_c z^{h-c} (z - z_a)^c.$$

Als bemerkenswerther besonderer Fall dieser Relation (35) ist die für $h = \lambda$ sich ergebende Gleichung zu erwähnen:

$$C_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{c=0}^{c=\lambda} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} C_{\omega-c}^{(0)}(z), \tag{36}$$

vermöge welcher die Functionen C mit dem Exponenten λ einfach auf solche mit dem Exponenten 0 zurückgeführt werden können.

Setzt man endlich in (35) $\lambda + h$ statt λ, so nimmt die Relation eine Gestalt an, in der wir sie für den in der Folge besonders wichtigen Fall $h = 1$ hier anschreiben wollen; es wird nämlich:

$$C_\omega^{(\lambda+1)}(z) = z\, C_\omega^{(\lambda)}(z) - C_{\omega-1}^{(\lambda)}(z). \tag{37}$$

Was die willkührliche Function χ betrifft, die in den Ausdruck (26) der symmetrischen Function $C_\omega^{(\lambda)}(z)$ eingeht, so werden sich zwei specielle Annahmen derselben in der Folge als besonders lohnend herausstellen. Die eine Annahme ist:

$$\chi(z) = \frac{1}{f^{(1)}(z)},$$

die andere:

$$\chi(z) = 1.$$

Wählt man für χ diese beiden Ausdrücke, so erhält man aus (26)

zwei Functionen, die wir zur Unterscheidung von der allgemeinen Function C mit A und B bezeichnen wollen, sodass:

$$(38)\qquad A_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{z_a^\lambda}{(z-z_a)^{\omega+1}\, f^{(1)}(z_a)},$$

$$(39)\qquad B_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{z_a^\lambda}{(z-z_a)^{\omega+1}}.$$

Bei der Function A muss selbstredend der Fall vielfacher Wurzeln ausgeschlossen werden, indem sonst einige Glieder der Summe wegen des Verschwindens der Derivirten von f unendlich werden; bei der Function B bleibe dieser Fall stets zugelassen. Im Uebrigen zeigen die Eigenschaften dieser beiden Functionen eine so durchgreifende Analogie, dass es sich meist empfehlen wird, sie gleichzeitig zu untersuchen.

In der That geht auch die Function A in die Function B über, wenn man $f(z)$ ersetzt durch $\frac{f(z)}{f^{(1)}(z)}$. Die Gleichung $\frac{f(z)}{f^{(1)}(z)} = 0$ hat nämlich nach § 1. mit der Gleichung $f(z) = 0$ sämmtliche endlichen Wurzeln gemein, und besitzt eine jede derselben nur einfach; es ist demnach gestattet, für die erstere Gleichung die Function $A_\omega^{(\lambda)}(z)$ zu bilden, wobei man nur statt $\frac{1}{\partial_z f(z)}$ zu nehmen hat:

$$\frac{1}{\partial_z \dfrac{f(z)}{f^{(1)}(z)}} = \frac{f^{(1)}(z)^2}{f^{(1)}(z)^2 - f(z)\, f^{(2)}(z)}.$$

Da dieser Ausdruck, wie leicht nachzuweisen, für $z = z_1$ den Werth p annimmt, wenn z_1 eine $p$fache Wurzel ist, so geht die über sämmtliche endliche Wurzeln der Gleichung $\frac{f(z)}{f^{(1)}(z)} = 0$, d. h. über die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ ausgedehnte Summe (38) über in die auf sämmtliche endliche Wurzeln dieser Gleichung überhaupt erstreckte Summe (39).

Verstehen wir jetzt unter $f(z)$ eine nicht allein rationale, sondern auch ganze Function, etwa:

$$(40)\qquad f(z) = \gamma_0 z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \gamma_2 z^{n-2} + \ldots + \gamma_{n-1} z + \gamma_n =$$
$$= \gamma_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

so kann man bekanntlich jede symmetrische Function der sämmtlichen hier als endlich vorausgesetzten Wurzeln, folglich auch die oben eingeführten Functionen A und B durch die Coefficienten dieser Gleichung oder die Derivirten des Polynoms $f(z)$ für $z = 0$ ausdrücken. Es ist unsre nächste Aufgabe, diese Ausdrücke zu bilden. Um dieselben methodisch abzuleiten, stünden zwei Wege zu Gebote. Von den Definitionen (38) und (39) ausgehend, könnte man nämlich einerseits Re-

cursionen (etwa die Gleichungen (47) und (48) des nachfolgenden Paragraphen) gewinnen, dadurch die gesuchten Ausdrücke als die Coefficienten einer *recurrenten* Reihe erkennen, und letztere summiren. Andererseits könnte man auch die symmetrischen Functionen in homogene (ganze rationale) Theile zergliedern, und die letzteren nach den Methoden von Waring, Gauss, Cauchy bestimmen, oder noch besser so, wie Borchardt und Betti angeben*), die erzeugenden Functionen derselben aufsuchen.

Wegen der Umständlichkeit dieser Herleitungen begnüge ich mich indessen, die Resultate einfach anzugeben und zu verificiren.

§ 8.

Herleitung verwandter Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus einer erzeugenden Function.

Wir definiren jetzt auf's Neue zwei Functionen von z durch folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = \left[\frac{(z-\varepsilon)^\lambda}{f(z-\varepsilon)}\right]_{\varepsilon^\omega}, \tag{41}$$

$$\mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}(z) = \left[\frac{(z-\varepsilon)^\lambda f^{(1)}(z-\varepsilon)}{f(z-\varepsilon)}\right]_{\varepsilon^\omega}, \tag{42}$$

wobei (nach Jacobi) das Symbol $[\Phi(\varepsilon)]_{\varepsilon^\omega}$ nichts Anderes, als den Coefficienten von ε^ω in der für hinreichend kleine ε zulässig vorausgesetzten Entwickelung der eingeklammerten Function $\Phi(\varepsilon)$ nach steigenden Potenzen von ε vorstellen soll, so dass also diese in der Parenthese stehende Function nach Laplace die erzeugende Function (fonction génératrice) des dergestalt definirten Entwickelungscoefficienten zu nennen wäre. Die beiden obigen Gleichungen sind — mit anderen Worten — äquivalent mit den nachstehenden:

$$\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = \frac{1}{\omega!} \lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^\omega \frac{(z-\varepsilon)^\lambda}{f(z-\varepsilon)}, \tag{43}$$

$$\mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}(z) = \frac{1}{\omega!} \lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^\omega \frac{(z-\varepsilon)^\lambda f^{(1)}(z-\varepsilon)}{f(z-\varepsilon)}, \tag{44}$$

und wenn anders die Definitionen einen Sinn besitzen sollen, müssen für hinreichend kleine ε die Taylor'schen Reihen convergiren:

$$\frac{(z-\varepsilon)^\lambda}{f(z-\varepsilon)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \mathfrak{A}_\alpha^{(\lambda)}(z) \cdot \varepsilon^\alpha, \tag{45}$$

$$\frac{(z-\varepsilon)^\lambda f^{(1)}(z-\varepsilon)}{f(z-\varepsilon)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \mathfrak{B}_\alpha^{(\lambda)}(z) \cdot \varepsilon^\alpha. \tag{46}$$

---

*) Crelle's Journal, Bd. 53, p. 193 und Bd. 54, p. 98 sq.

In der That sieht man leicht, dass diese Entwickelungen für hinreichend kleine ε stets zulässig sind, wenn nur z nicht gerade gleich einer Wurzel z_1 der Gleichung $f(z) = 0$ ist.

Wir wollen uns nun in diesem Paragraphen mit der recurrenten sowie der independenten Darstellung der Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ mittelst der Function $f(z)$ und ihrer Derivirten beschäftigen. Dabei mögen Kürze halber wieder alle Argumente z weggelassen und die Derivirten von $f(z)$ wie in § 4. bezeichnet werden.

Multipliciren wir die Gleichungen (45) und (46) mit der stets zulässigen Entwickelung der ganzen rationalen Function $f(z-\varepsilon)$ nach steigenden Potenzen von ε und ordnen beiderseits nach Potenzen dieser Grösse an, so ergeben sich durch Gleichsetzung der Coefficienten von $(-\varepsilon)^\omega$ rechter und linker Hand die Formeln:

$$(47) \qquad (\lambda)_\omega \, z^{\lambda-\omega} = \sum_{a=0}^{a=\omega} \frac{(-1)^a f_{\omega-a}}{(\omega-a)!} \mathfrak{A}_a^{(\lambda)},$$

$$(48) \qquad \sum_{a=0}^{a=\omega} \frac{(\lambda)_a \, z^{\lambda-a} f_{\omega-a+1}}{(\omega-a)!} = \sum_{a=0}^{a=\omega} \frac{(-1)^a f_{\omega-a}}{(\omega-a)!} \mathfrak{B}_a^{(\lambda)},$$

mittelst welcher die gesuchten Functionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ recurrirend berechnet werden können.

Ehe hierzu geschritten wird, mögen noch independente Darstellungen der Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ angegeben werden. Solche erhält man leicht in Determinantenform, wenn man das System der Gleichungen hinschreibt, welche sich durch die Annahme $\omega = 0, 1, 2, 3, \ldots$ aus (47) oder (48) ergeben, und wenn man dieses System nach der Unbekannten $(-1)^\omega \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}$ oder $(-1)^\omega \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}$ auflöst.

Die Determinante des Systems erhält dabei den Werth $f^{\omega+1}$, indem sie gleich dem Product der Elemente ihrer Diagonalreihe wird, weil alle darüber stehenden Elemente 0 sind. Schreibt man diesen Nenner als Factor auf die andere Seite, so folgen die nachstehenden Formeln

$$(49) \quad f^{\omega+1} \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)} = \left\| (\lambda)_c \, z^{\lambda-c}, \; \frac{f_c}{c!}, \; \frac{f_{c-1}}{(c-1)!}, \ldots \frac{f_1}{1!}, \; f, \; 0, \; 0, \ldots 0 \right\|,$$

$$(50) \quad f^{\omega+1} \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)} = \left\| \sum_{a=0}^{a=c} \frac{(\lambda)_a \, z^{\lambda-a} f_{c-a+1}}{(c-a)!}, \; \frac{f_c}{c!}, \; \frac{f_{c-1}}{(c-1)!}, \ldots \frac{f_1}{1!}, \; f, \; 0, \; 0, \cdots 0 \right\|.$$

Von jeder Determinante, welche von der $\omega + 1^{\text{ten}}$ Ordnung ist, habe ich hier nur die $c + 1^{\text{te}}$ Zeile angeschrieben; alle Zeilen gehen daraus hervor, indem man $c = 0, 1, 2, \ldots \omega$ setzt, wobei selbstverständlich von den nebeneinander geschriebenen Elementen je nur die $\omega + 1$ ersten zu nehmen sind.

Für den besonders wichtigen Fall $\lambda = 0$ vereinfacht sich in der zweiten Gleichung das erste Element der angeschriebenen Zeile zu: $\frac{f_{c+1}}{c!}$; in der ersten Gleichung jedoch lässt sich sogar die Ordnung der

Determinante um 1 erniedrigen, indem das Anfangselement = 1 alle übrigen Elemente der ersten Colonne aber 0 werden, und in der so vereinfachten Determinante könnte man durch Multiplication der Zeilen nach der Reihe mit 1, f, f^2, f^3, ... f^ω und Division der Colonnen durch dieselben Grössen auch bewirken, dass an Stelle der Elemente f oberhalb der unverändert bleibenden Diagonalreihe jedesmal die Einheit tritt, während irgend ein andres Element $\frac{f_c}{c!}$ in $\frac{f^{c-1} f_c}{c!}$ überginge.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass sich die Functionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit dem Exponenten λ stets leicht durch diejenigen für $\lambda = 0$ ausdrücken lassen. Zu diesem Nachweis eignen sich am besten die bereits angegebenen Darstellungen (43) und (44) der genannten Functionen durch Differentialquotienten. Nach dem Leibnitz'schen Satze für die wiederholte Differentiation eines Productes folgt nämlich aus denselben:

$$\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)} = \frac{1}{\omega!} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{a=0}^{a=\omega} (\omega)_a \, \partial_\varepsilon^a \, (z-\varepsilon)^\lambda \times \partial_\varepsilon^{\omega-a} \frac{1}{f(z-\varepsilon)},$$

$$\mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)} = \frac{1}{\omega!} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{a=0}^{a=\omega} (\omega)_a \, \partial_\varepsilon^a \, (z-\varepsilon)^\lambda \times \partial_\varepsilon^{\omega-a} \frac{f^{(1)}(z-\varepsilon)}{f(z-\varepsilon)}.$$

Weil aber nach dem Binomialtheorem:

$$\lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^a \, (z-\varepsilon)^\lambda = (-1)^a \, a! \, (\lambda)_a \, z^{\lambda-a}$$

ist, so folgt hieraus unter Berücksichtigung jener für $\lambda = 0$ in Anspruch genommenen Gleichungen (43) und (44):

$$\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)} = \sum_{a=0}^{a=\omega} (-1)^a \, (\lambda)_a \, z^{\lambda-a} \, \mathfrak{A}_{\omega-a}^{(0)}, \tag{51}$$

$$\mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)} = \sum_{a=0}^{a=\omega} (-1)^a \, (\lambda)_a \, z^{\lambda-a} \, \mathfrak{B}_{\omega-a}^{(0)}, \tag{52}$$

wie gefunden werden sollte.

Die Functionen $\mathfrak{B}^{(0)}$ lassen sich aber ebenfalls bequem durch die $\mathfrak{A}^{(0)}$ ausdrücken. Man hat nämlich in ähnlicher Weise:

$$\mathfrak{B}_\omega^{(0)} = \frac{1}{\omega!} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{a=0}^{a=\omega} (\omega)_a \, \partial_\varepsilon^a \, f^{(1)}(z-\varepsilon) \times \partial_\varepsilon^{\omega-a} \frac{1}{f(z-\varepsilon)},$$

also, wegen:

$$\lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^a \, f^{(1)}(z-\varepsilon) = (-1)^a f_{a+1}$$

wieder:

$$\mathfrak{B}_\omega^{(0)} = \sum_{a=0}^{a=\omega} \frac{(-1)^a f_{a+1}}{a!} \, \mathfrak{A}_{\omega-a}^{(0)}, \tag{53}$$

Ebenso könnte man noch allgemeiner die Formel aufstellen:

$$\mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)} = \sum_{c=0}^{c=\omega} (-1)^c \, \mathfrak{A}_{\omega-c}^{(0)} \sum_{a=0}^{a=c} \frac{(\lambda)_a \, z^{\lambda-a} f_{c-a+1}}{(c-a)!}, \tag{54}$$

welche in einer Vereinigung von (52) und (53) besteht.

Es brauchen demnach nur die Functionen $\mathfrak{A}^{(0)}$ wirklich recurrirend berechnet zu werden, da alsdann die Functionen $\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ mittelst der Gleichungen (51) und (54) leicht zu bilden sind.

Um diese Berechnung wirklich auszuführen, nehmen wir die Recursionsformel (47) für $\lambda = 0$ in Anspruch, wobei die linke Seite der Gleichung für $\omega > 0$ verschwindet, während sie für $\omega = 0$ den Werth 1 annimmt; die Gleichung zerfällt daher in zwei andere, welchen zur Vermeidung von Nennern die Gestalt zu geben ist:

$$(55)\qquad \begin{cases} f\mathfrak{A}_0^{(0)} = 1, \\ f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(0)} = \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=\omega} \dfrac{(-1)^{\alpha-1} f^{\alpha-1} f_\alpha}{\alpha!} \cdot f^{\omega-\alpha+1}\mathfrak{A}_{\omega-\alpha}^{(0)}, \quad \text{für } \omega > 0, \end{cases}$$

in der sie nun für die Anwendung am bequemsten zurechtgelegt erscheinen.

Man wird sich jetzt eine Tabelle der Functionen $f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(0)}$ in folgender Weise anlegen.

Zuerst bildet man (für das Argument z) die Werthe von:

$$f,\ f_1,\ f_2,\ f_3, \dots$$

welche zu der Kenntniss von:

$$f_1,\ -\tfrac{1}{2}ff_2,\ \tfrac{1}{6}f^2f_3,\ -\tfrac{1}{24}f^3f_4, \dots$$

verhelfen. Hierauf verfährt man — stets horizontal ausmultiplicirend, dann vertical addirend — nach folgendem Schema, welches keiner weiteren Erklärung bedürftig ist:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{array}{rl}
f\mathfrak{A}_0^{(0)} = 1 & \times f_1 \\
\hline
f^2\mathfrak{A}_1^{(0)} = f_1 & \times f_1 \\
1 & \times -\tfrac{1}{2}ff_2 \\
\hline
f^3\mathfrak{A}_2^{(0)} = f_1^2 - \tfrac{1}{2}ff_2 & \times f_1 \\
f_1 & \times -\tfrac{1}{2}ff_2 \\
1 & \times \tfrac{1}{6}f^2f_3 \\
\hline
f^4\mathfrak{A}_3^{(0)} = f_1^3 - ff_1f_2 + \tfrac{1}{6}f^2f_3 & \times f_1 \\
f_1^2 - \tfrac{1}{2}ff_2 & \times -\tfrac{1}{2}ff_2 \\
f_1 & \times \tfrac{1}{6}f^2f_3 \\
1 & \times -\tfrac{1}{24}f^3f_4 \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{f^5\mathfrak{A}_4^{(0)} = f_1^4 - \tfrac{3}{2}ff_1^2f_2 + \tfrac{1}{3}f^2f_1f_3 + \tfrac{1}{4}f^2f_2^2 - \tfrac{1}{24}f^3f_4}
\end{array}$$

u. s. w.

Um ebenso die Functionen $\mathfrak{B}_\omega^{(0)}$ zu berechnen, bringen wir die Relation (53) ähnlich wie oben auf die bequemere Form:

$$(56)\qquad f^{\omega+1}\mathfrak{B}_\omega^{(0)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\omega} \frac{(-1)^\alpha f^\alpha f_{\alpha+1}}{\alpha!} \cdot f^{\omega-\alpha+1}\mathfrak{A}_{\omega-\alpha}^{(0)}.$$

Darnach haben wir also die eben gefundenen Ausdrücke der Functionen $f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(0)}$ nur mit den Multiplicatoren:

$$f_1, \quad -ff_2, \quad \tfrac{1}{2}f^2f_3, \quad -\tfrac{1}{6}f^3f_4, \ldots$$

auf passende Art zu verbinden, und erhalten:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} f\mathfrak{B}_0^{(0)} &= f_1, \\ f^2\mathfrak{B}_1^{(0)} &= f_1^2 - ff_2, \\ f^3\mathfrak{B}_2^{(0)} &= f_1^3 - \tfrac{3}{2}ff_1f_2 + \tfrac{1}{2}f^2f_3, \\ f^4\mathfrak{B}_3^{(0)} &= f_1^4 - 2ff_1^2f_2 + \tfrac{2}{3}f^2f_1f_3 + \tfrac{1}{2}f^2f_2^2 - \tfrac{1}{6}f^3f_4 \end{aligned}$$

u. s. w.

Ausser den bereits angeführten independenten Darstellungen der Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in Determinantenform lassen sich auch noch folgende Ausdrücke ableiten, die ich mich aber begnügen will, hier nur kurz zu erwähnen. Es ist:

$$(57) \qquad f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(0)} = S\frac{(-1)^a(\omega-a)!}{a_1!\,a_2!\ldots a_\omega!}\left(\frac{f}{0!}\right)^a\left(\frac{f_1}{1!}\right)^{a_1}\left(\frac{f_2}{2!}\right)^{a_2}\cdots\left(\frac{f_\omega}{\omega!}\right)^{a_\omega},$$

wo die Summe S ausgedehnt werden muss über alle positiven ganzen Wurzeln — die 0 mit zugelassen — der beiden coexistirenden Gleichungen:

$$(58) \qquad \begin{cases} a + a_1 + a_2 + \ldots + a_\omega = \omega, \\ 0\,.\,a + 1\,.\,a_1 + 2\,.\,a_2 + \ldots + \omega\,.\,a_\omega = \omega\,. \end{cases}$$

Multiplicirt man das allgemeine Glied obiger Summe (57) mit $\frac{\omega}{\omega - a}$, so stellt dieselbe den Werth von $f^\omega\,\mathfrak{B}_{\omega-1}^{(0)}$ vor, also:

$$(59) \qquad f^\omega\,\mathfrak{B}_{\omega-1}^{(0)} = \omega\,S\frac{(-1)^a(\omega-a-1)!}{a_1!\,a_2!\ldots a_\omega!}\left(\frac{f}{0!}\right)^a\left(\frac{f_1}{1!}\right)^{a_1}\left(\frac{f_2}{2!}\right)^{a_2}\cdots\left(\frac{f_\omega}{\omega!}\right)^{a_\omega}.$$

Es gelten auch die Gleichungen:

$$(60) \qquad \begin{cases} f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(0)} = \sum\limits_{a=0}^{a=\omega}\dfrac{(-1)^a f^a}{a!}\lim\limits_{\varepsilon=0}\partial_\varepsilon^{\omega-a}\left\{\dfrac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}\right\}^a, \\ f^\omega\,\mathfrak{B}_{\omega-1}^{(0)} = \omega\sum\limits_{a=0}^{a=\omega}\dfrac{(-1)^a f^a}{a!\,(\omega-a)}\lim\limits_{\varepsilon=0}\partial_\varepsilon^{\omega-a}\left\{\dfrac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}\right\}^a. \end{cases}$$

§ 9.

Zusammenhang zwischen den Functionen A und $\mathfrak{A}$.

Ich gehe jetzt dazu über nachzuweisen, dass die Functionen $A_\omega^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}$ der beiden vorigen Paragraphen für jedes Argument z einander gleich sind, wenn nur die Zahlen ω und λ eine gewisse Ungleichheitsbedingung erfüllen.

Bekanntlich hat man, wenn die Gleichung $f(z) = 0$ keine vielfachen Wurzeln besitzt, die Partialbruchzerlegung:

$$(61)\qquad \frac{1}{f(z)} = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{1}{(z-z_a)\,f^{(1)}(z_a)}\,.$$

Setzt man hierin $z-\varepsilon$ für z, so lässt sich das allgemeine Glied der Summe rechts für hinreichend kleine ε in eine Mac-Laurin'sche Reihe nach steigenden Potenzen dieser Grösse entwickeln, falls nur z nicht gerade einer Wurzel z_a gleich ist. Um links die erzeugende Function der $\mathfrak{A}$ zu bilden, multiplicire man hierauf die Gleichung mit der Entwicklung von $(z-\varepsilon)^\lambda$ in eine (unendliche) Reihe nach dem binomischen Satze, und ordne rechts nach Potenzen von ε an. Wird das Ergebniss alsdann mit Gleichung (45) verglichen, so folgt durch Gleichsetzung der Coefficienten von ε^ω:

$$(62)\qquad \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{1}{(z-z_a)^{\omega+1} f^{(1)}(z_a)} \sum_{c=0}^{c=\omega} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} (z-z_a)^c,$$

womit die Function $\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}$ ähnlich $A_\omega^{(\lambda)}$ als eine symmetrische Function der Wurzeln z_a der Gleichung $f(z)=0$ dargestellt ist.

Wenn nun zuerst $\omega \geqq \lambda$ ist, so darf man offenbar in der letzten Summe rechter Hand anstatt der oberen Grenze ω auch λ schreiben, weil alsdann der Binomialcoefficient $(\lambda)_c$ für alle zwischen λ (exclus.) und ω (inclus.) liegenden Werthe von c verschwindet. Dann ist aber diese Summe nach dem Binomialtheorem $=\{z-(z-z_a)\}^\lambda = z_a^\lambda$, folglich wird mit Rücksicht auf die Definition (38) der Function A:

$$\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = A_\omega^{(\lambda)}(z)\,, \qquad \text{für } \omega \geqq \lambda\,,$$

was wir zunächst zu beweisen suchten.

Aber auch für $\omega < \lambda$ findet diese Beziehung noch statt, falls nur $\lambda < \omega + n$ ist. Für $\omega < \lambda$ können wir nämlich in dem Ausdrucke (62) von $\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}$ die Summe:

$$\sum_{c=0}^{c=\omega}$$

zerlegen in:

$$\sum_{c=0}^{c=\lambda} - \sum_{c=\omega+1}^{c=\lambda},$$

und liefert die Summe aller von dem ersten Theil dieser Zerlegung herrührenden Terme wie vorhin die Function $A_\omega^{(\lambda)}$, sodass:

$$A_\omega^{(\lambda)}(z) - \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{c=\omega+1}^{c=\lambda} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} \sum_{a=1}^{a=n} \frac{(z-z_a)^{c-\omega-1}}{f^{(1)}(z_a)}\,.$$

Bekanntlich ist aber:

$$\sum_{a=1}^{a=n} \frac{\chi(z_a)}{f^{(1)}(z_a)} = 0\,,$$

wenn $\chi(z_a)$ eine ganze rationale Function von z_a vorstellt, deren Grad $n-2$ nicht übersteigt. Als eine solche Function χ lässt sich aber

in der obigen Doppelsumme der Zähler $(z - z_a)^{c-\omega-1}$ betrachten, wenn für jeden dort in Anspruch genommenen Werth von c:

$$0 \overline{\gtrless} c - \omega - 1 \leqq n - 2$$

ist. Da der erste Theil dieser Ungleichung von selbst erfüllt und λ der grösste Werth ist, den c annimmt, so bleibt für das vollständige Verschwinden der ganzen Doppelsumme nur noch die Bedingung $\lambda - \omega \leqq n - 1$, oder $\lambda - \omega < n$ übrig.

Unter der Voraussetzung, dass entweder $\omega \geqq \lambda$, oder $\omega < \lambda < \omega + n$, stimmen also die beiden Functionen $\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}$ und $A_\omega^{(\lambda)}$ vollständig überein, und da diese beiden Bedingungen auf eine einzige hinauslaufen, haben wir den Satz:

$$A_\omega^{(\lambda)}(z) = \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z), \qquad \text{für } \lambda - \omega < n. \tag{63}$$

Wenn die beigeschriebene Bedingung nicht erfüllt ist, so tritt an Stelle dieses Theorems der obige Ausdruck für den Unterschied der beiden Functionen, welcher indess noch die folgende Vereinfachung zulässt:

$$A_\omega^{(\lambda)}(z) - \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{c=\omega+n}^{c=\lambda} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} \sum_{a=1}^{a=n} \frac{(z - z_a)^{c-\omega-1}}{f^{(1)}(z_a)}, \tag{64}$$

$$\text{für } \lambda - \omega \overline{\gtrless} n,$$

indem alle Glieder der früheren Doppelsumme, bei welchen c zwischen $\omega + 1$ (inclus.) und $\omega + n$ (exclus.) liegt, aus dem schon erwähnten Grunde verschwinden.

Es wäre eine nicht uninteressante Aufgabe, auch die letztere symmetrische Function der Wurzeln noch durch die Coefficienten der Gleichung $f(z) = 0$ auszudrücken, wie dies im vorhergehenden Falle mit Rücksicht auf § 8. für die symmetrische Function $A_\omega^{(\lambda)}(z)$ nun erledigt ist.

§ 10.

Zusammenhang zwischen den Functionen B und $\mathfrak{B}$.

Leichter noch als bei den Functionen A und $\mathfrak{A}$ ist die Identität bei den Functionen B und $\mathfrak{B}$ zu erkennen unter der Bedingung, unter welcher sie stattfindet.

Zu dem Ende suchen wir wieder die erzeugende Function (der $\mathfrak{B}$) zu entwickeln in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ε, deren Coefficienten ausgedrückt seien durch die Wurzeln und nicht durch die Coefficienten der Gleichung $f(z) = 0$. Dazu verhilft abermals eine Partialbruchzerlegung. Es ist nämlich:

$$\frac{f^{(1)}(z)}{f(z)} = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{1}{z - z_a}, \tag{65}$$

einerlei, ob die Gleichung $f(z) = 0$ vielfache Wurzeln habe, oder nicht.

Wird hierin $z - \varepsilon$ für z gesetzt, hierauf rechts nach steigenden Potenzen von ε entwickelt und die Gleichnng mit der Binomialentwicklung von $(z - \varepsilon)^\lambda$ multiplicirt, so ergiebt sich durch Coefficientenvergleichung mit (46) wie oben:

$$(66) \qquad \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{1}{(z-z_a)^{\omega+1}} \sum_{c=0}^{c=\omega} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} (z-z_a)^c \cdot$$

Ist nun $\omega \geqq \lambda$, so wird die letzte Summe $= z_a^\lambda$, indem sich λ statt ω als ihre obere Grenze schreiben lässt, und es wird also:

$$(67) \qquad B_\omega^{(\lambda)}(z) = \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}(z), \qquad \text{für } \lambda - \omega \leqq 0,$$

wie zunächst gezeigt werden sollte. Ist aber $\omega < \lambda$, so kann man in der vorausgehenden Gleichung die Zerlegung vornehmen:

$$\sum_{c=0}^{c=\omega} = \sum_{c=0}^{c=\lambda} - \sum_{c=\omega+1}^{c=\lambda};$$

und erweist sich die Summe aller vom ersten Theile herrührenden Glieder einerlei mit $B_\omega^{(\lambda)}(z)$, sodass man hat:

$$(68) \qquad B_\omega^{(\lambda)}(z) - \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{c=\omega+1}^{c=\lambda} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} \sum_{a=1}^{a=n} (z - z_a)^{c-\omega-1},$$
$$\text{für } \lambda - \omega > 0,$$

eine Doppelsumme, die im Allgemeinen von 0 verschieden ist, und leicht, statt durch die Wurzeln, durch die Coefficienten der Gleichung $f(z) = 0$ ausgedrückt werden könnte.

Die symmetrischen Functionen A und B, welche wir in § 7. als die bemerkenswerthesten Fälle der allgemeineren Function C hervorhoben und zum Gegenstand des Studiums machten, sind nun also durch die Coefficienten der Gleichung $f(z) = 0$ ausgedrückt, nämlich in Gestalt einfach gebauter Determinanten dargestellt, als deren Elemente das Polynom $f(z)$ und dessen Derivirte auftreten — allerdings nur unter der Voraussetzung, dass ω und λ den angegebenen Ungleichungen genügen, was beiläufig gesagt für $\omega = \infty$ stets der Fall ist. Unter jener Beschränkung also darf überall A für $\mathfrak{A}$ und B für $\mathfrak{B}$ geschrieben werden, [wie es auch von früher her gestattet ist, in allen Formeln des § 7., A oder B für C zu schreiben]. Noch verdient hervorgehoben zu werden, dass mehrere der für $\mathfrak{A}$ und A (wie für $\mathfrak{B}$ und B) nun auf 2 Wegen gewonnenen Relationen, z. B. die Relationen (36) des § 7. und (51), (52) des § 8. bei sonstiger Uebereinstimmung im Bau der Ausdrücke sich doch durch die obere Grenze am Summenzeichen unterscheiden, welche einmal λ, das andere Mal ω ist; selbstverständlich kann man von diesen beiden Zahlen eine jede, z. B. die kleinere, wählen, da die Glieder, um welche die eine Summe von der andern übertroffen wird, sich sämmtlich wegheben, sofern überhaupt die lateinischen Functionen mit den gothischen übereinstimmen.

§ 11.

Hieraus sich ergebende Auflösungsmethoden der zweiten Art.

Ich gehe jetzt zur Betrachtung der Auflösungsmethoden selbst über, welche sich für die höheren Gleichungen aus den Untersuchungen der §§ 7. bis 10. deduciren lassen, und deren wir, wie schon in § 1. hervorgehoben wurde, zwei Arten zu unterscheiden haben.

Eine Auflösungsmethode von der zweiten in § 1. charakterisirten Art fliesst zunächst aus dem Theorem (II) des § 7. Jenes Theorem sagt aus, dass, wenn:

$$F(z) = \frac{A_\omega^{(\lambda+h)}(z)}{A_\omega^{(\lambda)}(z)} \quad \text{oder aber} \quad F(z) = \frac{B_\omega^{(\lambda+h)}(z)}{B_\omega^{(\lambda)}(z)}$$

gesetzt wird, stets:

$$\lim_{\omega=\infty} . F(z) = z_1{}^h$$

sein muss, falls z_1 eine Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ ist, welche dem willkührlich angenommenen Punkt z näher liegt als irgend eine andere der Wurzeln. Da in § 8. die Mittel angegeben sind, die Functionen A und B recurrirend für immer grössere ω zu berechnen, sowie auch, aus dem Polynom $f(z)$ und den Zahlen z, λ, h, ω sie independent zu bilden, so lässt sich in der That auf diesem Wege die h^{te} Potenz der Wurzel z_1 (oder wenn man will, unter der Annahme $h = 1$, diese Wurzel selbst) so genau man wünschen mag, ermitteln; und zwar ist diese Methode — eine doppelte, je nachdem man die Functionen A oder B wählt — wegen der Willkührlichkeit der genannten Zahlen unendlich vielfacher Anwendung fähig.

Als ganz speciellen Fall, nämlich wenn bei der Function A die Zahl $\lambda = 0$ und $h = 1$ gesetzt und der willkührliche Anfangswerth z gleich 0 oder gleich ∞ genommen wird, begreift die gegenwärtige Methode ein unlängst von Fürstenau*) veröffentlichtes und von ihm aus ganz andern Gesichtspunkten gewonnenes Auflösungsverfahren unter sich. Ebenso bildet dieselbe einerseits eine Erweiterung, andrerseits eine Specialisirung der Daniel Bernoulli'schen Methode.

Was den Anfangswerth z betrifft, so darf dieser, wenn man überhaupt nur eine — und nicht eine bestimmte — Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ nach den angegebenen Methoden finden will, in der ganzen Zahlenebene beliebig gewählt werden mit Ausnahme einer gewissen Linie, der *Ausnahmelinie*, welche aus lauter stetig unter einander verbundenen Strecken, Strahlen und Geraden besteht. Wird mit m die Anzahl der von einander verschiedenen Wurzeln bezeichnet, welche

---

*) Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten, Marburg 1860.

natürlich bei Anwendung der Functionen A gleich n gedacht werden muss, da vielfache Wurzeln dann ausgeschlossen bleiben, so zerlegt die Ausnahmelinie die ganze Ebene in m verschiedene Gebiete, deren jedes nur eine einzige einfache oder vielfache Wurzel in sich enthält. Jedes dieser Gebiete ist so beschaffen, dass für alle innerhalb desselben angenommenen Punkte z unsre Auflösungsmethode eben die eine innerhalb desselben liegende Wurzel liefert; es kann daher das zu der Wurzel gehörige *Convergenzgebiet* der Auflösungsmethode genannt werden. Die m verschiedenen Convergenzgebiete also grenzt die Ausnahmelinie von einander ab. Die Begrenzung jedes Convergenzgebietes ist eine polygonale, und zwar ein nach dem Unendlichen hin offenes Polygon, wenn die betreffende Wurzel, nachdem sämmtliche Wurzelpunkte durch gerade Linien mit einander verbunden sind, eine Ecke des umschliessenden Vielecks bildet; im andern Fall ist sie ein endliches geschlossenes Polygon. Die Seiten dieser Polygone gehen stets senkrecht durch die Mitte der Verbindungslinie zweier Wurzelpunkte hindurch, und die Ecken derselben, in welchen stets mindestens 3 Polygone aneinanderstossen, also die Ausnahmelinie sich verknotet, sind die Mittelpunkte derjenigen durch mindestens 3 Wurzelpunkte gelegten Kreise, welche keinen andern Wurzelpunkt einschliessen. Alles dieses folgt leicht aus der Forderung, dass der Punkt z, wenn er nicht ein Ausnahmepunkt sein soll, nur nicht etwa gerade von den zunächst liegenden Wurzelpunkten gleich weit abstehen darf. Es ist demnach keiner Schwierigkeit unterworfen, die Ausnahmelinie zu construiren, wenn die Wurzelpunkte gegeben sind:

Man construirt zuerst die $\frac{m(m-1)}{2}$ Geraden, welche senkrecht durch die Mitte der Verbindungslinie zweier Wurzelpunkte hindurchgehen und allein Ausnahmepunkte enthalten können, jedoch bei weitem nicht alle und in ihrer ganzen Erstreckung zur Ausnahmelinie gehören. Ein Punkt auf einer solchen Normalen, zu welcher zwei Wurzelpunkte symmetrisch liegen, ist nämlich nur so lange Ausnahmepunkt, als er keinem dritten Wurzelpunkt näher liegt, als jenen beiden. Diese Geraden schneiden sich zu drei und drei in $\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$ Punkten, den Mittelpunkten der durch je 3 Wurzelpunkte gelegten Kreise. Von den genannten Mittelpunkten sind nun alle diejenigen auszuscheiden, deren zugehöriger Kreis noch Wurzelpunkte einschliesst; die übrigen Mittelpunkte sind längs der $\frac{m(m-1)}{2}$ Geraden mit einander zu verbinden; endlich sind von den äussersten dieser Mittelpunkte aus senkrecht zu den Seiten des umschliessenden Vielecks der Wurzelpunkte (also ebenfalls längs der gedachten Geraden) noch Strahlen nach dem Unendlichen hin zu ziehen. Die erwähnten Verbindungslinien und Strahlen bilden die Ausnahmelinie.

Sind die Wurzelpunkte nicht gegeben, so bleibt auch die Ausnahmelinie unbekannt; nimmt man aber in diesem Falle den Anfangswerth z auf's Geradewohl an, so ist die Wahrscheinlichkeit auf einen Ausnahmepunkt zu verfallen gleich 0. Hat allerdings die Gleichung $f(z) = 0$ lauter reelle Coefficienten, also conjugirt imaginäre Wurzeln, so darf man selbstverständlich z nicht etwa auf der Linie der reellen Zahlen wählen, wenn man eine der complexen Wurzeln finden will; in der That ist in diesem Falle a priori ersichtlich, dass man durch fortgesetzte rationale Verbindung von lauter reellen Zahlen unter sich niemals zu einem imaginären Ergebniss gelangen könnte.

Nimmt man für z einen Punkt auf der Ausnahmelinie, so nähert sich $F(z)$ bei wachsendem ω im Allgemeinen keiner bestimmten Grenze, obwohl es endlich bleibt.

§ 12.

Hieraus hervorgehende Algorithmen.

Auflösungsmethoden von der ersten in § 1. charakterisirten Art, nämlich Algorithmen, gehen aus den Theoremen (I) und (III) des § 7. hervor, wenn man dort $h = 1$ annimmt.

Setzt man nämlich:

$$(69) \qquad F(z) = \frac{A_\omega^{(\lambda+1)}(z)}{A_\omega^{(\lambda)}(z)}, \quad \text{oder aber } F(z) = \frac{B_\omega^{(\lambda+1)}(z)}{B_\omega^{(\lambda)}(z)},$$

so wurde dort gezeigt, dass die Function F die Eigenschaft besitzt, dass erstens $F(z_1) = z_1$ und zweitens die Derivirten:

$$\partial_z F(z), \quad \partial_z^2 F(z), \ldots . \; \partial_z^\omega F(z)$$

für $z = z_1$ gleich 0 werden. Auf Grund dieser Eigenschaften muss also, wenn $\omega > 0$ ist, nach den Ergebnissen des § 2. die Gleichung:

$$z' = F(z)$$

einen *Algorithmus der* $\omega + 1^{\text{ten}}$ *Ordnung* vorstellen, durch welchen es möglich ist, aus einem beliebig, nur hinreichend nahe an z_1 gewählten Anfangswerthe z jede Wurzel z_1 der Gleichung $f(z) = 0$ so genau man will zu finden; und zwar in der Weise, dass der Modul jedes Näherungswerthes schliesslich stets auf $\omega + 1$ mal so viel Decimalstellen genau gefunden wird als auf wie viele genau der Modul des vorhergehenden Näherungswerthes bekannt war.

Wegen der Unbestimmtheit der natürlichen Zahlen ω und λ, sowie der Willkührlichkeit des Anfangswerthes z schliesst auch diese Methode unendlich viele Algorithmen in sich, und es verlohnt der Mühe, dieselben für die einfachsten Werthe von ω und λ wirklich anzuschreiben.

Jeden dieser Algorithmen will ich nach dem die Function F charakterisirenden Nenner in (69) mit (A^{λ}_{ω}) resp. (B^{λ}_{ω}) bezeichnen.

In Erinnerung werde noch gebracht, dass bei den Algorithmen (A^{λ}_{ω}) vielfache Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ ausgeschlossen sein müssen, wofern sie wirklich von $\omega + 1$facher Convergenz sein sollen; bei den Algorithmen (B^{λ}_{ω}) hingegen wird durch die Vielfachheit der Wurzeln kein Unterschied hinsichtlich des Grades der Convergenzgeschwindigkeit begründet.

Endlich muss bei den Functionen A, wofern sie wirklich durch die anzugebenden Ausdrücke darstellbar sein sollen, die Ungleichung $\lambda - \omega < n$, bei den Functionen B hingegen die Ungleichung $\lambda - \omega \gtreqless 0$ erfüllt sein.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (37) in dem Theorem (IV) des § 7. lassen sich unsre Algorithmen nun so darstellen:

$$\left.\begin{array}{ll} (A^{\lambda}_{\omega}) & z' = z - \dfrac{A^{(\lambda)}_{\omega-1}(z)}{A^{(\lambda)}_{\omega}(z)} = z - f \cdot \dfrac{f^{\omega} A^{(\lambda)}_{\omega-1}}{f^{\omega+1} A^{(\lambda)}_{\omega}} \\ (B^{\lambda}_{\omega}) & z' = z - \dfrac{B^{(\lambda)}_{\omega-1}(z)}{B^{(\lambda)}_{\omega}(z)} = z - f \cdot \dfrac{f^{\omega} B^{(\lambda)}_{\omega-1}}{f^{\omega+1} B^{(\lambda)}_{\omega}} \end{array}\right\} \text{für } \omega > 0,$$

worin das zweite Glied rechter Hand als die *Correction* aufgefasst werden kann, welche nach dem Algorithmus zu dem Anfangswerthe hinzugefügt werden muss, um den nächsten Näherungswerth zu bilden (und welche mit dem in § 2. erwähnten *Fehler* des Anfangs- oder Näherungswerthes nicht zu verwechseln ist).

In diese Gleichungen sind nun die Werthe der Functionen A und B einzusetzen, welche in (36) des § 7. und (51), (52) des § 8. zunächst durch die Functionen $A^{(0)}$ und $B^{(0)}$ ausgedrückt werden. Zu dem Ende schreiben wir mit Vermeidung der Brüche jene Relationen in folgender Gestalt an:

$$(70) \quad \left\{\begin{array}{l} f^{\omega+1} A^{(\lambda)}_{\omega} = \sum\limits_{\alpha=0}^{\lambda,\,\omega} (-1)^{\alpha} (\lambda)_{\alpha} z^{\lambda-\alpha} f^{\alpha} \,.\, f^{\omega-\alpha+1} A^{(0)}_{\omega-\alpha}, \\ f^{\omega+1} B^{(\lambda)}_{\omega} = \sum\limits_{\alpha=0}^{\lambda,\,\omega} (-1)^{\alpha} (\lambda)_{\alpha} z^{\lambda-\alpha} f^{\alpha} \,.\, f^{\omega-\alpha+1} B^{(0)}_{\omega-\alpha}, \end{array}\right.$$

worin von den beiden angegebenen oberen Summengrenzen λ, ω stets die kleinere gewählt werden darf. Demnach hat man nun für $\omega = 0$, $1, 2, \ldots$:

$$f\, A^{(\lambda)}_0 = z^{\lambda} \,.\, f\, A^{(0)}_0,$$

$$f^2 A^{(\lambda)}_1 = z^{\lambda} \,.\, f^2 A^{(0)}_1 - \lambda z^{\lambda-1} f \,.\, f\, A^{(0)}_0,$$

$$f^3 A^{(\lambda)}_2 = z^{\lambda} \,.\, f^3 A^{(0)}_2 - \lambda z^{\lambda-1} f \,.\, f^2 A^{(0)}_1 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} z^{\lambda-2} f^2 \,.\, f A^{(0)}_0,$$

u. s. w.,

und, da für $\lambda = 0$ nur eine Identität herauskommt, für $\lambda = 1, 2, \ldots$:

$$f^{\omega+1} A_\omega^{(1)} = z \cdot f^{\omega+1} A_\omega^{(0)} - f \cdot f^\omega A_{\omega-1}^{(0)},$$

$$f^{\omega+1} A_\omega^{(2)} = z^2 \cdot f^{\omega+1} A_\omega^{(0)} - 2\, z f \cdot f^\omega A_{\omega-1}^{(0)} + f^2 \cdot f^{\omega-1} A_{\omega-2}^{(0)},$$

u. s. w.; die entsprechenden Gleichungen für die Functionen B lauten ebenso; man erhält sie einfach, indem man hier B statt A schreibt.

Da wir $A_\omega^{(0)}$ resp. $B_\omega^{(0)}$ allgemein nicht in einfacher Weise auszurechnen vermögen, so erhalten wir nur aus den ersteren Gleichungen, in welchen λ willkührlich gelassen ist, durch Einsetzung der Functionen $A^{(0)}$ und $B^{(0)}$ aus (I) und (II) des § 8., einfache Formeln von allgemeinem Charakter und hinreichend leichter Berechenbarkeit, und zwar:

$$f\, A_0^{(\lambda)} = z^\lambda,$$

$$f^2 A_1^{(\lambda)} = z^\lambda f_1 - \lambda z^{\lambda-1} f,$$

$$f^3 A_2^{(\lambda)} = z^\lambda (f_1^2 - \tfrac{1}{2} f f_2) - \lambda\, z^{\lambda-1} f f_1 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} z^{\lambda-2} f^2,$$

u. s. w. ferner:

$$f\, B_0^{(\lambda)} = z^\lambda f_1,$$

$$f^2 B_1^{(\lambda)} = z^\lambda (f_1^2 - f f_2) - \lambda\, z^{\lambda-1} f f_1,$$

u. s. w., wonach es leicht wäre, eine Tabelle der Functionen $A_\omega^{(\lambda)}$ oder $B_\omega^{(\lambda)}$ mit doppeltem Eingange anzulegen.

Nun endlich können wir mit der grössten Bequemlichkeit zu der Aufstellung der einfachsten Algorithmen selbst schreiten.

Wollte man zuerst $\omega = 0$ annehmen, so würde sich, wenn hier nicht ein Degenerationsfall vorläge, als Algorithmus von linearer Convergenz ergeben:

(A_0^λ) desgl. (B_0^λ) $\qquad z' = z.$

Da hier die Correction gleich 0, der Fehler des Näherungswerthes also der ersten Potenz des Fehlers beim Anfangswerthe nicht allein proportional, sondern sogar gleich ist, so würde das Attribut „linear" wohl noch passen, allein die Benennung „Algorithmus" trifft nicht mehr zu, weil $\partial_z F(z)$ nicht < 1 sondern $= 1$ ist.

Für $\omega = 1$ erhalten wir den allgemeinsten Algorithmus zweiter Ordnung oder von quadratischer Convergenz, welcher überhaupt aus dieser Quelle fliessen kann, nämlich:

$$(A_1^\lambda) \qquad z' = z - \frac{z f}{z f_1 - \lambda f},$$

$$(B_1^\lambda) \qquad z' = z - \frac{z f f_1}{z(f_1^2 - f f_2) - \lambda f f_1},$$

und als einfachsten Fall für $\lambda = 0$ einerseits den Newton'schen Algorithmus:

$$(A_1^0) \qquad z' = z - \frac{f}{f_1},$$

andrerseits den ihm ebenbürtigen, meines Wissens noch nicht beachteten Algorithmus:

$$(B_1^0) \qquad z' = z - \frac{ff_1}{f_1^2 - ff_2},$$

welcher bei fast gleicher Einfachheit den Vorzug besitzt auch für vielfache Wurzeln noch quadratisch zu convergiren, und dessen wir schon in § 3. Erwähnung gethan haben.

Für $\omega = 2$ ergeben sich die allgemeinen Algorithmen dritter Ordnung oder von cubischer Convergenz, z. B.:

$$(A_2^\lambda) \qquad z' = z - zf \frac{zf_1 - \lambda f}{z^2(f_1^2 - \frac{1}{2}ff_2) - \lambda z ff_1 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} f^2},$$

und als einfachste Fälle für $\lambda = 0$:

$$(A_2^0) \qquad z' = z - \frac{ff_1}{f_1^2 - \frac{1}{2}ff_2},$$

$$(B_2^0) \qquad z' = z - f \frac{f_1^2 - ff_2}{f_1^3 - \frac{3}{2}ff_1f_2 + \frac{1}{2}f^2f_3},$$

wovon der erstere (A_2^0) auffallend ist durch seine Aehnlichkeit mit (B_1^0), von welchem er sich nur durch den Factor $\frac{1}{2}$ im Nenner unterscheidet.

In dieser Weise nun könnte man leicht fortfahren, und auch die Algorithmen von biquadratischer und höherer Convergenz aufstellen; jedoch empfiehlt sich dieses darum nicht weiter, weil für praktische Zwecke der Vortheil der rascheren Convergenz durch den Nachtheil einer viel grösseren Complication der zu berechnenden Ausdrücke mehr als aufgewogen wird.

Beispielsweise ergeben sich für die binomische oder reine Gleichung n^{ten} Grades:

$$f(z) = z^n - \gamma = 0$$

die zur Ausziehung einer Quadrat-, Cubik- oder n^{ten} Wurzel aus einer Zahl γ sehr brauchbaren Algorithmen:

$$(A_1^\lambda) \qquad z' = z \cdot \frac{(n - \lambda - 1)\, z^n + (\lambda + 1)\gamma}{(n - \lambda)\, z^n + \lambda\gamma}, \qquad \lambda < n + 1,$$

$$(B_1^\lambda) \qquad z' = z \cdot \frac{(n + \lambda)\,\gamma - \lambda\, z^n}{(n + \lambda - 1)\,\gamma - (\lambda - 1)\, z^n}, \qquad \lambda < 2;$$

hier sind die beiden Algorithmen B unter den $n + 1$ Algorithmen A mit enthalten, nämlich (B_1^0) identisch mit (A_1^{n-1}) und (B_1^1) identisch mit (A_1^n).

Will man etwa eine Quadratwurzel aus einer reellen Zahl auf sehr viele Decimalen, z. B. 24 Stellen, ermitteln, so empfiehlt es sich in der That, nachdem man durch die Methode des gewöhnlichen Wurzelausziehens mit abgekürzter Division einen sehr guten Näherungswerth

(auf 12 Decimalen genau) gefunden, den nächstfolgenden sogleich auf 24 Decimalen genauen Werth mittelst eines dieser Algorithmen aufzusuchen. Ein Vorzug dieses Verfahrens besteht noch darin, dass man bei demselben eine endliche Anzahl beliebiger Rechenfehler machen darf (wenn man nur durch dieselben nicht aus dem Convergenzgebiet hinausgeräth), und dabei doch früher oder später den richtigen Endwerth findet; auch hat man stets einen zuverlässigen Maassstab für die bereits erzielte Genauigkeit; sie ist auf doppelt so viele Decimalen erreicht, als auf wie viele der letzte Näherungswerth mit dem vorletzten übereinstimmt.

Interessant wäre noch die Beantwortung der Frage, welcher Werth von λ sich für eine bestimmte Wurzelausziehung am vorzüglichsten eignet, d. h. die rascheste Convergenz gewährt.

Man könnte auch verschiedene Algorithmen vielleicht vortheilhaft combiniren, z. B. den aus dem Algorithmus $(A_1{}^0)$ sich ergebenden ersten Näherungswerth in den Ausdruck von $(A_1{}^1)$ für z substituiren, um den zweiten Näherungswerth zu finden; alsdann diesen in den Ausdruck von $(A_1{}^2)$ und den so sich ergebenden dritten Näherungswerth in denjenigen von $(A_1{}^3)$, u. s. f., sodass man anstatt einer Iteration oder wiederholten Ausführung gleichartiger Substitutionen nun eine gesetzmässige Reihe verschiedenartiger Substitutionen zu vollziehen hätte, um sich der gesuchten Wurzel zu nähern.

Endlich wäre es der Mühe werth zu untersuchen, welcher Grenze die Algorithmen zustreben, wenn λ eine andere als eine ganze positive Zahl ist.

§ 13.

Einiges über das Convergenzgebiet dieser Algorithmen.

Es bleibt die Aufgabe übrig, die Convergenzgebiete der zuletzt angegebenen Auflösungsmethoden zu ermitteln, d. h. ihre Grenzlinien, wenigstens wenn die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ gegeben sind, zu bestimmen. So leicht diese Aufgabe für die Auflösungsmethoden der zweiten Art in § 11. gelöst werden konnte, so schwierig erscheint dies bei den Auflösungsmethoden der ersten Art oder den im vorigen Paragraphen aufgestellten Algorithmen. Die Beantwortung dieser Frage nach den Contouren der Convergenzbezirke ist mir nur bei den beiden einfachsten Algorithmen in den einfachsten Fällen, nämlich für die linearen oder überhaupt einwurzeligen und für die quadratischen Gleichungen bis jetzt gelungen.

In dem Falle $\lambda = 0$ kann das nachstehende Theorem zur Erleichterung der Aufgabe dienen.

Die Contouren der Convergenzbezirke der Algorithmen $(A_\omega{}^0)$ *oder* $(B_\omega{}^0)$

hängen lediglich ab von der gegenseitigen (relativen) Lage der m von einander verschiedenen Wurzelpunkte $z_1, z_2, \ldots, z_m$, *keineswegs aber von der Lage dieses Punktesystems gegen die Punkte* 0 *und* 1, *überhaupt gegen die Axen der reellen und der imaginären Zahlen.* Mit andern Worten: *Ersetzt man das System der Wurzelpunkte durch ein anderes, ihm ähnliches von beliebiger Lage, so werden auch die neuen Convergenzbezirkcontouren den alten ähnlich und sind zu den neuen Wurzelpunkten ähnlich gelegen.*

Beweis. Man denke sich zwei Zahlenebenen, in der ersten die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_m$ der Gleichung $f(z) = 0$ als Punkte verzeichnet, in der zweiten die in der nämlichen Anzahl vorhandenen Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m$ einer andern Gleichung $\varphi(\zeta) = 0$. Sei ausserdem z in der ersten, ebenso ζ in der zweiten Ebene ein beliebiger Anfangswerth, und:

$$z' = z - \frac{C^{(0)}_{\omega-1}(z)}{C^{(0)}_{\omega}(z)},$$

wo C gebildet ist für die Function f, desgleichen:

$$\zeta' = \zeta - \frac{C^{(0)}_{\omega-1}(\zeta)}{C^{(0)}_{\omega}(\zeta)},$$

wo C gebildet ist für die Function φ, der zugehörige erste Näherungswerth, welchen unser Algorithmus liefert, wenn unter C wie früher entweder die Function A oder die B verstanden wird. Setzen wir dann zwischen z und ζ die Relation fest:

$$\zeta = \mu z + \nu,$$

und nehmen auch an, dass:

$$\zeta_a = \mu z_a + \nu \quad \text{für } a = 1, 2, 3, \ldots m$$

sei, so ist leicht einzusehen, dass das System der Punkte ζ, ζ_a in der zweiten Ebene, wenn μ und ν beliebige complexe Zahlen bedeuten, *ähnlich* ist dem System der Punkte z, z_a in der ersten Ebene, dass jedoch das erstgenannte System gegen die Axen der reellen und der imaginären Zahlen eine beliebig geänderte Lage besitzt. Denn ist $\mu = \varrho e^{i\vartheta}$, so bewirkt die Multiplication der Zahlen z mit ϱ eine Verwandlung des betreffenden Punktesystems in ein anderes ihm ähnliches und ähnlich zu den Axen liegendes, dessen homologe Dimensionen alle ϱ mal so gross sind als im ersteren; die Multiplication mit $e^{i\vartheta}$ bewirkt eine gemeinsame Drehung des Punktesystems über den beliebigen Winkel ϑ; und endlich die Addition von ν zu dem Product $\mu z = \varrho e^{i\vartheta} z$ entspricht einer parallelen Verschiebung des ganzen Systems in der Richtung und über die Länge des Moduls der Zahl ν.

Der Beweis unseres Satzes ist nun geführt, wenn gezeigt ist, dass auch die Näherungswerthe z' und ζ' als homologe Punkte den beiden

ähnlichen Punktesystemen angehören, da sich dieser Schluss alsdann leicht auf alle folgenden und vorausgehenden Näherungswerthe bis an die Grenzen der Convergenzgebiete hin ausdehnen lässt.

Nun ist aber diejenige Gleichung, deren Wurzeln $\zeta_a = \mu z_a + \nu$ sind, offenbar:

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{\zeta - \nu}{\mu}\right) = 0,$$

und muss demnach:

$$\varphi^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{\mu} f^{(1)}\left(\frac{\zeta - \nu}{\mu}\right), \text{ überhaupt } \varphi^{(c)}(\zeta) = \frac{1}{\mu^c} f^{(c)}\left(\frac{\zeta - \nu}{\mu}\right)$$

für jede natürliche Zahl c sein, oder wegen $\frac{\zeta - \nu}{\mu} = z$:

$$\varphi(\zeta) = f(z), \quad \varphi^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{\mu} f^{(1)}(z), \ldots \varphi^{(c)}(\zeta) = \frac{1}{\mu^c} f^{(c)}(z).$$

Da ferner nach Gleichung (57) des § 8. in allen Gliedern der Function $f^{\omega+1} A_\omega^{(0)}$ desgleichen der Function $f^\omega B_{\omega-1}^{(0)}$ die Summe der mit den Exponenten multiplicirten Derivationsindices von f die nämliche und zwar $= \omega$ ist, so erweisen sich die beiden genannten durchweg für die Function φ gebildeten Ausdrücke:

$$\varphi(\zeta)^{\omega+1} A_\omega^{(0)}(\zeta) \text{ resp. } \varphi(\zeta)^\omega B_{\omega-1}^{(0)}(\zeta)$$

gleich den entsprechenden für die Function f gebildeten Ausdrücken:

$$f(z)^{\omega+1} A_\omega^{(0)}(z) \text{ resp. } f(z)^\omega B_{\omega-1}^{(0)}(z)$$

behaftet mit dem Factor $\frac{1}{\mu^\omega}$. Aus der letzten der beiden Gleichungen:

$$z' = z - f(z) \cdot \frac{f(z)^\omega C_{\omega-1}^{(0)}(z)}{f(z)^{\omega+1} C_\omega^{(0)}(z)}, \qquad [\text{wo } C \text{ gebildet für } f],$$

$$\zeta' = \zeta - \varphi(\zeta) \cdot \frac{\varphi(\zeta)^\omega C_{\omega-1}^{(0)}(\zeta)}{\varphi(\zeta)^{\omega+1} C_\omega^{(0)}(\zeta)}, \qquad [\text{wo } C \text{ gebildet für } \varphi],$$

folgt daher:

$$\zeta' = \mu z + \nu - \mu \cdot f(z) \cdot \frac{f(z)^\omega C_{\omega-1}^{(0)}(z)}{f(z)^{\omega+1} C_\omega^{(0)}(z)}, \qquad [\text{wo } C \text{ gebildet für } f],$$

also mit Rücksicht auf die erste Gleichung:

$$\zeta' = \mu z' + \nu,$$

wie gezeigt werden sollte.

Da also die Contouren der Convergenzbezirke in den ähnlichen Systemen der z und der ζ in der That ähnliche Curven mit der gleichen Verhältnisszahl ϱ für die homologen Dimensionen sein müssen, welche gegen das Punktesystem eine ähnliche Lage haben, so wird man, wenn es sich um das Studium jener Contouren handelt, dasselbe ebenso gut in dem System der ζ als in dem der z vornehmen können. Darnach kann man beispielsweise unbeschadet der Allgemeinheit zwei Wurzeln der zu discutirenden Gleichung ganz beliebig, etwa die eine

$= 0$ und die andere $= 1$ annehmen, indem es ja nur auf die relative Lage der Wurzeln ankommt; man kann auch sämmtliche Wurzeln untereinander und dem Nullpunkte beliebig nahe annehmen, da sich die Verhältnisszahl ϱ beliebig klein denken lässt, u. s. w.

Hieraus fliesst noch beiläufig die wichtige Folgerung, dass die Ausschliessung einer Wurzel 0 der Gleichung $f(z) = 0$, welche bei vielen unserer Sätze erforderlich war, doch für die Endresultate bei den Algorithmen (A^0_ω) und (B^0_ω) irrelevant ist.

Für die Algorithmen (A^λ_ω) oder (B^λ_ω), für die $\lambda > 0$ ist, gilt das obige Theorem nicht; versucht man hier dieselbe Betrachtung durchzuführen, wie sie zum Beweise des Theorems nöthig war, so zeigt sich leicht, dass man die Zahl ν gleich 0 nehmen muss, wenn der neue Näherungswerth ein homologer Punkt des dem alten System ähnlichen Punktesystems sein soll. Man darf also wieder die zu Grunde gelegte Masseinheit verändern, d. h. das System der Wurzelpunkte durch ein anderes ihm ähnliches und ähnlich gegen die Axen gelegenes ersetzen, man darf das System auch um den Nullpunkt herum über einen beliebigen Winkel drehen — nur darf man es nicht parallel mit sich verschieben, das heisst es gilt der Satz:

Bei den Algorithmen (A^λ_ω) *und* (B^λ_ω) *ist die relative Lage der Convergenzbezirkcontouren gegen die Wurzelpunkte nur abhängig von der Distanz des Schwerpunktes sämmtlicher Wurzelpunkte (des Mittelpunktes ihrer mittleren Entfernungen) und des Nullpunktes, in ihrem Verhältniss zu den gegenseitigen Distanzen dieser Wurzelpunkte; im Uebrigen aber unabhängig von der absoluten Lage dieser Wurzelpunkte und von der zu Grunde gelegten Einheit.*

Soviel über die Convergenzgebiete im Allgemeinen.

§ 14.
Einfachste Beispiele zu den Haupt-Algorithmen.

Um in die Natur der Algorithmen einen näheren Einblick zu gewinnen, wollen wir jetzt die beiden vorzüglichsten:

$$(A_1{}^0) \quad z' = z - \frac{f}{f_1}, \text{ und } (B_1{}^0) \quad z' = z - \frac{ff_1}{f_1{}^2 - ff_2}$$

für ein einfaches Beispiel hinschreiben und für den praktischen Gebrauch zurecht legen.

Der allereinfachste Fall, nämlich der, wo die Gleichung $f(z) = 0$ nur *eine* Wurzel hat, also entweder vom ersten Grade ist oder als Polynom eine Potenz eines Binoms besitzt, wird sofort durch die Bemerkung erledigt, dass man nach dem Vorausgehenden ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit diese Wurzel $z_1 = 0$ setzen, also

$$f(z) = z^n$$

annehmen kann; dann wird:

$$(A_1^0) \quad z' = \left(1 - \frac{1}{n}\right) z, \quad \text{und} \quad (B_1^0) \quad z' = 0.$$

Der Algorithmus (B_1^0) liefert also sofort die richtige Wurzel (0) der Gleichung. Für den Algorithmus (A_1^0) aber ergiebt sich leicht:

$$z'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 z \ , \ \ldots \ z^{(r)} = \left(\ - \frac{1}{n}\right)^r z,$$

woraus folgt:

$$\lim_{r=\infty} . \, z^{(r)} = 0,$$

welches auch der Anfangswerth z gewesen sein möge. Es gilt also der Satz: *Für eine einwurzelige Gleichung ist das Convergenzgebiet der beiden Algorithmen* (A_1^0) *und* (B_1^0) *die ganze Zahlenebene;* es giebt gar keine im Endlichen liegende Ausnahmepunkte.

Der nächst einfache Fall ist der einer quadratischen Gleichung. Sind die beiden Wurzeln derselben einander gleich, so ist der Fall im vorigen schon enthalten und bereits absolvirt; wir können also diese Wurzeln als von einander verschieden annehmen, und zwar empfiehlt es sich der dadurch zu erzielenden Symmetrie wegen, die eine Wurzel $z_1 = +1$, die andere $z_2 = -1$ zu wählen, was man, wie schon erwähnt, thun kann, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen. Alsdann ist:

$$f(z) = (z-1)(z+1) = z^2 - 1,$$

und lauten die Algorithmen:

$$(A_1^0) \quad z' = \frac{1+z^2}{2z} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad (B_1^0) \quad z' = \frac{2z}{1+z^2} = \frac{2}{z + \frac{1}{z}},$$

sodass, wie man sieht, der Näherungswerth bei dem einen Algorithmus stets der reciproke Werth von demjenigen bei dem andern Algorithmus für denselben Anfangswerth ist.

Will man nun aber für irgend einen complexen Anfangswerth $z = x + iy$ den Näherungswerth $z' = x' + iy'$ wirklich berechnen, so muss man den *complexen* Algorithmus in *zwei combinirte reelle* Algorithmen zerfällen. Dieses hat überhaupt bei jedem Algorithmus $z' = F(z)$ zu geschehen, wenn man denselben wirklich anwenden will, und nicht etwa gerade die Coefficienten und die Wurzeln der Gleichung nebst dem Anfangswerth sämmtlich reell sind. Die gedachte Zerlegung des Algorithmus, welche sich durch Sonderung und Vergleichung der reellen und der imaginären Theile auf beiden Seiten der Gleichung $z' = F(z)$ ergiebt, wäre leicht für jeden unserer Algorithmen allgemein ausgeführt hinzuzuschreiben, nachdem man die Coefficienten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_n$ der Gleichung $f(z) = 0$ in der Form

$$\gamma_\alpha = \alpha_\alpha + i\beta_\alpha \quad (\text{für } \alpha = 0, 1, 2, \ldots n)$$

angenommen hätte.

Für unser Beispiel nun wird:

$$(A_1^0) \qquad x' = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\,, \quad y' = -\frac{y}{2} \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,,$$

$$(B_1^0) \quad x' = 2x \cdot \frac{1 + x^2 + y^2}{[x^2+(y+1)^2]\,[x^2+(y-1)^2]}\,, \; y' = 2y \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{[x^2+(y+1)^2]\,[x^2+(y-1)^2]}\,,$$

wonach zu jedem Anfangswerthe der erste Näherungswerth bequem zu berechnen ist. Will man den darauf folgenden Näherungswerth erhalten, so braucht man nur für x, y in den nebeneinanderstehenden Gleichungen x', y' einzusetzen, und erhält x'' und y'' oder die Elemente von $z'' = x'' + iy''$, u. s. w.

Aus diesen Gleichungen lassen sich schon viele Schlüsse ziehen, zu deren Ausdruck es bequem ist, den Uebergang vom Anfangswerthe zum Näherungswerthe als einen *Sprung* des Argumentes z aus der Lage des Anfangswerthes in die des Näherungswerthes auf der Zahlenebene aufzufassen. Da zum Beispiel für $x^2 + y^2 = 1$ stets $y' = 0$ wird, so gilt der Satz: Von der Peripherie eines mit der Einheit um den Nullpunkt beschriebenen Kreises springt das Argument stets auf die Axe der reellen Zahlen.

Da ferner für $y = 0$ auch $y' = 0$ ist, so sind für einen reellen Anfangswerth auch alle Näherungswerthe reell; das Argument springt niemals aus der Axe der reellen Zahlen heraus. — Desgleichen bleiben für einen rein imaginären Anfangswerth auch alle Näherungswerthe rein imaginär; das Argument springt daher auch niemals aus der Axe der imaginären Zahlen heraus, und kann also der Algorithmus für einen solchen Anfangswerth unmöglich gegen die Punkte ± 1 convergiren; die y Axe muss in ihrer ganzen Erstreckung zu dem Divergenzgebiet des Algorithmus gehören oder lauter Ausnahmepunkte enthalten. Auch bei einem beliebigen Algorithmus lassen sich stets einzelne Ausnahmepunkte finden, indem man nämlich die Werthe von z aufsucht, für welche die Correction verschwindet oder fortwährend ∞ wird, ferner diejenigen Werthe von z für die bei

$$r = 1, 2, 3, \ldots$$

der r^{te} Näherungswerth $z^{(r)}$ wieder dem Anfangswerthe z gleich wird, also der Algorithmus in sich selbst zurückläuft oder periodisch ist; es würde sogar nicht schwer sein, auch allgemein Ausnahmelinien zu entdecken — wohl aber, zu untersuchen, ob diese wirklich die sämmtlichen Ausnahmepunkte enthalten und letztere nicht vielleicht ein Flächengebiet ausfüllen.

Aendern x und y einzeln oder gleichzeitig ihr Vorzeichen, so findet das Entsprechende auch bei x' und y' statt; der Algorithmus verläuft also symmetrisch in den vier Quadranten der Zahlenebene. Die Achse der imaginären Zahlen wird niemals von dem Argument übersprungen, da x' und x stets gleiches Zeichen haben, wohl aber die

Axe der reellen Zahlen; diese wird bei dem Algorithmus (A_1^0) von dem Argument übersprungen, wenn dasselbe innerhalb des vorhin erwähnten Kreises lag, da alsdann y' und y von entgegengesetztem Zeichen sind; wenn das Argument ausserhalb jenes Kreises lag, bleibt es bei seinem Sprunge auf der nämlichen Seite der x Axe. Bei dem Algorithmus (B_1^0) verhält sich letzteres gerade umgekehrt.

Lehrreich ist es auch, den Algorithmus auf Polarcoordinaten zu transformiren, sodass aus Radiusvector und Polarwinkel des Anfangswerthes auch für den Näherungswerth diese Elemente berechnet werden können. Setzt man:

$$x + iy = \varrho e^{i\vartheta} \quad \text{und entsprechend} \quad x' + iy' = \varrho' e^{i\vartheta'},$$

so folgen aus den Gleichungen:

$$(A_1^0) \quad x'^2 + y'^2 = \frac{[x^2 + (y+1)^2]\,[x^2 + (y-1)^2]}{4\,(x^2 + y^2)}, \quad \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x} \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

die combinirten Algorithmen:

$$(A_1^0) \quad \varrho' = \frac{1}{2\varrho} \sqrt{1 + 2\varrho^2 \cos 2\vartheta + \varrho^4}, \quad \operatorname{tg} \vartheta' = -\frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2} \operatorname{tg} \vartheta,$$

Bei (B_1^0) hat man für ϱ' den umgekehrten, für $\operatorname{tg} \vartheta'$ den entgegengesetzten Werth zu nehmen.

Da der Factor $\frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2}$ stets ein echter Bruch ist, so ist der numerische Werth von $\operatorname{tg} \vartheta'$ stets kleiner als der von $\operatorname{tg} \vartheta$, die Fälle $\operatorname{tg} \vartheta = 0$ oder ∞ allein ausgenommen; mithin ist auch, da man sich auf spitze Winkel beschränken kann, der Winkel ϑ' selbst kleiner als ϑ, das heisst: Bei jedem Sprunge schwingt sich der Leitstrahl gegen die Polaraxe zu, er pendelt gleichsam bei Fortsetzung der Sprünge gegen diese Gleichgewichtslage.

Man kann sich auch fragen, welche Curve die Gebiete derjenigen Punkte von einander scheidet, welche sich beim Sprunge dem Nullpunkte oder Schwerpunkt der beiden Wurzeln nähern oder aber von ihm entfernen. Es ist die Curve, deren Gleichung sich aus der Forderung $\varrho'^2 = \varrho^2$ ergiebt und z. B. bei (B_1^0) lautet:

$$[x^2 + (y+1)^2]\,[x^2 + (y-1)^2] = 4, \quad \text{oder} \; (x^2 + y^2 + 1)^2 = 4\,(1 + y^2),$$

also:

$$x = \pm \sqrt{2\sqrt{1 + y^2} - (1 + y^2)} \quad \text{und} \quad y = \pm \sqrt{1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}},$$

oder auch in Polarcoordinaten:

$$\varrho^4 + 2\varrho^2 \cos 2\vartheta = 3.$$

Noch interessanter als die Frage nach den Polarcoordinaten ist die nach den Abständen ϱ_1, ϱ_2, bezw. ϱ_1', ϱ_2' der Punkte z und z' von den Punkten $+1$ und -1, welche Distanzen auch als die beiden Fahrstrahlen des betreffenden Punktes in einem Bipolarcoordinatensystem aufgefasst werden können, dessen Pole die beiden Wurzeln ± 1

sind. Man wird nämlich aus den hier zu suchenden Ausdrücken erfahren, ob sich das Argument bei seinem Sprunge einem Wurzelwerthe genähert habe, oder nicht.

Nun bestehen die Gleichungen:

$$\varrho_1^2 = y^2 + (x-1)^2 \quad , \quad \varrho_2^2 = y^2 + (x+1)^2,$$

(desgleichen für die mit einem Strich versehenen Grössen ϱ, x, y), folglich umgekehrt:

$$x = \frac{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}{4}, y^2 = \tfrac{1}{16}(2+\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_2-2)(\varrho_2+2-\varrho_1)(2+\varrho_1-\varrho_2),$$

und setzt man diese Werthe ein in die Gleichungen:

$$(A_1^0) \qquad y'^2 + (x'-1)^2 = \frac{[y^2+(x-1)^2]^2}{4(x^2+y^2)},$$

(desgleichen $+ 1$ statt $- 1$ gesetzt),

$$(B_1^0) \qquad y'^2 + (x'-1)^2 = \frac{[y^2+(x-1)^2]^2}{[x^2+(y+1)^2]\,[x^2+(y-1)^2]},$$

(desgleichen $+ 1$ statt $- 1$ gesetzt),

so ergeben sich die combinirten Algorithmen:

$$(A_1^0) \quad \varrho_1'^2 = \frac{\varrho_1^4}{2(\varrho_1^2+\varrho_2^2-2)} \quad , \quad \varrho_2'^2 = \frac{\varrho_2^4}{2(\varrho_1^2+\varrho_2^2-2)},$$

$$(B_1^0) \quad \varrho_1'^2 = \frac{2\varrho_1^4}{(\varrho_1^2-2)^2+(\varrho_2^2-2)^2}, \quad \varrho_2'^2 = \frac{2\varrho_2^4}{(\varrho_1^2-2)^2+(\varrho_2^2-2)^2}.$$

Die Gleichung der Curve, welche das Gebiet der Punkte, die sich bei dem Sprunge von dem Wurzelpunkte $+1$ entfernen, von dem Gebiet der Punkte scheidet, welche sich ihm nähern, ist nun bestimmt durch die Forderung $\varrho_1'^2 = \varrho_1^2$; also ist sie bei dem Algorithmus (A_1^0) in Bipolarcoordinaten: $\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2 - 4 = 0$, oder in rechtwinkligen Coordinaten: $3y^2 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$, d. h. die Curve ist der mit dem Radius $\frac{2}{3}$ um den Mittelpunkt $-\frac{1}{3}$ beschriebene Kreis. Bei dem Algorithmus (B_1^0) ist die Gleichung der entsprechenden Curve vom 4ten Grade und leicht nach y aufzulösen. Diese Curven enthalten alle Punkte, welche bei dem Sprunge nur eine *Drehung* um den Wurzelpunkt 1 erleiden.

Um schliesslich aus dem Näherungswerthe auch umgekehrt den Anfangswerth, also überhaupt aus einem beliebigen Näherungswerthe den vorausgehenden zu berechnen, hat man nur nach z die Gleichung aufzulösen:

$$\text{ad } (A_1^0) \quad z^2 - 2zz' + 1 = 0 \quad , \quad \text{ad } (B_1^0) \quad z^2 - \frac{2z}{z'} + 1 = 0.$$

Da dieselbe vom zweiten Grade ist, so führen also zu jedem Näherungswerth z' zwei Anfangswerthe $[z]_1$ und $[z]_2$ hin, welche bei dem Sprunge in ihm zusammentreffen und bei allen weiteren Sprüngen in ihm vereinigt bleiben. Die Punkte des Convergenzgebietes bilden so eine unendliche Schaar von Punkten, welche alle, früher oder später

dem Wurzelpunkte zuspringend, sich unendlich dicht um diesen sammeln, und es ist leicht die Formeln aufzustellen, nach welchen diese Operationen auch rückwärts ausgeführt und fortgesetzt werden können.

In einer folgenden Abhandlung *über iterirte Functionen* werde ich den Nachweis liefern, dass bei den zwei betrachteten Algorithmen für die vorliegende Gleichung die ganze Zahlenebene in zwei Convergenzgebiete zerfällt, welche nur durch die Axe der imaginären Zahlen als einzige Ausnahmelinie von einander geschieden werden; ich hege überhaupt die Vermuthung, dass für diese Algorithmen bei jeder algebraischen Gleichung das Gebiet der Ausnahmepunkte nur von *einer* Dimension ist, oder sich auf die Grenzlinien der Convergenzbezirke reducirt.

An der genannten Stelle werden auch alle anderen Fragen über das betrachtete Beispiel der beiden Algorithmen zur Beantwortung kommen; dennoch werden sich die Betrachtungen dieses Paragraphen nicht als überflüssig erweisen.

§ 15.

Anhang:

Theorem über die Functionen *A*.

Anhangsweise will ich noch ein Theorem mittheilen, welches ursprünglich den Ausgangspunkt für die Aufstellung der Algorithmen des § 12. gebildet hat, und dadurch von Interesse erscheint, dass die Functionen $A_\omega^\lambda(z)$ darin eine Rolle spielen.

Sei wie früher:

$$(71)\qquad f(z) = \sum_{a=0}^{a=n} \gamma_a z^{n-a} = \gamma_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

und seien die Wurzeln $z_1, z_2, \dots z_n$ der Gleichung $f(z) = 0$ sämmtlich von einander verschieden, mithin einfache Wurzeln.

Die Function $f(z)$ lässt sich nun durch die Differenz $z - z_a$ ohne Rest theilen, und man findet nach dem gemeinen Divisionsverfahren ein Resultat von der Form:

$$(72)\qquad \frac{f(z)}{z - z_a} = \sum_{b=0}^{b=n-1} z^{n-b-1} \mathfrak{F}_b(z_a).$$

Hierdurch sind gewisse ganze rationale Functionen $\mathfrak{F}_b(z_a)$ definirt, zu deren Berechung sich durch Multiplication mit $z - z_a$ und Coefficientenvergleichung leicht die Recursionen ergeben:

$$(73)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_0(z_a) = \gamma_0, \\ \mathfrak{F}_b(z_a) = z_a \mathfrak{F}_{b-1}(z_a) + \gamma_b \text{ für } b = 1, 2, 3, \dots n-1, \\ \quad 0 \quad = z_a \mathfrak{F}_{n-1}(z_a) + \gamma_n; \end{cases}$$

die vorletzte dieser Recursionen wird auch noch für $b = n$ gültig, wenn man: $\mathfrak{F}_n(z) = f(z)$ definirt, und man erhält mit Hülfe derselben die bekannte Darstellung:

$$(74) \qquad \mathfrak{F}_b(z_a) = \sum_{c=0}^{c=b} \gamma_c \, z_a^{b-c} \text{ für } b = 0,\ 1,\ 2, \ldots n,$$

welche wir auch für ein beliebiges Argument z an Stelle von z_a gelten lassen wollen, desgleichen auch noch eventuell für $b > n$, indem wir die Coefficienten $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots$ alsdann willkürlich lassen.

Setzt man in der Gleichung (72) einmal z_c für z, wo c eine von a verschiedene unter den Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeutet, ein anderes Mal z_a für z, so ergeben sich wegen:

$$f(z_c) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{z = z_a} \frac{f(z)}{z - z_a} = f^{(1)}(z_a)$$

die für das Folgende wichtigen Relationen:

$$(75) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{b=0}^{b=n-1} z_c^{n-b-1} \, \mathfrak{F}_b(z_a) = 0, \text{ wenn } c \gtrless a, \\ \sum\limits_{b=0}^{b=n-1} z_a^{n-b-1} \, \mathfrak{F}_b(z_a) = f^{(1)}(z_a). \end{cases}$$

Auf diese Relationen gestützt, kann man zunächst den Satz aufstellen:

Von den beiden Systemen linearer Gleichungen:

$$(76) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{c=0}^{c=n-1} z_a^{n-c-1} \, X_c = Y_a f^{(1)}(z_a), \text{ für } a = 1, 2, \ldots n, \\ X_c = \sum\limits_{a=1}^{a=n} \mathfrak{F}_c(z_a) \, Y_a, \text{ für } c = 0, 1, \ldots n-1, \end{cases}$$

desgleichen von den beiden Systemen:

$$(77) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{c=0}^{c=n-1} \mathfrak{F}_{n-c-1}(z_a) \, \mathfrak{Y}_c = \mathfrak{X}_a \, f^{(1)}(z_a), \text{ für } a = 1, 2, \ldots n, \\ \mathfrak{Y}_c = \sum\limits_{a=1}^{a=n} z_a^c \, \mathfrak{X}_a, \text{ für } c = 0, 1, \ldots n-1, \end{cases}$$

ist immer das eine die Auflösung des andern.

Denn, setzt man je aus der zweiten von diesen Gleichungen den Werth in die erste ein, wobei selbstverständlich die Summationsvariable a durch einen andern Buchstaben, z. B. b ersetzt werden muss, so entsteht mit Rücksicht auf (75) eine identische Gleichung.

Würde man umgekehrt den Ausdruck aus der ersten Gleichung jedes Paares in die zweite substituiren, so wäre die Richtigkeit des Satzes nach dem Bisherigen nicht unmittelbar ersichtlich; man wird vielmehr auf diese Weise zu der neuen Relation geführt:

$$(78) \qquad \sum_{a=1}^{a=n} \frac{z_a^b \, \mathfrak{F}_c(z_a)}{f^{(1)}(z_a)} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } b + c \gtrless n-1, \\ 1, \text{ wenn } b + c = n - 1, \end{cases}$$

welche übrigens leicht aus einer von Cauchy gegebenen abgeleitet werden könnte *). Die Auflösung der Systeme (76) und (77) ist auch von Baltzer**) mittelst Betrachtung von Determinanten ausgeführt.

Es gilt nun ferner der Satz:

Jede positive ganze Potenz einer linearen Function der Grössen

$$\mathfrak{F}_0(z_a)\ ,\ \mathfrak{F}_1(z_a)\ ,\ \ldots\ \mathfrak{F}_{n-1}(z_a),$$

nämlich:

$$P = \sum_{c=0}^{c=n-1} \mathfrak{Y}_c'\ \mathfrak{F}_{n-c-1}(z_a)\,,$$

in welcher die Coefficienten $\mathfrak{Y}_c'$ *irgend welche Constante sind, lässt sich ebenfalls als lineare Function jener n Grössen darstellen, deren Coefficienten symmetrische Functionen sämmtlicher Wurzeln sind, also nur die früheren Coefficienten* $\mathfrak{Y}'$ *nebst denjenigen* γ *des Polynoms* $f(z)$, *nicht aber die Wurzel* z_a *enthalten.*

Am einfachsten lässt sich dies in folgender Weise einsehen. Denkt man sich die Ausdrücke der Functionen $\mathfrak{F}$, nach dem Schema der Gleichung (74) gebildet, in den Ausdruck von $P^{\omega+1}$ eingesetzt, so ist klar, dass sich dieser nach den Potenzen der Wurzel z_a anordnen lässt. Diejenigen Potenzen von z_a, deren Exponent grösser als $n-1$ ist, lassen sich aber mittelst der Gleichung $f(z_a)=0$ durch die niedrigeren ausdrücken, wonach $P^{\omega+1}$ als lineare Function der Grössen

$$z_a^0\ ,\ z_a^1\ ,\ \ldots\ z_a^{n-1}$$

erscheint. Die letzteren Grössen lassen sich hierauf, indem man das System Gleichungen (74) auflöst, durch die erstgenannten

$$\mathfrak{F}_0(z_a)\ ,\ \mathfrak{F}_1(z_a)\ ,\ \ldots\ \mathfrak{F}_{n-1}(z_a)$$

darstellen, und wenn die gedachten Werthe eingesetzt werden, erhält man $P^{\omega+1}$ in der That als lineare Function dieser Grössen $\mathfrak{F}$.

Bemerkenswerth dürfte jedoch auch nachstehender Beweis des Satzes sein.

Denkt man sich die $\omega+1^{\text{te}}$ Potenz der Summe P nach dem polynomischen Satze entwickelt, so erhält man ein Aggregat von Gliedern, deren jedes ein Product von Potenzen einiger der Functionen $\mathfrak{F}_0(z_a)\,,\,\mathfrak{F}_1(z_a)\,,\ldots\,\mathfrak{F}_{n-1}(z_a)$ zum Factor hat. Ein solches Product, und damit auch das ganze Aggregat, lässt sich jedenfalls linear durch diese Functionen $\mathfrak{F}$ ausdrücken, wenn es gelingt, für ein Product von irgend zweien dieser Functionen dieselbe Aufgabe zu lösen.

Wir wollen uns deshalb allgemein die Aufgabe stellen, wenn a und b irgend zwei natürliche Zahlen bezeichnen, das Product

---

*) Cf. Baltzer, Determ. 2. Aufl., pag. 79.

**) Ibidem, pag. 81 sq.

$$\mathfrak{F}_a(z)\ \mathfrak{F}_b(z)$$

linear durch die Grössen $\mathfrak{F}_0(z)$, $\mathfrak{F}_1(z)$, ... auszudrücken. Dabei möge das sich stets gleichbleibende Argument z der Functionen $\mathfrak{F}$ weggelassen werden. Durch Multiplication der Gleichung (74) mit $\mathfrak{F}_a$ und Absonderung des in die nullte Potenz von z multiplicirten Termes rechter Hand ergiebt sich alsdann:

$$\mathfrak{F}_a\,\mathfrak{F}_b = \gamma_b\mathfrak{F}_a + z\mathfrak{F}_a \sum_{c=0}^{c=b-1} \gamma_c\, z^{b-c-1} \text{ oder } \mathfrak{F}_a\,\mathfrak{F}_b = \gamma_b\,\mathfrak{F}_a + z\,\mathfrak{F}_a\mathfrak{F}_{b-1}.$$

Da ferner nach (73):

$$z\,\mathfrak{F}_a = \mathfrak{F}_{a+1} - \gamma_{a+1},$$

so folgt durch Einsetzung:

$$\mathfrak{F}_a\,\mathfrak{F}_b - \mathfrak{F}_{a+1}\,\mathfrak{F}_{b-1} = \gamma_b\,\mathfrak{F}_a - \gamma_{a+1}\,\mathfrak{F}_{b-1}.$$

Schreibt man hierin $a + c$ statt a und $b - c$ statt b, summirt hierauf nach c von 0 bis $b - 1$ und berücksichtigt, dass $\mathfrak{F}_0 = \gamma_0$ ist, so ergiebt sich bei passender Anordnung der Glieder:

$$(79)\qquad \mathfrak{F}_a\,\mathfrak{F}_b = \gamma_b\,\mathfrak{F}_a + \sum_{c=1}^{c=b}\left(\gamma_{b-c}\,\mathfrak{F}_{a+c} - \gamma_{a+c}\,\mathfrak{F}_{b-c}\right),$$

was die gesuchte Darstellung ist.

Der also auf zwei Wegen erkannte Satz soll jetzt auf den Fall angewendet werden, wo P der Ausdruck (72) selbst, nämlich gleich:

$$\frac{f(z)}{z - z_a} = \sum_{c=0}^{c=n-1} z^c\,\mathfrak{F}_{n-c-1}(z_a),$$

wo also $\mathfrak{Y}_c' = z^c$ ist. Die $\omega + 1^{\text{te}}$ Potenz dieses Ausdrucks lässt sich, wie gezeigt, linear durch die Functionen $\mathfrak{F}$ darstellen, und es handelt sich darum, diese Darstellung:

$$\left\{\frac{f(z)}{z - z_a}\right\}^{\omega+1} = \sum_{c=0}^{c=n-1} \mathfrak{Y}_c\,\mathfrak{F}_{n-c-1}(z_a)$$

wirklich zu bilden. Dies lässt sich unmittelbar mit Hülfe des Theorems (77) erreichen. Denkt man sich nämlich die letzte Gleichung für $a = 1, 2, \ldots n$ hingeschrieben und versteht dort unter $\mathfrak{X}_a$ den Ausdruck

$$\frac{f(z)^{\omega+1}}{f^{(1)}(z_a)\,(z - z_a)^{\omega+1}},$$

so erhält man als Auflösung des Systems Gleichungen mit Rücksicht auf die Definition (38) der Function A sofort:

$$\mathfrak{Y}_c = f(z)^{\omega+1} A_{\omega}^{(c)}(z).$$

Nach Einsetzung dieses Werthes und Weglassung des gemeinsamen Factors $f(z)^{\omega+1}$ ist also die Identität gefunden:

$$(80) \qquad \frac{1}{(z-z_a)^{\omega+1}} = \sum_{c=0}^{c=n-1} A_\omega^{(c)}(z)\, \mathfrak{F}_{n-c-1}(z_a),$$

und man kann das Theorem aussprechen:

Drückt man die $\omega + 1^{\text{te}}$ *Potenz von*

$$\frac{f(z)}{z-z_a}$$

linear durch die Functionen $\mathfrak{F}_0(z_a), \ldots \mathfrak{F}_{n-1}(z_a)$ *aus, so nähert sich das Verhältniss der Coefficienten von irgend zwei aufeinanderfolgenden dieser Functionen bei unendlich wachsendem* ω *stets derjenigen Wurzel der Gleichung* $f(z) = 0$, *welche dem willkürlichen Werthe* z *am nächsten liegt.*

Zur Berechnung dieser Coefficienten $f^{\omega+1} A_\omega^{(c)}$ könnte man sich auch des polynomischen Satzes in Verbindung mit der Relation (79) bedienen.

Pforzheim, im Januar 1869.

Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten.

Von Felix Klein in Göttingen.

Die Bedeutung der Liniencoordinaten ist zunächst in ihrer steten Verbindung mit den Punktcoordinaten einerseits und den Ebenencoordinaten andererseits zu suchen. Dem entsprechend stellen sich die Liniencoordinaten dar als die Determinanten aus den Coordinaten zweier Punkte oder zweier Ebenen. Indessen scheint es, als wenn der Fortgang der allgemeinen Theorie es wünschenswerth mache, die Liniencoordinaten unabhängig von dieser Beziehung als selbstständige Veränderliche zu betrachten. Dieselben haben alsdann eine Bedingungsgleichung zweiten Grades zu erfüllen, welche eine Identität ist, sobald wir zu dem Ausdrucke der Liniencoordinaten in den Coordinaten zweier Punkte oder zweier Ebenen zurückgehen. Die Theorie der Liniencomplexe fällt mit der Theorie der simultanen Formen der Complexgleichung und dieser Bedingungsgleichung zusammen.

Die nächste hier entstehende Frage ist die nach der geometrischen Bedeutung der allgemeinen linearen Transformation der Liniencoordinaten. Ich erledige dieselbe in der folgenden Notiz durch eine entsprechende allgemeinere Definition der Liniencoordinaten, bei welcher ich, wie dies bereits Herr Zeuthen gethan hat*), von *dem Momente zweier gerader Linien in Bezug auf einander* als einfacher Massbestimmung ausgehe. Ueberdies betrachte ich als bekannt *den Begriff des linearen Complexes*, sowie *den der involutorischen Lage zweier solcher Complexe***).

1. Es seien sechs lineare Complexe gegeben, die mit den Symbolen $X_1, X_2, \ldots X_6$ bezeichnet sein mögen. Ueber ihre gegenseitige Lage mache ich nur die Voraussetzung, dass es keinen linearen Complex giebt, der mit sämmtlichen sechs zugleich in Involution liegt. Einer beliebig gegebenen geraden Linie entspricht in jedem der sechs

*) Diese Annalen. I. Band. p. 432.

**) Vergl. diese Annalen. II. Band. p. 201.

Complexe eine conjugirte Polare. *Die relativen Werthe der mit gegebenen Constanten multiplicirten Momente der geraden Linie in Bezug auf diese Polaren betrachte ich als die homogenen Coordinaten derselben.*

Dieselben seien durch $x_1, x_2, \ldots x_6$ bezeichnet. Damit die gerade Linie einem der Complexe X angehöre, muss die betreffende Coordinate verschwinden. $x = 0$ ist also die Gleichung des Complexes X.

Einem beliebig gegebenen Werthsysteme der x entspricht im Allgemeinen keine gerade Linie. Damit dieses stattfinde, müssen die x eine Bedingungsgleichung des zweiten Grades erfüllen:

$$f \equiv a_x^2 = 0,$$

in welcher die a Constanten sind. Aus der Form dieser Gleichung wird es erlaubt sein, auf die Art und die gegenseitige Lage der zu Grunde gelegten sechs linearen Complexe X zu schliessen.

Neben die hier gegebene Coordinatenbestimmung stellt sich sofort eine zweite. Wir erhalten dieselbe, wenn wir die nach den einzelnen x genommenen partiellen Differentialquotienten von f als neue Veränderliche $u_1, u_2, \ldots u_6$ einführen. Dieselben sind proportional den mit passenden Constanten multiplicirten Momenten der geraden Linie in Bezug auf sechs lineare Complexe $U_1, U_2, \ldots U_6$, welche bezüglich durch $u = 0$ dargestellt werden.

Indem wir die u an Stelle der x in f einführen, erhalten wir eine Form:

$$\varphi \equiv u_\alpha^2 \equiv (a\, b\, c\, d\, e\, u)^2,$$

deren Verschwinden die Bedingung ist, damit einem gegebenen Werthsysteme der u eine gerade Linie entspricht.

Dabei ist:

$$f \equiv \varphi \equiv u_x.$$

2. Die Coordinaten zweier gegebener gerader Linien seien, in der zwiefachen Coordinatenbestimmung, bezüglich x, y und u, v. Wir bilden uns den Ausdruck:

$$u_y \equiv v_x \equiv a_x\, a_y \equiv u_\alpha\, v_\alpha.$$

Derselbe stellt, bis auf leicht anzugebende Factoren, das Moment der beiden geraden Linien in Bezug auf einander dar. Die Gleichung:

$$u_y \equiv v_x \equiv a_x\, a_y \equiv u_\alpha\, v_\alpha = 0$$

vertritt also, wenn wir in ihr die y, v als fest, die x, u als veränderlich betrachten, die Gesammtheit derjenigen Linien (x, u), welche eine gegebene gerade (y, v) schneiden.

Hiernach entspricht die doppelte Coordinatenbestimmung, x und u, der zweifachen Bedeutung, in welcher die gerade Linie in der vorstehenden Gleichung — so wie überhaupt in den hier anzustellenden Betrachtungen — auftritt. Das eine Mal ist die gerade Linie Raumelement,

das andere Mal stellt sie die Gesammtheit der sie schneidenden geraden Linien dar. Der ersten Vorstellung entsprechen die Coordinaten x, der zweiten die Coordinaten u, oder umgekehrt, je nachdem wir bei ihrer Bestimmung von den Complexen X oder den Complexen U ausgehen.

3. Wenn wir in die vorstehende Gleichung an Stelle von y, v beliebige Grössen setzen (welche nicht mehr der Gleichung

$$f = 0\ ,\ \varphi = 0$$

zu genügen brauchen), stellt dieselbe einen linearen Complex dar. Die Grössen y, v bezeichne ich *als die Coordinaten dieses Complexes.*

Dadurch, dass man diese Coordinaten in f, φ einführet, entsteht ein Ausdruck, den ich als *Invariante* des Complexes bezeichnet habe*). Bis auf leicht zu bestimmende Factoren ist die Invariante gleich dem Parameter**) des Complexes. Das Verschwinden der Invariante giebt an, dass der Complex ein specieller Complex ist.

Als *simultane Invariante* zweier linearer Complexe (x, u) und (y, v) habe ich den Ausdruck bezeichnet***):

$$u_y \equiv v_x \equiv a_x\, a_y \equiv u_\alpha\, v_\alpha\, .$$

Derselbe hat die folgende geometrische Bedeutung. Seien die Parameter der beiden Complexe bezüglich K und K', der Abstand ihrer Hauptaxen Δ, die gegenseitige Neigung derselben φ, so ist die simultane Invariante bis auf leicht angebbare Factoren:

$$= \Delta \sin\varphi + (K + K') \cos\varphi\, .$$

Diese letztere Grösse soll *das Moment der beiden linearen Complexe in Bezug auf einander* genannt werden.

Das Verschwinden der simultanen Invariante zweier Complexe sagt aus, dass die beiden Complexe in Involution liegen.

Für die simultanen Invarianten eines gegebenen Complexes mit den Complexen X bezüglich U finden wir seine betreffenden Coordinaten. *Als Coordinaten eines Complexes ersten Grades sind die relativen Werthe der mit gegebenen Constanten multiplicirten Momente desselben mit Bezug auf sechs gegebene Complexe anzusehen.*

4. Indem wir den Variabeln in der Gleichung eines Complexes unbeschränkte Veränderlichkeit ertheilen, gelangen wir, nach dem

---

*) Diese Annalen II. Band. p. 201. Wenn man in f, φ bezüglich die nach den einzelnen u, x genommenen partiellen Differentialquotienten irgend einer Complexgleichung an Stelle der Variabeln einsetzt, entsteht ein Ausdruck, welcher, gleich Null gesetzt, denjenigen covarianten Complex darstellt, der mit dem gegebenen die singulären Linien desselben bestimmt. (Plücker, Neue Geometrie p. 296.)

**) Plücker, Neue Geometrie. p. 38.

***) Diese Annalen a. a. O.

Vorstehenden, *zu einer zwiefachen Auffassung eines linearen Complexes.* Das eine Mal ist der lineare Complex Element, das andere Mal Vertreter der Gesammtheit der mit ihm in Involution liegenden linearen Complexe.

Die bei dieser Anschauung zunächst in Betracht kommenden Gebilde sind diejenigen, welche durch

$$1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5$$

lineare Gleichungen zwischen den Complexcoordinaten definirt werden. Mögen für diese Coordinaten zunächst die X gewählt sein. Dann erhält man dieselben Gebilde bezüglich durch:

$$5\,,\,4\,,\,3\,,\,2\,,\,1$$

Gleichungen zwischen den u bestimmt. Dem entspricht eine doppelte Auffassung der dargestellten Gebilde. Wie sich dieselbe bei den Endgliedern der vorstehenden zwei Reihen $(1, 5)$, $(5, 1)$, die beide lineare Complexe sind, gestaltet, ist bereits erörtert. Bei $(2, 4)$, $(4, 2)$, welche beide Congruenzen sind, kommt dieselbe, wenn wir uns auf die Betrachtung specieller Complexe beschränken, darauf hinaus, als eine lineare Congruenz entweder die Gesammtheit der geraden Linien, welche zwei gegebene schneiden, oder solche zwei gegebene gerade Linien selbst zu betrachten. In der doppelten Darstellungsweise von $(3, 3)$ endlich ist die doppelte Erzeugung der Flächen zweiten Grades durch gerade Linien ausgesprochen.

5. Nach diesen Erörterungen ergiebt sich für das hier zu Grunde gelegte Coordinatensystem der X und U das Folgende.

Die Coordinaten von X_1 in dem Systeme der U, sowie die von U_1 in dem Systeme der X, sind:

$$1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0.$$

Es sind also die U diejenigen sechs Complexe, welche mit jedesmal fünf der Complexe X in Involution liegen. Diese Beziehung zwischen den X und U ist eine gegenseitige.

Für die Coordinaten von X_1 in dem Systeme der X finden wir:

$$a_{11}\,,\,a_{12}\,,\,a_{13}\,,\,a_{14}\,,\,a_{15}\,,\,a_{16},$$

und für die Coordinaten von U_1 in dem Systeme der U:

$$\alpha_{11}\,,\,\alpha_{12}\,,\,\alpha_{13}\,,\,\alpha_{14}\,,\,\alpha_{15}\,,\,\alpha_{16}.$$

Die Coefficienten a, α sind die Invarianten der Complexe X, U.

Mit dem Coordinatensysteme in unmittelbarem Zusammenhange stehen die durch die Complexe X oder die Complexe U bestimmten gemeinsamen Elemente. Dabei findet die Reciprocität statt, dass Alles, was nach der einen Auffassung der geraden Linie (des linearen Complexes) einer Anzahl von Complexen X gemeinsam angehört, nach der

anderen Auffassung den Complexen U zukommt, welche den noch übrigen X entsprechen.

So bestimmen zwei Complexe X, z. B. X_1, X_2 eine Congruenz, deren Directricen diejenigen beiden Linien sind, welche U_3, U_4, U_5, U_6 zugleich angehören.

Im Ganzen bestimmen die Complexe X, so wie die Complexe U, 15 Congruenzen. Die Directricen einer Congruenz einer dieser beiden Gruppen werden durch die Directricen von sechs Congruenzen der anderen Gruppe geschnitten.

Drei Complexe X, z. B. X_1, X_2, X_3, bestimmen eine Fläche zweiten Grades vermöge der Linien ihrer einen Erzeugung. Dieselbe Fläche gehört vermöge der Linien ihrer anderen Erzeugung den Complexen U_4, U_5, U_6 an.

6. Wir mögen noch kurz die folgenden Bemerkungen hinzufügen.

So oft einer der Coëfficienten a_{kk}, α_{kk} verschwindet, wird einer der Complexe X, bezüglich U ein specieller Complex. Sind insbesondere alle a_{kk} und α_{kk} gleich Null, so bilden die zwölf geraden Linien X und U eine *Doppelsechs*. Als ein ausgezeichneter Fall dieser Gruppirung ist das System der sechs Kanten eines *Tetraeders* zu betrachten, für welches die X von den U nur durch die Anordnung verschieden sind.

Dann ist noch hervorzuheben dasjenige Coordinatensystem, für welches die Complexe X mit den Complexen U identisch werden*). Dasselbe ist durch das Verschwinden sämmtlicher Coëfficienten in f, φ ausser denen mit gleichen Indices charakterisirt.

---

*) Von der Betrachtung eines derartigen Systems bin ich in dem Aufsatze: Zur Theorie der Complexe ersten und zweiten Grades (diese Annalen II. Band. p. 198.) ausgegangen.

Göttingen, den 4. August 1869.

Ueber die Abbildung der Complexflächen vierter Ordnung und vierter Classe.

Von Felix Klein in Göttingen.

Herr Clebsch hat in diesen Annalen (Band I. p. 253.) die Abbildung der Flächen vierter Ordnung mit einer Doppellinie gegeben. Ein Beispiel für Flächen dieser Art bilden die Complexflächen vierter Ordnung und vierter Classe, deren Erzeugung sich an die Liniencomplexe zweiten Grades anknüpft*). Ausgezeichnet sind diese Flächen dadurch, dass die Kegelschnitte, nach welchen dieselben von den Ebenen, die durch die Doppellinie hindurchgehen, geschnitten werden, nicht als Curven der zweiten *Ordnung*, sondern als Curven der zweiten *Classe* definirt sind.

Solch' eine Complexfläche besitzt acht, paarweise zusammengehörige *Doppelpunkte*. Die Verbindungslinien der beiden Doppelpunkte eines Paares sind die sogenannten *singulären Strahlen* der Fläche. Die vier, doppelt zu zählenden singulären Strahlen sind — abgesehen von dem Doppelstrahl — die einzigen Strahlen, welche der Fläche angehören. Die acht Doppelpunkte liegen zu vier in acht, paarweise zusammengehörigen *Doppelebenen*. In jeder Doppelebene liegt ein Berührungskegelschnitt; und diese acht, doppelt zu zählenden Kegelschnitte sind, abgesehen von der Kegelschnittschaar in den durch die Doppellinie gehenden Ebenen, die einzigen Kegelschnitte, welche auf der Fläche liegen. Je zwei zusammengehörige Doppelebenen schneiden sich in einem Punkte der Doppellinie. Diese Punkte heissen die *singulären Punkte* der Fläche.

Es sind dies die Singularitäten der Fläche, die bei ihrer Abbildung zur Sprache kommen, sofern man die Fläche als durch Punkte erzeugt betrachtet.

Die Abbildung selbst gestaltet sich in der folgenden Weise.

Das Bild der Doppellinie wird eine Curve der dritten Ordnung. Auf derselben liegt ein doppelter Fundamentalpunkt O. Die Berüh-

*) Vergl. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig. B. G. Teubner. 1868, 69.

rungspunkte a, b, c, d der von O an die Curve gezogenen vier Tangenten sind doppelt zu zählende einfache Fundamentalpunkte. Die Tangenten mögen α, β, γ, δ heissen.

Von den *acht Doppelpunkten* der Fläche sind vier dargestellt durch α, β, γ, δ, die vier übrigen durch a, b, c, d, doch in der Art, dass eine auf der Fläche liegende Curve, deren Bild bezüglich durch a, b, c, d geht, nur dann die betreffenden Doppelpunkte enthält, wenn sie nicht α, β, γ, δ in a, b, c, d berührt.

Die vier *singulären Strahlen* sind durch a, b, c, d dargestellt. Curven, welche a, b, c, d enthalten und in denselben α, β, γ, δ berühren, schneiden die entsprechenden singulären Strahlen in Punkten, die von den auf denselben liegenden Doppelpunkten verschieden sind.

Von den *acht Kegelschnitten*, nach welchen die Doppelebenen die Fläche berühren, ist einer durch den Punkt O, ein anderer durch den Kegelschnitt a, b, c, d, O abgebildet. Die sechs übrigen sind durch die Verbindungslinien von a, b, c, d unter sich gegeben.

Einer der *vier singulären Punkte* fällt in den Fundamentalpunkt O. Alle ihn enthaltenden Curven berühren in O die Curve dritter Ordnung. Die übrigen drei singulären Punkte sind der Durchschnitt je zweier zusammengehöriger der 6 Verbindungslinien von a, b, c, d. Diese Durchschnittspunkte liegen auf der Curve dritter Ordnung.

Endlich sind die durch O hindurchgehenden geraden Linien das Bild der auf der Fläche liegenden *Kegelschnittschaar*.

Göttingen, den 14. Juni 1869.

Ueber die Möglichkeit, zwei gegebene binäre Formen linear in einander zu transformiren.

Von A. Clebsch in Göttingen.

I.

Dass zwei binäre Formen nur dann durch lineare Transformationen überführbar sind, wenn ihre absoluten Invarianten einander gleich sind, folgt aus dem Begriffe der Invarianten. Aber nicht so einfach ist die Frage zu behandeln, ob und wann umgekehrt aus der Gleichheit der absoluten Invarianten die Möglichkeit der Ueberführung folgt.

Die Formen ungerader Ordnung besitzen, von der fünften Ordnung aufwärts, lineare Covarianten, die Formen gerader Ordnung, von der sechsten aufwärts, quadratische. Man kann nun folgende Sätze aufstellen, welche die obige Frage ihrer Lösung so weit nähern, dass für jede Ordnung nur noch einzelne besondere Fälle zu erledigen sind:

Für Formen ungerader Ordnung folgt die Möglichkeit der linearen Ueberführung aus der Gleichheit der absoluten Invarianten immer, sobald für die beiden verglichenen Formen zwei Paare entsprechender, von Null verschiedener linearer Covarianten existiren, welche nicht nur um einen constanten Factor verschieden sind.

Für Formen gerader Ordnung folgt jene Möglichkeit aus der Gleichheit der absoluten Invarianten immer, sobald für die beiden verglichenen Formen zwei Paare entsprechender, von Null verschiedener quadratischer Covarianten existiren, welche keinen gemeinschaftlichen linearen Factor besitzen).*

In beiden Fällen ist nicht blos die Möglichkeit erwiesen, sondern man kann auch die Transformation sogleich ausführen. Sei im ersten Falle f die eine Form, ξ, η zwei nicht verschwindende und nicht blos um einen constanten Factor verschiedene lineare Covarianten von f, D ihre Determinante, eine nicht verschwindende Invariante. Man kann

*) Aehnliche Sätze existiren für Formen mit mehr Veränderlichen.

dann ξ, η als Veränderliche einführen, und hat, wenn $2n+1$ die Ordnung von f ist:

(1) $$D^{2n+1}\cdot f = A\xi^{2n+1} + A_1\xi^{2n}\eta + A_2\xi^{2n-1}\eta^2 \dots .$$

Ist ξ vom Grade α, η vom Grade β in den Coefficienten von f, so hat D den Grad $\alpha+\beta$, A, A_1, A_2 ... haben beziehungsweise die Grade:

(1) $(2n+1)\beta+1$, $\alpha+2n\beta+1$, $2\alpha+(2n-1)\beta+1$ etc.,

und es sind also die Ausdrücke

$$B = \frac{A}{\Theta^{(2n+1)\beta+1}},$$

$$B_1 = \frac{A_1}{\Theta^{\alpha+2n\beta+1}}, \quad \left(\Theta = D^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right),$$

$$B_2 = \frac{A_2}{\Theta^{2\alpha+(2n-1)\beta+1}},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

absolute Invarianten von bestimmtem Werthe. Setzt man noch

$$X = \frac{\xi}{\Theta^{\alpha-\frac{1}{2n+1}}}, \qquad Y = \frac{\eta}{\Theta^{\beta-\frac{1}{2n+1}}},$$

so verwandelt sich die Gleichung (1) in folgende:

(2) $$f = BX^{2n+1} + B_1X^{2n}Y + B_2X^{2n-1}Y^2 \dots .$$

Führt man nun dieselben Operationen an der zweiten Form f' aus, und bezeichnet Alles entsprechend durch einen beigesetzten obern Strich, so treten an Stelle von X, Y die neuen Covarianten X', Y', während die Coefficienten B der Voraussetzung nach ungeänderte Werthe behalten, sobald man nur die Irrationalität Θ' in geeigneter Weise bestimmt.

Denkt man sich nun auch f, X, Y mit den Veränderlichen x_1, x_2, dagegen f', X', Y' mit den ursprünglichen Veränderlichen x_1', x_2, geschrieben, so sind die Gleichungen

(3) $$\begin{aligned} X &= X' \\ Y &= Y' \end{aligned}$$

lineare Gleichungen zwischen x_1, x_2 einerseits und x_1', x_2' andrerseits, aus denen man, der Voraussetzung nach, immer eine Art von Veränderlichen durch die andere wirklich ausdrücken kann; andrerseits hat man

$$f = f',$$

d. h. *die beiden Formen sind durch die lineare Transformation* (3) *in einander übergeführt.*

Sei zweitens f eine Form von gerader Ordnung $2n$, und habe dieselbe zwei quadratische Covarianten, l, m, welche keinen linearen Factor gemein haben. Sei dann

$$\vartheta = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial l}{\partial x_1}\frac{\partial m}{\partial x_2} - \frac{\partial m}{\partial x_1}\frac{\partial l}{\partial x_2}\right)$$

und D die Invariante der quadratischen Form ϑ. Es ist dann D zugleich die Resultante von l und m, und daher der Voraussetzung nach von Null verschieden. Man kann nun die drei Covarianten l, m, ϑ dazu benutzen, um x_1^2, x_1x_2, x_2^2 linear durch sie auszudrücken, wobei nur D im Nenner erscheint, und indem man dann zunächst a_x^2 durch l, m, n darstellt, die n^{te} Potenz von a_x^2 aber als symbolischen Ausdruck von f betrachtet, ergiebt sich f als homogene Function n^{ter} Ordnung von l, m, ϑ, mit dem Nenner D^n, und mit Coefficienten, welche Invarianten sind. Endlich ist bekanntlich noch

$$\vartheta^2 = -\tfrac{1}{2}(Pl^2 + 2Qlm + Rm^2),$$

wo P, Q, R Invarianten sind; und mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich also die Gleichung bilden:

$$(4)\qquad \begin{aligned} D^n \cdot f = A^n + A_1 l^{n-1} m + A_2 l^{n-2} m^2 + \cdots \\ + \vartheta(Bl^{n-1} + B_1 l^{n-2} m^2 + B_2 l^{n-3} m^3 \cdots). \end{aligned}$$

Hier sind die A, B Invarianten; sind l, m in den Coefficienten von f von den Graden α, β, so hat ϑ den Grad $\alpha+\beta$, D den Grad $2(\alpha+\beta)$, P, Q, R die Grade 2β, $\alpha+\beta$, 2α, und die A haben die Grade:

$$n\alpha + 2n\beta + 1,\ (n+1)\alpha + (2n-1)\beta + 1,\ (n+2)\alpha + (2n-2)\beta + 1 \ldots,$$

die B aber die Grade:

$$n\alpha + (2n-1)\beta + 1,\ (n+1)\alpha + (2n-2)\beta + 1,\ (n+2)\alpha + (2n-3)\beta + 1 \ldots.$$

Führen wir also die Bezeichnungen ein:

$$E = \frac{A}{\mathsf{T}^{n\alpha+2n\beta+1}},\quad E_1 = \frac{A_1}{\mathsf{T}^{(n+1)\alpha+(2n-1)\beta+1}},\ \ldots$$

$$F = \frac{B}{\mathsf{T}^{n\alpha+(2n-1)\beta+1}},\quad F_1 = \frac{B_1}{\mathsf{T}^{(n+1)\alpha+(2n-2)\beta+1}},\ \ldots$$

$$\varphi = \frac{l}{\mathsf{T}^{\alpha-\frac{1}{n}}},\qquad \Pi = \frac{P}{\mathsf{T}^{2\beta}},$$

$$\psi = \frac{m}{\mathsf{T}^{\beta-\frac{1}{n}}},\qquad \mathsf{K} = \frac{Q}{\mathsf{T}^{\alpha+\beta}},\qquad \left(\mathsf{T} = D^{\frac{1}{2(\alpha+\beta)}}\right),$$

$$\Omega = \frac{\vartheta}{\mathsf{T}^{\alpha+\beta-\frac{1}{n}}},\qquad \mathsf{P} = \frac{R}{\mathsf{T}^{2\alpha}},$$

so wird die Beziehung zwischen Ω, φ, ψ genau der Beziehung zwischen ϑ, l, m ähnlich:

$$\Omega^2 = -\tfrac{1}{2}(\Pi\varphi^2 + 2\,\mathsf{K}\varphi\psi + \mathsf{P}\psi^2),$$

die Gleichung (4) aber verwandelt sich in:

$$f = E\varphi^n + E_1\varphi^{n-1}\psi + E_2\varphi^{n-2}\psi^2 \dots$$
$$+ \Omega(F\varphi^{n-1} + F_1\varphi^{n-2}\psi + F_2\varphi^{n-3}\psi^2 \dots).$$

Hier sind die E, F absolute Invarianten; ebenso Π, K, P. Hat man also eine zweite Form f', deren absolute Invarianten dieselben Werthe wie bei f haben, und unterscheidet man sonst alles auf f' Bezügliche durch einen oben beigesetzten Strich, so ist

$$f' = E\varphi'^n + E_1\varphi'^{n-1}\psi' + E_2\varphi'^{n-2}\psi'^2 \dots$$
$$+ \Omega'(F\varphi'^{n-1} + F_1\varphi'^{n-2}\psi' + F_2\varphi'^{n-3}\psi'^2 \dots),$$

während zwischen Ω', φ', ψ' die Gleichung besteht:

$$\Omega'^2 = -\tfrac{1}{2}(\Pi\varphi'^2 + 2\,\mathsf{K}\varphi'\psi' + \mathsf{P}\psi'^2).$$

Bezüglich der Gleichheit der Invarianten ist nur zu bemerken, dass dieselbe sich zunächst nur auf rationale bezieht; aber da nur die beiden Irrationalitäten

$$\mathsf{T}\,,\ \mathsf{T}'$$

vorkommen, so kann man durch passende Wahl der $2(\alpha+\beta)^{\text{ten}}$ Wurzeln auch die Identität der durch E, F etc. bezeichneten Invarianten erreichen.

Die Theorie der quadratischen Formen lehrt nun bekanntlich, dass, wenn ϱ, σ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\Pi + 2\varrho\,\mathsf{K} + \varrho^2\,\mathsf{P} = 0$$

sind, sowohl $\varphi + \varrho\psi$, $\varphi + \sigma\psi$ als $\varphi' + \varrho\psi'$, $\varphi' + \sigma\psi'$ Quadrate linearer Ausdrücke sind, und dass unter den hier festgehaltenen Voraussetzungen immer σ von ϱ verschieden ist. Nehmen wir zunächst an, P sei von Null verschieden. Dann ist weder ϱ noch σ unendlich gross; man setze

$$\varphi + \varrho\psi = X^2 \qquad \varphi' + \varrho\psi' = X'^2$$
$$\varphi + \sigma\psi = Y^2 \qquad \varphi' + \sigma\psi' = Y'^2,$$

und bestimme die Vorzeichen der X, Y, X', Y' so, dass

$$\Omega = \sqrt{-\tfrac{1}{2}\Pi}\cdot XY\ ,\quad \Omega' = \sqrt{-\tfrac{1}{2}\Pi}\cdot X'Y'.$$

Aus den Gleichungen:

(5) $$X = X'\ ,\quad Y = Y'$$

folgt dann auch

$$\varphi = \varphi'\ ,\quad \psi = \psi'\ ,\quad \Omega = \Omega',$$

und demnach

$$f = f'.$$

Durch die lineare Substitution (5) *wird also f in f' übergeführt.* Und diese Substitution ist immer eine solche, aus welcher x_1, x_2 und x_1', x_2' sich wirklich bestimmen lassen; denn wenn X, Y oder X', Y' nur durch einen Factor unterschieden wären, so hätten φ, ψ oder φ', ψ' einen gemeinsamen Factor, was ausgeschlossen ist.

Ist $\mathsf{P} = 0$ und Π von Null verschieden, so braucht man nur φ mit ψ, φ' mit ψ' zu vertauschen, um dieselben Schlüsse zu machen. Ist endlich $\Pi = 0$ und $\mathsf{P} = 0$, so ist K nothwendig von Null verschieden, und φ, ψ, φ', ψ' sind Quadrate. Setzt man also

$$\varphi = X^2 \quad , \quad \varphi' = X'^2$$
$$\psi = Y^2 \quad , \quad \psi' = Y'^2,$$

so kann man wieder die Vorzeichen der X, Y, X', Y', so bestimmen, dass

$$\Omega = \sqrt{-\mathsf{K}} \cdot XY \quad , \quad \Omega' = \sqrt{-\mathsf{K}} \cdot X', Y'.$$

und man hat also $f = f'$ durch die lineare Substitution

$$X = X' \quad , \quad Y = Y'.$$

Hiermit sind die ausgesprochenen Sätze bewiesen.

II.

Ich werde jetzt auf die Formen fünfter Ordnung den in I. aufgestellten Satz anwenden, muss aber zunächst die Bildungen wieder aufzählen, wie sie von Herrn Gordan und mir in den Annali di Matematica Ser. II. Tom. I. und von Herrn Gordan in Crelle's Journal Bd. 69. gegeben sind. Ist symbolisch

$$f = a_x^5,$$

so hat man zunächst die quadratische Covariante

$$i = (ab)^4 \, a_x \, b_x = i_x^2,$$

sodann die cubische:

$$j = -\tfrac{1}{2} \, (ai)^2 \, a_x^3 = j_x^3,$$

aus welcher die ferneren quadratischen

$$\tau = (j\,j')^2 \, j_x j_x' \quad , \quad \vartheta = (i\tau) \, i_x \, \tau_x$$

und die lineare

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \, (j\,i)^2 \, j_x$$

folgen. Wie Herr Gordan (Crelle's Journ. Bd. 69. p. 343.) gezeigt hat, existiren ausser dieser nur noch folgende lineare Covarianten:

$$\beta = (i\alpha) \, i_x,$$
$$\gamma = (\tau\alpha) \, \tau_x,$$
$$\delta = (i\gamma) \, i_x.$$

Die vier Invarianten sind:

$$A = \tfrac{1}{2} \, (ii')^2 \; , \; B = \tfrac{1}{2} \, (i\tau)^2 \; , \; C = \tfrac{1}{2} \, (\tau\tau')^2 \; , \; R = \tfrac{1}{2} \, (i\alpha) \, (i\gamma).$$

Ausserdem sind von Wichtigkeit die Invarianten:

$$2M = (i\alpha)^2 = 2(AB - 3C)$$
$$2N = (\tau\alpha)^2 = \tfrac{1}{2}(AC - B^2);$$

R aber ist mit A, B, C durch die Gleichung verbunden:

$$R^2 = -\left\{AN^2 - 2BMN + CM^2\right\}.$$

Soll nun der in I. nicht behandelte Ausnahmefall eintreten, dass nicht zwei wesentlich verschiedene lineare Covarianten vorhanden sind, so müssen die aus den vier linearen Covarianten zusammengesetzten Determinanten

$$(\alpha\beta),\ (\alpha\gamma),\ (\alpha\delta),\ (\beta\gamma),\ (\beta\delta),\ (\gamma\delta)$$

sämmtlich verschwinden. Nun ist

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta) &= -(i\alpha)^2 = -2M\\
(\alpha\gamma) &= -(\tau\alpha)^2 = -2N\\
(\alpha\delta) &= -(i\gamma)(i\alpha) = -2R\\
(\beta\gamma) &= (i\alpha)(i\tau)(\tau\alpha) = (i\alpha)(i\gamma) = 2R\\
(\beta\delta) &= (i\alpha)(i'\gamma)(ii') = \tfrac{1}{2}(ii')^2(\alpha\gamma) = -2AN\\
(\gamma\delta) &= (\tau\alpha)(i\gamma)(\tau i) = (\tau\alpha)(i\tau')(\tau'\alpha)(\tau i)\\
&= -\left\{(\tau\alpha)^2(i\tau')^2 - \tfrac{1}{2}(\tau\tau')^2(\alpha i)^2\right\} = -4BN + 2CM.
\end{aligned}$$

Man sieht hieraus, dass nur M und N zu verschwinden brauchen; nach der oben angeführten Gleichung verschwindet dann auch R, und somit alle jene Determinanten. Der Fall $M = 0$, $N = 0$ kann aber auf zwei verschiedene Arten eintreten, indem

$$1)\ B = 0\ ,\ C = 0$$
$$2)\ B = \frac{A^2}{3}\ ,\ C = \frac{A^3}{9}.$$

Man kann aber den Satz aussprechen:

Formen fünfter Ordnung mit identischen absoluten Invarianten sind stets linear in einander überführbar, sobald nicht gleichzeitig B und C, oder $B - \frac{A^2}{3}$ und $C - \frac{A^3}{9}$ verschwinden.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass nicht auch noch in anderen Fällen die Ueberführung möglich sei; bei derselben aber müssen dann andere Principien zur Anwendung kommen.

III.

Bei den Formen sechster Ordnung tritt, wenn symbolisch

$$f = a_x^6 = b_x^6 \ldots$$

gesetzt wird, zunächst die Form vierter Ordnung auf

$$k = 3(ab)^4 a_x^2 b_x^2 = k_x^4$$

(vgl. die angeführte Abhandl.), so wie die Invariante

$$A = \frac{1}{2}\,(ab)^6.$$

Aus k ergiebt sich die Reihe der Covarianten zweiter Ordnung:

$$(1)\qquad \begin{cases} l = (ka)^4\, a_x^2 = l_x^2 \\ m = (kl)^2\, k_x^2 = m_x^2, \\ n = (km)^2 k_x^2 = n_x^2 \end{cases}$$

und ihre Functionaldeterminanten:

$$(2)\qquad \begin{cases} \nu = (lm)\; l_x\, m_x = \nu_x^2 \\ \mu = (nl)\; n_x\, l_x = \mu_x^2\,. \\ \lambda = (mn)\, m_x\, n_x = \lambda_x^2 \end{cases}$$

Wie Hr. Gordan (Crelle's Journ. Bd. 69.) bewiesen hat, ist die Reihe der Covarianten zweiter Ordnung hiermit abgeschlossen.

Aus k entspringen die Invarianten

$$B = \frac{1}{2}\,(kk')^4\quad,\quad C = \frac{1}{6}\,(kk')^2\,(k'k'')^2\,(k''k)^2;$$

aus l, m, n ergeben sich die Bildungen:

$$\begin{aligned} A_{ll} &= \tfrac{1}{2}\,(ll')^2 &&= 2\left(C + \tfrac{AB}{3}\right) \\ A_{mm} &= \tfrac{1}{2}\,(mm')^2 &&= D \\ A_{nn} &= \tfrac{1}{2}\,(nn')^2 &&= BD + \tfrac{8}{9}\,B^2C + 8\,AC^2 \\ A_{mn} &= \tfrac{1}{2}\,(mn)^2 &&= 4\,C^2 + \tfrac{16}{3}\,ABC + \tfrac{4}{9}\,B^3 \\ A_{nl} &= \tfrac{1}{2}\,(nl)^2 &&= D \\ A_{lm} &= \tfrac{1}{2}\,(lm)^2 &&= \tfrac{4}{9}\,B^2 + 4\,AC. \end{aligned}$$

Zu diesen, welche sich durch die vier unabhängigen Invarianten A, B, C, D ausdrücken, tritt noch die fünfte hinzu

$$R = -\,\frac{1}{2}\,(lm)\,(mn)\,(nl),$$

deren Quadrat sich durch die Gleichung

$$R^2 = \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} \\ A_{nl} & A_{nl} & A_{nn} \end{vmatrix}$$

ausdrückt.

Soll nun die in I. vorgesehene Transformation eintreten können, so dürfen nicht zwei der quadratischen Formen 1. 2. einen linearen Factor gemein haben. Untersuchen wir also, in welchen Fällen alle Resultanten je zweier jener Formen verschwinden, und welche Fälle also oben ausgeschlossen sind.

Sind $\varphi = \varphi_x^2$, $\psi = \psi_x^2$ zwei quadratische Formen, so ist ihre Resultante bekanntlich:

$$\begin{aligned} &(\varphi\varphi')^2\;(\psi\psi')^2 - (\varphi\psi)^2(\varphi'\;\psi')^2 \\ &= A_{\varphi\varphi}\;A_{\psi\psi} - A_{\varphi\psi}^2. \end{aligned}$$

Wir müssen also, um die betreffenden Gleichungen aufstellen zu können, ausser den oben angeführten Invarianten noch die folgenden kennen:

$$\begin{array}{lllll} A_{l\lambda}\ , & A_{m\lambda}\ , & A_{n\lambda} & A_{\lambda\lambda}\ , & A_{\mu\nu} \\ A_{l\mu}\ , & A_{m\mu}\ , & A_{n\mu} & A_{\mu\mu}\ , & A_{\nu\lambda} \\ A_{l\nu}\ , & A_{m\nu}\ , & A_{n\nu} & A_{\nu\nu}\ , & A_{\lambda\mu}. \end{array}$$

Sind zwei quadratische Formen gegeben, deren eine eine Functionaldeterminante ist:

$$\varphi = \varphi_x^2\ ,\ \omega = (\chi\vartheta)\ \chi_x\ \vartheta_x\ ,$$

so ist ihre simultane Invariante:

$$A_{\varphi\omega} = (\chi\vartheta)\ (\chi\varphi)\ (\chi\vartheta).$$

Stimmt eine der Formen χ, ϑ mit φ überein, so ist

$$A_{\varphi\omega} = (\chi\varphi)\ (\chi\varphi')\ (\varphi'\varphi) = 0.$$

Man hat also zunächst:

$$A_{l\lambda} = A_{m\mu} = A_{n\nu} = 2\,R$$
$$A_{m\lambda} = A_{n\lambda} = A_{l\mu} = A_{n\mu} = A_{l\nu} = A_{m\nu} = 0.$$

Sind sodann zwei Functionaldeterminanten gegeben:

$$v = (\varphi\psi)\ \varphi_x\ \psi_x = v_x^2\ ,\ w = (\chi\vartheta)\ \chi_x\ \vartheta_x = w_x^2\ ,$$

so hat man für ihre simultane Invariante zunächst den Ausdruck:

$$(vw)^2 = (\varphi\psi)\ (\varphi w)\ (\psi w)\ ;$$

aber es ist

$$w_x\ w_y = \tfrac{1}{2}\,(\chi\vartheta)\ (\chi_x\ \vartheta_y + \chi_y\ \vartheta_x),$$

und daher

$$A_{vw} = (vw)^2 = \tfrac{1}{2}\ (\varphi\psi)\ (\chi\vartheta)\ \{(\varphi\chi)\ (\psi\vartheta) + (\psi\chi)\ (\varphi\vartheta)\}\ .$$

Aber bekanntlich ist:

$$(\varphi\psi)\ (\chi\vartheta)\,.\,(\varphi\chi)\ (\psi\vartheta) = \tfrac{1}{2}\ \{(\varphi\psi)^2\ (\chi\vartheta)^2 + (\varphi\chi)^2\ (\psi\vartheta)^2 - (\psi\chi)^2\ (\varphi\vartheta)^2\}$$
$$(\varphi\psi)\ (\chi\vartheta)\,.\,(\chi\psi)\ (\varphi\vartheta) = \tfrac{1}{2}\ \{(\varphi\psi)^2\ (\chi\vartheta)^2 + (\psi\chi)^2\ (\varphi\vartheta)^2 - (\varphi\chi)^2\ (\psi\vartheta)^2\}$$

und also

$$\begin{aligned} A_{vw} &= \tfrac{1}{2}\ \{(\varphi\chi)^2\ (\psi\vartheta)^2 - (\psi\chi)^2\ (\varphi\vartheta)^2\} \\ &= \tfrac{1}{2}\ \ (A_{\varphi\chi}\ A_{\psi\vartheta} - A_{\psi\chi}\ A_{\varphi\vartheta})\,. \end{aligned}$$

Daher hat man:

$$\begin{array}{ll} A_{\lambda\lambda} = \tfrac{1}{2}\ (A_{mm}\ A_{nn} - A_{mn}^2) & A_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\ (A_{ml}\ A_{nl} - A_{ll}\ \ A_{mn}) \\ A_{\mu\mu} = \tfrac{1}{2}\ (A_{nn}\ A_{ll} - A_{nl}^2) & A_{\nu\lambda} = \tfrac{1}{2}\ (A_{nm}\ A_{lm} - A_{mm}\ A_{nl}) \\ A_{\nu\nu} = \tfrac{1}{2}\ (A_{ll}\ \ A_{mm} - A_{ml}^2) & A_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}\ (A_{ln}\ A_{mn} - A_{mn}\ A_{lm})\ ; \end{array}$$

es sind diese Grössen bis auf einen numerischen Factor die Unterdeterminanten der Determinante R^2.

Bilden wir nun die Resultanten. Diejenigen von l, m, n gegen einander sind:

$$\begin{aligned} R_{lm} &= A_{ll}\ A_{mm} - A_{lm}^2 \\ R_{ln} &= A_{ll}\ A_{nn} - A_{ln}^2 \\ R_{mn} &= A_{mm}A_{nn} - A_{mn}^2. \end{aligned}$$

Sind diese, wie wir voraussetzen, sämmtlich gleich Null, so verschwin-

den $A_{\lambda\lambda}$, $A_{\mu\mu}$, $A_{\nu\nu}$; die Resultanten von l, m, n gegen λ, μ, ν liefern also die einzige Gleichung

$$R = 0.$$

Und da die aus den Unterdeterminanten von R^2 zusammengesetzten Resultanten von λ, μ, ν gegen einander offenbar R^2 als Factor enthalten, so verschwinden damit alle in Rede stehenden Resultanten.

In der öfters citirten Abhandlung ist gezeigt, dass schon die beiden Gleichungen

$$R = 0, \; A_{ll} A_{mm} - A_{lm}^2 = 0$$

genügen, um alle anderen Unterdeterminanten von R^2 verschwinden zu machen. *Das Nichtverschwinden dieser beiden Ausdrücke ist daher die nothwendige, aber auch hinreichende Bedingung dafür, dass auf die oben angegebene Weise die lineare Transformation vor sich gehen könne.*

Durch diese Betrachtungen erscheinen die von Herrn Gordan und mir in den Annali di Matemat. gegebenen typischen Darstellungen der Formen 5^{ten} und 6^{ten} Grades in einem neuen Lichte. Sie geben einerseits die lineare Ueberführung von Formen mit identischen absoluten Invarianten für alle Fälle, in denen eine jener typischen Darstellungen möglich ist. Aber man erkennt andrerseits, dass jene typischen Darstellungen überhaupt alle Fälle umfassen, in denen dergleichen möglich ist, indem, wenn sie unmöglich werden, überhaupt keine solche typische Darstellung mehr ausgeführt werden kann.

Göttingen, den 27. November 1869.

Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Im Folgenden will ich einige Endformeln zusammenstellen, welche sich auf das Problem der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung beziehen, oder, was dasselbe ist, auf das Problem, die Gleichung einer solchen Curve in die canonische Form

$$f = a\,(x^3 + y^3 + z^3) + 6\,b\,x\,y\,z \tag{1}$$

zu bringen. Von den beiden Constanten a und b kann eine gleich 1 gesetzt werden; es ist aber besser beide zu behalten.

Ist

$$\chi = x^3 + y^3 + z^3, \tag{2}$$

so ist, in Bezug auf die neuen Variabeln x, y, z der Term $6\,x\,y\,z$ die Function Δ_χ *); sie soll, wie alle in Bezug auf die neuen Variabeln x, y, z ausgeführten Bildungen durch einen obern Strich von der entsprechenden Bildung in Bezug auf die ursprünglichen Variabeln unterschieden werden. Dann ist also

$$\Delta'_\chi = 6\,x\,y\,z, \tag{3}$$

und also

$$f = a\,\chi + b\,\Delta'_\chi; \tag{4}$$

daher auch, wenn r die Determinante der Substitution ist:

$$r^2\,\Delta_f = \Delta'_f = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial a}\,\Delta'_\chi - \frac{\partial \Gamma}{\partial b}\,\chi\right). \tag{5}$$

Die Function Γ entsteht aus der Aronhold'schen Function G, wenn man die Function $\chi = x^3 + y^3 + z^3$ an Stelle von f zu Grunde legt: es ist also für diese Form χ die erste Invariante gleich Null, die zweite gleich -1, und demnach

$$\Gamma = a^4 + 8\,a\,b^3. \tag{6}$$

Man erhält ferner nach Aronhold folgende Bildungen für die Invarianten:

$$\left\{\begin{aligned} r^4\,S &= S' = -\frac{1}{144}\left\{\frac{\partial^2\Gamma}{\partial a^2}\,\frac{\partial^2\Gamma}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial a\,\partial b}\right)^2\right\} = 4\,b\,(b^3 - a^3).\\ r^6\,T &= T' = \frac{1}{16}\left\{\frac{\partial\Gamma}{\partial a}\,\frac{\partial S'}{\partial b} - \frac{\partial\Gamma}{\partial b}\,\frac{\partial S'}{\partial a}\right\} = 8\,b^6 + 20\,a^3\,b^3 - a^6.\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Der Quotient $\frac{b^3}{a^3}$ bestimmt sich also aus der Gleichung:

---

*) Die den verschiedenen Invarianten und Covarianten vorzusetzenden numerischen Factoren sind immer wie bei Aronhold gewählt. (Crelle's Journ. Bd. 55.)

$$(8)\qquad \frac{S^3}{T^2} = \frac{64\, b^3 (b^3 - a^3)^3}{(8\, b^6 + 20\, a^3 b^3 - a^6)^2}$$

und zugleich findet man, wenn eine der Grössen a, b beliebig angenommen ist, und also a und b mittelst der vorstehenden Gleichung bestimmt sind, die Transformationsdeterminante aus der Gleichung:

$$(9)\qquad r^2 = \frac{S}{T}\, \frac{8\, b^6 + 20\, a^3 b^3 - a^6}{4\, b\, (b^3 - a^3)}\,.$$

Um nun die zu einer Lösung a, b gehörigen x, y, z zu finden, hat man zunächst aus (4), (5):

$$(10)\qquad \begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = \chi = \frac{1}{\Gamma} \left\{ \frac{1}{4} f \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial a} - r^2 \Delta \cdot b \right\} \\ x\, y\, z = \frac{1}{6} \Delta'_\chi = \frac{1}{6\Gamma} \left\{ \frac{1}{4} f \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial b} + r^2 \Delta \cdot a \right\}. \end{cases}$$

Benutzen wir ferner die Covariante ψ, wie sie Bd. I. p. 57. dieser Annalen definirt ist. Diese Form ist eine Combinante, daher

$$r^6\, \psi_{a\chi + b\Delta\chi} = \psi'_{a\chi + b\Delta\chi} = \Gamma^2 \cdot \psi'_\chi.$$

Um aber ψ'_χ zu bilden, hat man aus einer der angeführten Formeln, indem für χ $S = 0$, $T = -1$ ist:

$$\psi'_\chi = -3\, \varphi'_\chi + 2\, \chi^2,$$

und

$$\varphi'_\chi = -2 \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 2yz \\ 0 & y & 0 & 2zx \\ 0 & 0 & z & 2xy \\ 2yz & 2zx & 2xy & 0 \end{vmatrix} = 8\, (y^3 z^3 + z^3 x^3 + x^3 y^3),$$

also endlich

$$\psi'_\chi = 2\, (x^3 + y^3 + z^3)^2 - 24\, (y^3 z^3 + z^3 x^3 + x^3 y^3),$$

und

$$(11)\qquad r^6\, \psi = \Gamma^2 \cdot \left\{ 2\, (x^3 + y^3 + z^3)^2 - 24\, (y^3 z^3 + z^3 x^3 + x^3 y^3) \right\}.$$

Dies in Verbindung mit (10) giebt folgende weitere Bestimmungen symmetrischer Functionen von $x\, y\, z$:

$$(12)\qquad \begin{cases} y^3 z^3 + z^3 x^3 + x^3 y^3 = -\frac{r^6 \psi}{24 \Gamma^2} + \frac{1}{12 \Gamma^2} \left\{ \frac{1}{4} f \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial a} - r^2 \Delta \cdot b \right\}^2 \\ x^6 + y^6 + z^6 = \frac{r^6 \psi}{12 \Gamma^2} + \frac{5}{6 \Gamma^2} \left\{ \frac{1}{4} f \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial a} - r^2 \Delta \cdot b \right\}^2. \end{cases}$$

Ausser diesen symmetrischen Functionen findet sich noch das Differenzenproduct der Grössen x^3, y^3, z^3 aus der Function Ω (a. a. O.), welche ebenfalls Combinante ist, und also durch die Formel gegeben wird:

$$r^9\, \Omega = \Omega' = \Gamma^3 \cdot \Omega'_\chi = 144\, \Gamma^3 \cdot \begin{vmatrix} x^5 & x^2 & yz \\ y^5 & y^2 & zx \\ z^5 & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$$= -144\, \Gamma^3 \cdot (x^3 - y^3)\, (y^3 - z^3)\, (z^3 - x^3),$$

so dass

$$(13) \qquad (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3) = -\frac{r^9\,\Omega}{144\,\Gamma^3}.$$

Zu bemerken ist, dass das Vorzeichen der rechten Seite nicht bestimmt ist, weil nur r^2, nicht aber r selbst oben gefunden wurde. Der Ausdruck (13) enthält also aus $\frac{b}{a}$ noch den irrationalen Factor

$$r = \sqrt{\frac{S}{T}\;\frac{8\,b^6 + 20\,a^3\,b^3 - a^6}{4\,b\,(b^3 - a^3)}}.$$

Der numerische Werth der Grösse unter dem Wurzelzeichen besteht aus einer völlig gegebenen, nur von $\left(\frac{b}{a}\right)^3$ abhängigen Grösse, und aus einem willkürlich zu wählenden Factor b^2, welcher, wie man sieht, aus der Irrationalität als solcher ausscheidet.

Man kann nun mit Hülfe der obigen Data die Cuben und das Product der beiden irrationalen Covarianten

$$(14) \qquad \begin{aligned} M &= x^3 + \varepsilon y^3 + \varepsilon^2 z^3 \\ N &= x^3 + \varepsilon^2 y^3 + \varepsilon z^3 \end{aligned}$$

darstellen. Man findet sofort:

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} 8\,\Gamma^3(M^3 + N^3) &= 3\,r^2\,\psi\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial a} - r^2\,\Delta\,b\right) + \\ &\quad + 10\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial a} - r^2\Delta\,b\right)^3 + 216\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial b} + r^2\Delta\,a\right)^3 \\ \Gamma^3(M^3 - N^3) &= 3\,\varepsilon\,(\varepsilon - 1)\,r^9\,\Omega \\ \Gamma^2\,MN &= \frac{\psi\,r^6}{8} + \tfrac34\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial a} - r^2\,\Delta\,b\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Man sieht aus den ersten beiden Gleichungen, dass folgende beiden Covarianten neunter Ordnung vollständige Cuben sind:

$$16\,\Gamma^3 M^3 = 3\,r^2\psi\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial a} - r^2\,\Delta\,b\right) + 10\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial a} - r^2\,b\right)^3 +$$
$$+ 216\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial b} + r^2\,\Delta\,a\right)^3 + 24\,\varepsilon\,(\varepsilon - 1)\,r^9\,\Omega.$$
$$16\,\Gamma^3 N^3 = 3\,r^2\,\psi\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial a} - r^2\,\Delta\,b\right) + 10\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial a} - r^2\,b\right)^3$$
$$+ 216\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial b} + r^2\,\Delta\,a\right)^3 - 24\,\varepsilon\,(\varepsilon - 1)\,r^9\,\Omega.$$

Zieht man die Cubikwurzeln, und zwar so, dass der dritten Gleichung (15) genügt wird, so ist schliesslich

$$\begin{aligned} 3\,x^3 &= \frac{1}{\Gamma}\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial a} - r^2\,\Delta\,b\right) + M + N \\ 3\,y^3 &= \frac{1}{\Gamma}\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial a} - r^2\,\Delta\,b\right) + \varepsilon M + \varepsilon^2 N \\ 3\,z^3 &= \frac{1}{\Gamma}\left(\tfrac14 f\,\frac{\partial\Gamma}{\partial a} - r^2\,\Delta\,b\right) + \varepsilon^2 M + \varepsilon N, \end{aligned}$$

wodurch die letzten Darstellungen völlig gegeben sind.

Göttingen, den 20. August 1869.

Analytisch-geometrische Studien.

Von M. Reiss*).

Erste Abtheilung.

Die Elimination der Coefficienten aus vollständigen homogenen Gleichungen und ihre Anwendung auf algebraische Linien und Flächen.

1.

Jede homogene Function von k Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_k$ besteht aus Gliedern von der Form:

$$K_r \, x_1^{\varkappa_{1r}} \ldots x_i^{\varkappa_{ir}} \ldots x_k^{\varkappa_{kr}};$$

worin K_r den von den Veränderlichen unabhängigen Coefficienten bedeutet. Die Exponenten $\varkappa_{1r} \ldots \varkappa_{ir} \ldots \varkappa_{kr}$ sind entweder positive ganze Zahlen oder $= 0$. Ihre Summe ist in allen Gliedern dieselbe; sie heisst der Grad der homogenen Function und werde durch n bezeichnet.

Ist eine homogene Function zerlegbar, so kann sie nur in andere homogene Functionen niedrigeren Grads zerlegt werden. Homogene Functionen von zwei Veränderlichen sind immer zerlegbar; die von mehr als zwei Veränderlichen können auch unzerlegbar sein.

Die Anzahl aller Variationen $\varkappa_{1r} \ldots \varkappa_{ir} \ldots \varkappa_{kr}$, welche den oben aufgestellten Bedingungen Genüge leisten, ist

$$\frac{(k+n-1)\ (k+n-2)\ \ldots\ (k+1)\, k}{1\ \ .\ \ 2\ \ \ldots\ (n-1)\, n};$$

wofür wir abkürzend N schreiben werden. Diese Variationen kann man ihrer willkürlichen, aber bestimmten Ordnung nach, durch

$$\varkappa_{11} \ldots \varkappa_{k1};\ \ldots \varkappa_{1r} \ldots \varkappa_{kr};\ \ldots \varkappa_{1N} \ldots \varkappa_{kN};$$

darstellen, indem man dem Suffixum r nach und nach die Werthe $1, 2 \ldots N$ beilegt.

*) Leider ist der kenntnissreiche Verfasser vor Kurzem einem langjährigen Leiden erlegen.

Entspricht jede Variation einem Gliede der homogenen Function, besteht diese also aus N Gliedern, so ist sie eine vollständige und wird durch

$$\Sigma K_r\, x_1^{\varkappa_{1r}} \ldots x_i^{\varkappa_{ir}} \ldots x_k^{\varkappa_{kr}}$$

bezeichnet. Die Ordnung der Glieder wird durch die der Variationen bestimmt.

Wir erstrecken unsere Untersuchungen nur auf vollständige homogene Functionen und zwar nur auf solche, welche mehr als zwei Veränderliche enthalten. Die Coefficienten $K_1 \ldots K_r \ldots K_N$ werden dabei als willkürliche, von einander unabhängige Grössen angesehen. Von den Veränderlichen $x_1 \ldots x_i \ldots x_k$ wird angenommen, dass sie durch die (übrigens unbestimmte) Gleichung

$$(1) \qquad \Sigma K_r\, x_1^{\varkappa_{1r}} \ldots x_i^{\varkappa_{ir}} \ldots x_k^{\varkappa_{kr}} = 0$$

unter einander verbunden seien und dass ausserdem keine weitere Relation zwischen ihnen bestehe. Hat man mehrere Systeme zusammengehöriger Werthe der Veränderlichen zu betrachten, so werden auch diese als von einander unabhängig vorausgesetzt. Solche Systeme werden wir zu ihrer genaueren Unterscheidung durch $x_{1s} \ldots x_{is} \ldots x_{ks}$ bezeichnen; so dass jedes System durch den Werth von s partikularisirt wird. Demgemäss erhält die Gleichung (1) die Form:

$$(1') \qquad \Sigma K_r\, x_{1s}^{\varkappa_{1r}} \ldots x_{is}^{\varkappa_{ir}} \ldots x_{ks}^{\varkappa_{kr}} = 0.$$

Giebt man dem Suffixum s nach und nach die N Werthe $1 \ldots N$, so bestimmt man N Systeme:

$$(\mathrm{I}) \qquad x_{11} \ldots x_{k1}\,;\ \ldots x_{1s} \ldots x_{ks}\,;\ \ldots x_{1N} \ldots x_{kN},$$

und erhält aus (1′) die N Gleichungen:

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Sigma K_r\, x_{11}^{\varkappa_{1r}} \ldots x_{k1}^{\varkappa_{kr}} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Sigma K_r\, x_{1s}^{\varkappa_{1r}} \ldots x_{ks}^{\varkappa_{kr}} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Sigma K_r\, x_{1N}^{\varkappa_{1r}} \ldots x_{kN}^{\varkappa_{kr}} = 0 \end{array}\right. ,$$

welche in Beziehung auf die Coefficienten $K_1 \ldots K_N$ linear sind und aus welchen man diese N Grössen eliminiren kann. Das Resultat ist eine Gleichung $D = 0$, in welcher D eine Determinante N^{ten} Grades bedeutet, deren Elemente allgemein durch

$$x_{1s}^{\varkappa_{1r}} \,..\, x_{is}^{\varkappa_{ir}} \,..\, x_{ks}^{\varkappa_{kr}}$$

dargestellt werden. Giebt man hier dem Suffixum r nach und nach alle seine Werthe $1 \,..\, N$, während s unverändert bleibt, so erhält man eine Horizontalreihe der Determinante D; zu deren vollständiger Darstellung man sodann auch für s und nach die Werthe $1 \,..\, N$ zu setzen hat.

Da es unsern Annahmen zufolge, zwischen den in den Gleichungen (2) enthaltenen Grössen keine anderen Beziehungen giebt als eben diese Gleichungen, so sind diese von einander unabhängig und die Determinante D kann nicht identisch verschwinden. Andrerseits kann man aus den Gleichungen (2) keine andere als $D = 0$ herleiten, da sie alle zur Elimination der N Coefficienten erforderlich sind. Man sieht hieraus, dass die Gleichung $D = 0$ nothwendig und hinreichend ist, wenn jedes der N Systeme (I) der allgemeinen Gleichung (1′) Genüge leisten soll.

Eine Eigenschaft der Determinante D, welche besondere Berücksichtigung verdient, besteht darin, dass sie unzerlegbar ist. Sie ist nämlich in Beziehung auf jedes der N Systeme (I) eine vollständige homogene Function n^{ten} Grades und lässt sich daher auf die Form:

$$\Sigma K_{sr}\, x_{1s}^{\varkappa_{1r}} \,..\, x_{is}^{\varkappa_{ir}} \,..\, x_{ks}^{\varkappa_{kr}}$$

bringen. Hierbei ist zu bemerken, dass die Coefficienten $K_{s1} \,..\, K_{sN}$ keine der Grössen $x_{1s} \,..\, x_{ks}$ enthalten, dass sie vielmehr ausschliesslich Functionen der in den anderen $N - 1$ Systemen enthaltenen Grössen sind. Es finden daher unseren Annahmen zufolge keine Beziehungen zwischen den N Coefficienten $K_{s1} \,..\, K_{sN}$ statt. Wäre nun D das Product zweier homogener Functionen

$$\Sigma L_t\, x_{1s}^{\lambda_{1t}} \,..\, x_{ks}^{\lambda_{kt}} \quad \text{und} \quad \Sigma M_u\, x_{1s}^{\mu_{1u}} \,..\, x_{ks}^{\mu_{ku}},$$

resp. vom l^{ten} und m^{ten} Grade, so wären die Coefficienten L_t und M_u mit den Coefficienten K_{sr} durch N Gleichungen verbunden, welche man erhält, wenn man das Product entwickelt und Glied für Glied mit

$$\Sigma K_{sr}\, x_{1s}^{\varkappa_{1r}} \,..\, x_{ks}^{\varkappa_{kr}}$$

vergleicht. Die Anzahl der L_t ist aber

$$= \frac{(k + l - 1) \,..\, k}{1 \,.\,.\,.\,.\, l};$$

die der M_u

$$= \frac{(k + m - 1) \,..\, k}{1 \,.\,.\,.\, m};$$

auch darf man offenbar für eine dieser Grössen den Werth willkürlich

festsetzen, wonach sich die Anzahl aller Unbekannten auf

$$\frac{(k+l-1)\,..\,k}{1\,.\,.\,.\,.\,l} + \frac{(k+m-1)\,..\,k}{1\,.\,.\,.\,.\,m} - 1$$

beläuft. Erwägt man nunmehr, dass $l + m = n$ und $k > 2$, so findet man jedenfalls

$$N = \frac{(k+n-1)\,..\,k}{1\,.\,.\,.\,.\,n} > \frac{(k+l-1)\,..\,k}{1\,.\,.\,.\,l} + \frac{(k+m-1)\,..\,k}{1\,.\,.\,.\,m} - 1;$$

es gäbe also mehr Gleichungen als Unbekannte; was auf eine Anzahl Beziehungen zwischen den Coefficienten K_{sr} führen müsste, welche, wie bereits gezeigt worden, im Allgemeinen nicht stattfinden. Die Determinante D kann demzufolge nicht als das Product zweier homogener Functionen dargestellt werden, und ist mithin unzerlegbar.

Aus den bisherigen Erörterungen lässt sich folgender Schluss ziehen:

Es werde die Bedingung festgehalten, dass jedes der N Systeme (I) der allgemeinen Gleichung (1′) Genüge leiste. Kann man, hiervon ausgehend, auf irgend einem andern Wege als dem hier eingeschlagenen der directen Elimination eine nicht identische Gleichung $E = 0$ zwischen den Grössen (I) ermitteln, so muss E entweder mit D übereinstimmen oder es muss $E = D\Delta$ sein, wo Δ einen im Allgemeinen nicht verschwindenden Ausdruck bedeutet, der folglich in der Gleichung $E = 0$ als fremder, überflüssiger und auszuscheidender Divisor enthalten ist.

Denn einerseits hat die Gleichung $D = 0$ überhaupt keinen Divisor, andrerseits giebt es keine andere Beziehung zwischen den Grössen (I).

Dieser Schluss ist für die folgende Untersuchung von grosser, wenn auch nur theoretischer Wichtigkeit, da wir in der That eine indirecte Eliminationsmethode angeben werden, welche auf eine von $D = 0$ verschiedene Gleichung führt.

2.

Man bilde eine Anzahl linearer Functionen der Grössen

$$x_{1s}\;.\;.\;x_{is}\;.\;.\;x_{ks}$$

und bezeichne sie durch

$$(3)\quad \begin{cases} a_{1\nu}\;x_{1s} + \cdot\cdot + a_{i\nu}\;x_{is} + \cdot\cdot + a_{k\nu}\;x_{ks} = A_{\nu s}. \\ b_{1\nu}\;x_{1s} + \cdot\cdot + b_{i\nu}\;x_{is} + \cdot\cdot + b_{k\nu}\;x_{ks} = B_{\nu s}. \\ c_{1\nu}\;x_{1s} + \cdot\cdot + c_{i\nu}\;x_{is} + \cdot\cdot + c_{k\nu}\;x_{ks} = C_{\nu s}. \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzt man ν nach und nach $= 1, 2, \ldots n$, so erhält man zunächst aus dem allgemeinen Werthe von $A_{\nu s}$ die n folgenden:

$$(4)\quad \begin{cases} A_{1s} = a_{11}\,x_{1s} + \cdot\cdot + a_{i1}\,x_{is} + \cdot\cdot\; a_{k1}\,x_{ks} \\ A_{2s} = a_{12}\,x_{1s} + \cdot\cdot + a_{i2}\,x_{is} + \cdot\cdot\; a_{n2}\,x_{ks} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_{ns} = a_{1k}\,x_{1s} + \cdot\cdot + a_{in}\,x_{is} + \cdot\cdot\; a_{kn}\,x_{ks} \end{cases}$$

deren Product $A_{1s} \,.\,.\, A_{ns}$ eine vollständige homogene Function n^{ten} Grades von $x_{1s} \,.\,.\, x_{ks}$ ist. Dasselbe gilt von den analogen Producten: $B_{1s} \,.\,.\, B_{ns}$; $C_{1s} \,.\,.\, C_{ns}$; u. s. w. und von dem Ausdruck:

$$K_A \cdot A_{1s} \cdot\cdot A_{ns} + K_B \cdot B_{1s} \cdot\cdot B_{ns} + K_C \cdot C_{1s} \cdot\cdot C_{ns} + \cdot\cdot,$$

in welchem K_A, K_B, K_C .. beliebige Coefficienten bedeuten. Setzt man demgemäss:

$$(5)\quad \begin{cases} K_A \cdot A_{1s} \cdot\cdot A_{ns} + K_B \cdot B_{1s} \cdot\cdot B_{ns} + \cdot\cdot\cdot \\ = \Sigma K_r\, x_{1s}^{\varkappa_{1r}} \cdot\cdot\, x_{ks}^{\varkappa_{kr}} \end{cases}$$

und entwickelt die Producte, so finden sich die Coefficienten $K_1 \,.\,.\, K_N$ als Functionen der Grössen K_A, K_B, .. und $a_{1\nu} \,.\,.\, a_{k\nu}$; $b_{1\nu} \,.\,.\, b_{k\nu}$; .. ausgedrückt und zwar als Functionen, die in Beziehung auf K_A, K_B, .. linear sind. Nimmt man daher an, dass die Anzahl der Gleichungen (3) und folglich auch die der Grössen K_A, K_B .., $= N$ sei: so kann man diese Grössen umgekehrt vermittelst der Werthe von $K_1 \,.\,.\, K_N$ bestimmen; wozu nichts Anderes erfordert wird, als die Auflösung von N Gleichungen ersten Grades zwischen N Unbekannten und wodurch die Grössen K_A, K_B, .. als Functionen von K_1, .. K_N und $a_{1\nu} \,.\,.\, a_{k\nu}$; $b_{1\nu} \,.\,.\, b_{k\nu}$; .. ausgedrückt werden.

Diese allgemeine Betrachtung macht es augenscheinlich, dass man jede gegebene homogene Function

$$\Sigma K_r\, x_{1s}^{\varkappa_{1r}} \,.\,.\, x_{ks}^{\varkappa_{kr}}$$

auf die Form

$$K_A \cdot A_{1s} \cdot\cdot A_{ns} + K_B \cdot B_{1s} \cdot\cdot B_{ns} + \cdot\cdot$$

bringen kann, wo die Grössen: $A_{\nu s}$, $B_{\nu s}$ .. beliebig gegebene lineare Functionen der Veränderlichen bedeuten*). Es ist daher nicht weniger erlaubt, die Gleichung (1′) durch

$$(6)\quad K_A \cdot A_{1s} \cdot\cdot A_{ns} + K_B \cdot B_{1s} \cdot\cdot B_{ns} + \cdot\cdot = 0$$

---

*) Man kann die vollständigen homogenen Functionen noch auf eine andere Weise vermittelst linearer Functionen der Veränderlichen darstellen, nämlich unter der Form:

$$K_A\, A_{\nu s}^n + K_B\, B_{\nu s}^n + \cdot\cdot,$$

wo die Anzahl der Glieder ebenfalls $= N$ angenommen wird. Der Beweis der allgemeinen Zulässigkeit dieser Form ist dem obengeführten durchaus analog. Es sei übrigens noch bemerkt, dass dieselbe auf kein anderes Resultat als die im Texte angegebene führen würde.

zu ersetzen. Aus dieser erhält man ferner die den Gleichungen (2) entsprechenden, wenn man in den durch die Grössen

$$A_{1s} \ldots A_{ns}, B_{1s} \ldots B_{ns} \ldots$$

repräsentirten linearen Ausdrücken dem Suffixum s nach und nach alle seine Werthe $1 \ldots N$ zuertheilt. Kann man nun aus den dadurch entstehenden N Gleichungen die Nnk Grössen, $a_{i\nu}, b_{i\nu}, c_{i\nu} \ldots$ eliminiren; mit andern Worten: kann man mit ihrer Hülfe eine nicht identische Gleichung zwischen den Grössen (I) herleiten, so ist dadurch derselbe Zweck wie durch die Gleichung $D = 0$ erreicht. Eine solche indirecte Elimination ist aber leicht ausführbar, wie nunmehr gezeigt werden soll.

3.

Den Zahlen $1 \ldots N$ entnehme man k beliebige, z. B. die k ersten $1 \ldots k$ und verstehe unter σ irgend eine der $N - k$ übrigen, also $k + 1 \ldots N$. Legt man dem Suffixum s nach und nach die Werthe $1 \ldots k, \sigma$ bei, so ergeben sich zunächst aus der ersten der Gleichungen (4) die $k + 1$ folgenden:

$$(7) \quad \begin{cases} a_{11}\, x_{11} + \cdot \cdot + a_{i1}\, x_{i1} + \cdot \cdot + a_{k1}\, x_{k1} = A_{11} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11}\, x_{1k} + \cdot \cdot + a_{i1}\, x_{ik} + \cdot \cdot + a_{k1}\, x_{kk} = A_{1k} \\ a_{11}\, x_{1\sigma} + \cdot \cdot + a_{i1}\, x_{i\sigma} + \cdot \cdot + a_{k1}\, x_{k\sigma} = A_{1\sigma}\,. \end{cases}$$

aus welchen man die k Grössen $a_{11} \ldots a_{i1} \ldots a_{k1}$ eliminiren kann. Dies führt auf eine Gleichung von der Form:

$$(8) \qquad \alpha_{\sigma 1}\, A_{11} + \cdot \cdot + \alpha_{\sigma j}\, A_{1j} + \cdot \cdot + \alpha_{\sigma k}\, A_{1k} + \alpha_{\sigma\sigma}\, A_{1\sigma},$$

in welcher die Grössen $\alpha_{\sigma 1} \ldots \alpha_{\sigma j} \ldots \alpha_{\sigma k}, \alpha_{\sigma\sigma}$ Determinanten k^{ten} Grades bedeuten, die mit je k Horizontalreihen des Systems

$$(9) \quad \begin{cases} x_{11} \;\ldots\; x_{i1} \;\ldots\; x_{k1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{1j} \;\ldots\; x_{ij} \;\ldots\; x_{kj} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{1k} \;\ldots\; x_{ik} \;\ldots\; x_{kk} \\ x_{1\sigma} \;\ldots\; x_{i\sigma} \;\ldots\; x_{k\sigma} \end{cases}$$

gebildet sind. Um diese Determinanten auf zweckmässige Weise darzustellen, bezeichne man allgemein jede Determinante

$$\begin{vmatrix} x_{t\tau}, & x_{tv} & \ldots \\ x_{u\tau}, & x_{uv} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} x_{t\tau}, & x_{u\tau} & \ldots \\ x_{tv}, & x_{uv} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

durch $x\begin{pmatrix} t & u & \ldots \\ \tau & v & \ldots \end{pmatrix}$; indem man die oberen Reihen mit den ersten Suffixen, die untere mit den zweiten bildet und dabei die Ordnung der

Suffixe festhält (vergleiche des Verfassers *„Beiträge zur Theorie der Determinanten“* S. 1.). Demzufolge findet man:

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha_{\sigma 1} = + x \begin{pmatrix} 1 \ldots k \\ 2\,3 \ldots k\sigma \end{pmatrix}; \ldots \alpha_{\sigma j} = (-1)^{j-1} x \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots k \\ 1 \ldots j \;\; 1, j+1 \ldots k\sigma \end{pmatrix}; \\ \ldots \alpha_{\sigma k} = (-1)^{k-1} x \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots k \\ 1 \ldots k-1\,\sigma \end{pmatrix}; \; \alpha_{\sigma\sigma} = (-1)^k x \begin{pmatrix} 1 \ldots k \\ 1 \ldots k \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Da diese Determinanten sich nur durch ihre unteren Suffixenreihen unterscheiden, so genügt es, sie durch dieselben anzudeuten und einfacher

$$(10^1)\quad \begin{cases} \alpha_{\sigma 1} = + (2\,3 \ldots k\sigma); \ldots \alpha_{\sigma j} = (-1)^{j-1} . (1 \ldots j-1, j+1 \ldots k\sigma); \\ \ldots \alpha_{\sigma k} = (-1)^{k-1} . (1 \ldots k-1, \sigma); \; \alpha_{\sigma\sigma} = (-1)^k . (1 \ldots k) \end{cases}$$

zu schreiben.

Bringt man nun die Gleichung (8) auf die Form:

$$- A_{1\sigma}\, \alpha_{\sigma\sigma} = A_{11}\, \alpha_{\sigma 1} + \cdots + A_{1j}\, \alpha_{\sigma j} + \cdots + A_{1k}\, \alpha_{\sigma k};$$

und verfährt mit jeder der Gleichungen (4) wie soeben mit der ersten geschehen: so gelangt man zu den n folgenden:

$$(11)\qquad \begin{cases} - A_{1\sigma}\, \alpha_{\sigma\sigma} = A_{11}\, \alpha_{\sigma 1} + \cdots + A_{1k}\, \alpha_{\sigma k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - A_{\nu\sigma}\, \alpha_{\sigma\sigma} = A_{\nu 1}\, \alpha_{\sigma 1} + \cdots + A_{\nu k}\, \alpha_{\sigma k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - A_{n\sigma}\, \alpha_{\sigma\sigma} = A_{n1}\, \alpha_{\sigma 1} + \cdots + A_{nk}\, \alpha_{\sigma k}. \end{cases}$$

Das Product $(-1)^n A_{1\sigma} \ldots A_{\nu\sigma} \ldots A_{n\sigma} . \alpha^n_{\sigma\sigma}$ ist eine vollständige homogene Function n^{ten} Grades der Grössen $\alpha_{\sigma 1} \ldots \alpha_{\sigma j} \ldots \alpha_{\sigma k}$. Bezeichnet man es demgemäss durch

$$(12)\qquad \begin{cases} (-1)^n A_{1\sigma} \ldots A_{n\sigma} . \alpha^n_{\sigma\sigma} = \\ \Sigma K_{Ar}\, \alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \ldots \alpha_{\sigma j}^{\varkappa_{jr}} \ldots \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}}, \end{cases}$$

so sind die Coefficienten $K_{A1} \ldots K_{AN}$ ausschliesslich Functionen der Grössen:

$$A_{11} \ldots A_{1k}; \ldots A_{\nu 1} \ldots A_{\nu k}; \ldots A_{n1} \ldots A_{nk};$$

bleiben daher unverändert, wie man auch das Suffixum σ bestimme. Von den Coefficienten der Glieder, in welchen sich

$$\alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \ldots \alpha_{\sigma j}^{\varkappa_{jr}} \ldots \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}}$$

auf eine Potenz $\alpha^n_{\sigma j}$ reducirt, ist noch insbesondere zu bemerken, dass sie durch ein einziges Product: $A_{1j} \ldots A_{nj}$ ausgedrückt werden.

Geht man nun, statt von der ersten der Gleichungen (3), von irgend einer andern derselben aus, und verfährt auf analoge Weise, so erhält man die N Gleichungen:

$$(13)\quad\begin{cases}(-1)^n A_{1\sigma} \,.\,.\, A_{n\sigma} \,.\, \alpha_{\sigma\sigma}^n = \Sigma K_{Ar}\, \alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \,.\,.\, \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}} \\ (-1)^n B_{1\sigma} \,.\,.\, B_{n\sigma} \,.\, \alpha_{\sigma\sigma}^n = \Sigma K_{Br}\, \alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \,.\,.\, \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}} \\ (-1)\; C_{1\sigma} \,.\,.\, C_{n\sigma} \,.\, \alpha_{\sigma\sigma}^n = \Sigma K_{Cr}\, \alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \,.\,.\, \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}} \\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

und aus diesen, wenn allgemein

$$K_A \cdot K_{Ar} + K_B\, K_{Br} + K_C\, K_{Cr} + \cdot \cdot = K_{Sr}$$

gesetzt wird,

$$(-1)^n (K_A \cdot A_{1\sigma} \cdot \cdot A_{n\sigma} + K_B \cdot B_{1\sigma} \cdot \cdot B_{n\sigma} + \cdot \cdot)\, \alpha_{\sigma\sigma}^n$$
$$= \Sigma K_{Sr}\, \alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \,.\,.\, \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}} \,.$$

Nach der allgemeinen Gleichung (6) ist aber

$$K_A \cdot A_{1\sigma} \cdot \cdot A_{n\sigma} + K_B \cdot B_{1\sigma} \cdot \cdot B_{n\sigma} + \cdot \cdot = 0;$$

und folglich

$$(14)\qquad \Sigma K_{Sr}\, \alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \cdot \cdot \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}} = 0.$$

Ferner verschwinden nach derselben Gleichung alle Glieder von

$$\Sigma K_{Sr}\, \alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \cdot \cdot \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}} \quad ,$$

in welchen sich

$$\alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \cdot \cdot \alpha_{\sigma j}^{\varkappa_{jr}} \cdot \cdot \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}}$$

auf eine Potenz $\alpha_{\sigma j}^n$ reducirt; denn die Coefficienten dieser Glieder sind von der Form: $K_A \cdot A_{1j} \cdot \cdot A_{nj} + K_B \cdot B_{1j} \cdot \cdot B_{nj} + \cdot \cdot$ und mithin $= 0$.

Da j die k Werthe $1 \,.\,.\, k$ annehmen kann, so besteht die Gleichung (14) nur aus $N - k$ nicht verschwindenden Gliedern, deren Coefficienten K_{Sr} von dem Werthe des Suffixums σ unabhängig sind, denn die in dieser Hinsicht bezüglich der Grössen K_{Ar} gemachte Bemerkung gilt nicht weniger von K_{Br}, K_{Cr} .. und von den Summen $K_A\; K_{Ar} + K_B\; K_{Br} + \cdot \cdot \cdot$ Setzt man daher σ nach und nach $= k+1,\; k+2 \cdot \cdot N$, so erhält man die $N-k$ Gleichungen:

$$(15)\quad\begin{cases}\Sigma K_{Sr}\;\; \alpha_{k+1,1}^{\varkappa_{1r}} \cdot \cdot \alpha_{k+1,k}^{\varkappa_{kr}} = 0 \\ \Sigma K_{Sr}\;\; \alpha_{k+2,1}^{\varkappa_{1r}} \cdot \cdot \alpha_{k+2,k}^{\varkappa_{kr}} = 0 \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ \Sigma K_{Sr}\;\; \alpha_{N1}^{\varkappa_{1r}} \cdot \cdot \alpha_{Nk}^{\varkappa_{kr}} = 0,\end{cases}$$

und aus diesen durch Elimination der $N-k$ Coefficienten K_{Sr} eine

Gleichung $E = 0$, in welcher E eine Determinante $(N-k)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, deren Elemente Producte von der Form:

$$\alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \ldots \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}}$$

sind und folglich keine andern Grössen als die durch (I) bezeichneten enthalten. Um diese Determinante darzustellen, hat man aus allen Werthen von

$$\alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}} \ldots \alpha_{\sigma k}^{\varkappa_{kr}},$$

mit Ausnahme der k Potenzen $\alpha_{\sigma 1}^{n} \ldots \alpha_{\sigma k}^{n}$, eine Reihe zu bilden und in dieselbe für σ nach und nach die Werthe $k+1,\ k+2 \ldots N$ zu setzen.

Die Determinante E ist keine identisch verschwindende, was man folgendermassen beweisen kann:

Man nehme an, dass die Grössen

(II) $$x_{11} \ldots x_{k1};\ \ldots x_{1j} \ldots x_{kj};\ \ldots x_{1k} \ldots x_{kk} \ldots$$

alle bis auf $x_{11} \ldots x_{jj} \ldots x_{kk}$ verschwinden und dass diese sämmtlich $= +1$ seien. Hierdurch geht allgemein

$$\alpha_{\sigma j} = (-1)^{j-1}.(1 \ldots j-1,\ j+1 \ldots k\sigma) \text{ in } (-1)^{k-1}\, x_{j\sigma}$$

über. Vergleicht man nun die Werthe von D und E, welche sich in Folge dieser besondern Annahmen ergeben, so erkennt man, dass sie, vom Vorzeichen abgesehen, übereinstimmen. Der allgemeine Werth der Determinante D ist aber, wie gezeigt worden, eine nicht identisch verschwindende Grösse. Dies muss daher auch von ihrem besonderen Werthe und mithin nicht weniger von dem der Determinante E gelten; woraus sich umgekehrt ergiebt, dass auch der allgemeine Werth von E nicht identisch verschwinden kann.

Es ist somit eine nicht identische Gleichung zwischen den Grössen (I) gefunden, aus welcher alle anderen eliminirt sind.

4.

Die Determinanten D und E sind nicht nur der Form, sondern auch dem Werthe nach verschieden, denn sie sind homogene Functionen der Grössen (I) und als solche resp. vom Grade Nn und $(N-k)kn$; es ist aber $(N-k)kn > Nn$, wenn $k > 2$. Hieraus folgt: $E = D\Delta$ (Art. 1, am Ende). Um Δ zu bestimmen, bemerke man, dass D in Beziehung auf jede der Grössen (I) eine ganze rationale Function n^{ten} Grades ist. Auf denselben Grad steigen in E die Grössen:

(III) $$x_{1,k+1} \ldots x_{k,k+1};\ \ldots x_{1\sigma} \ldots x_{k\sigma};\ \ldots x_{1N} \ldots x_{kN},$$

während die durch (II) bezeichneten darin einen höheren Grad erreichen. Da D in E aufgeht, so ersieht man hieraus, dass der Quotient $\frac{E}{D}$ oder Δ keine der Grössen (III) enthalten kann; dass also der Werth

von Δ unverändert bleiben muss, wie man auch diese Grössen bestimme. Setzt man aber allgemein

$$x_{i\sigma} = e_{\sigma 1}\, x_{i1} + \cdot\cdot + e_{\sigma j}\, x_{ij} + \cdot\cdot + e_{\sigma k}\, x_{ik};$$

so sind die Determinanten

$$\left|\begin{matrix} x_{11} & .. & x_{i1} & .. & x_{k1} \\ . & . & . & . & . \\ x_{1,j-1} & .. & x_{i,j-1} & .. & x_{k,j-1} \\ x_{1,j+1} & .. & x_{i,j+1} & .. & x_{k,j+1} \\ . & . & . & . & . \\ x_{1k} & .. & x_{ik} & .. & x_{kk} \\ x_{1\sigma} & .. & x_{i\sigma} & .. & x_{k\sigma} \end{matrix}\right| \quad \text{und} \quad \left|\begin{matrix} x_{11} & .. & x_{i1} & .. & x_{k1} \\ . & . & . & . & . \\ x_{1,j-1} & .. & x_{i,j-1} & .. & x_{k,j-1} \\ x_{1,j+1} & .. & x_{i,j+1} & .. & x_{k,j+1} \\ . & . & . & . & . \\ x_{1k} & .. & x_{ik} & .. & x_{kk} \\ e_{\sigma j}x_{1j} & .. & e_{\sigma j}x_{ij} & .. & e_{\sigma j}x_{kj} \end{matrix}\right|,$$

oder

$$(1\,..\,j-1\,,\,j+1\,..\,k\sigma) \text{ und } (-1)^{k-j}\, e_{\sigma j}\,.\,(1\,..\,k)$$

identisch. Es kommt also nach (10′),

$$\alpha_{\sigma j} = (-1)^{k-1}\, e_{\sigma j}\, (1\,..\,k)$$

und demgemäss:

$$(16) \qquad E = D\Delta = (1\,..\,k)^{(N-k)n}\, \Delta^0,$$

wo Δ^0 einen Ausdruck bedeutet, der nur mit den willkürlichen Grössen:

$$e_{k+1,1}\, ..\, e_{k+1,k}\,;\, ..\, e_{\sigma 1}\, ..\, e_{\sigma k}\,;\, ..\, e_{N1}\, ..\, e_{Nk};$$

gebildet ist. Da diese in Δ nicht vorkommen, so muss Δ in $(1\,..k)^{(N-k)n}$ aufgehen. Versteht man also unter q eine von den Grössen (II) unabhängige Constante, so muss Δ von der Form $q\,(1\,..\,k)^{N^1}$ sein; denn die Determinante $(1\,..\,k)$ ist im Allgemeinen unzerlegbar. Nun ist schon bemerkt worden, dass $E = \pm D$ und folglich $\frac{E}{D} = \Delta = \pm 1$ wird, wenn alle Grössen (II) bis auf $x_{11}\,..\,x_{jj}\,..\,x_{kk}$ verschwinden und diese sämmtlich $= +1$ sind. In diesem Falle ist aber auch $(1\,..\,k) = +1$ und $\Delta = q$; man findet daher $q = \pm 1$.

Was den Exponenten N^1 betrifft, so wird der Grad von $\frac{E}{D}$ oder Δ als homogene Function der Grössen (II) sowohl durch $(N-k)\,kn - Nn$ als durch $N^1 k$ ausgedrückt. Es ist daher

$$N^1 = (N-k)\, n - N\tfrac{n}{k}\,;$$

und

$$(16') \qquad E = \pm D\,.\,(1\,..\,k)^{(N-k)\,n - N\frac{n}{k}}\,.$$

Wägt man nun den grösseren oder geringeren Werth der Gleichungen $D = 0$ und $E = 0$ gegeneinander ab: so muss man allerdings sagen, dass die erste die Bedingungsgleichung in ihrer reinsten Form darstellt, während die zweite einen überflüssigen Divisor besitzt, dessen Ausscheidung, allgemein zu sprechen, nicht ohne weitläufige Rechnungen zu bewerkstelligen ist und sogar auf erhebliche Schwie-

rigkeiten stossen kann. Andrerseits jedoch gewährt die zweite Form der Bedingungsgleichung den unbestreitbaren Vortheil, dass E eine Determinante niedrigeren Grades als D ist. Hierzu kommt der Umstand, dass sich die Elemente von E nicht wie die von D als Producte aus den Grössen (I) darstellen, sondern als Producte aus Determinanten, welche diese Grössen zu Elementen haben und zwar aus Determinanten, die sämmtlich vom k^{ten}-Grade sind und überdies in Beziehung auf die obern Suffixenreihen übereinstimmen. Der Gewinn, welcher dadurch entsteht, ist namentlich bei den Anwendungen auf algebraische Linien und Flächen für die Wahl der Gleichung $E = 0$ entscheidend; wovon man sich durch die folgenden Betrachtungen überzeugen wird.

5.

Es seien OX_1 und OX_2 zwei gegebene rechtwinkelige Coordinatenaxen; P_s irgend ein Punkt in ihrer Ebene und x_{1s}, x_{2s} dessen auf OX_1 und OX_2 bezogene Coordinaten. Setzt man $k = 3$ und also

$$N = \tfrac{1}{2}\,(n+1)\,(n+2),$$

so erhält die Gleichung (1′) die Form:

$$\Sigma K_r\, x_{1s}^{\varkappa_{1r}}\; x_{2s}^{\varkappa_{2r}}\; x_{3s}^{\varkappa_{3r}} = 0,$$

und stellt die allgemeine Gleichung der ebenen Linien n^{ten} Grades dar, wenn den obigen Bestimmungen rücksichtlich der Grössen x_{1s} und x_{2s} noch die Annahme hinzugefügt wird, dass x_{3s} für alle Werthe von s der positiven Einheit gleich sei. Giebt man diesem Suffixum nach und nach die Werthe $1\,..\,N$, so drückt jede der Gleichungen $D = 0$ und $E = 0$ die Bedingung aus, unter welcher die N Punkte $P_1\,..\,P_N$ auf einer ebenen Linie n^{ten} Grades liegen. Die Elemente der Determinante D sind aber von der Form:

$$x_{15}^{\varkappa_{1r}}\; x_{25}^{\varkappa_{2r}}\; x_{35}^{\varkappa_{3r}}$$

und folglich Producte aus Potenzen der Coordinaten je eines der N Punkte. Andrerseits sind die Elemente von E, welche die Form

$$\alpha_{\sigma 1}^{\varkappa_{1r}}\; \alpha_{\sigma 2}^{\varkappa_{2r}}\; \alpha_{\sigma 3}^{\varkappa_{3r}}$$

haben, 2^n fache Producte aus den analytischen Ausdrücken für n Dreiecke, theils gleiche, theils ungleiche, denn man findet nach den Gleichungen (10^1),

$$\alpha_{\sigma 1} = +\,(2\,3\,\sigma) = \begin{vmatrix} x_{12}, & x_{22}, & x_{32} \\ x_{13}, & x_{23}, & x_{33} \\ x_{1\sigma}, & x_{2\sigma}, & x_{3\sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{12}, & x_{22}, & 1 \\ x_{13}, & x_{33}, & 1 \\ x_{16}, & x_{2\sigma}, & 1 \end{vmatrix};$$

$$\alpha_{\sigma 2} = -(13\sigma) = -\begin{vmatrix} x_{11}, x_{21}, 1 \\ x_{13}, x_{23}, 1 \\ x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, 1 \end{vmatrix} ; \alpha_{\sigma 3} = +(12\sigma) = \begin{vmatrix} x_{11}, x_{21}, 1 \\ x_{12}, x_{22}, 1 \\ x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, 1 \end{vmatrix} .$$

Fragt man also nach der geometrischen Beziehung zwischen N auf einer ebenen Linie n^{ten} Grades liegenden Punkten: so hat die Gleichung $D=0$ in dieser Hinsicht nur einen untergeordneten Werth, da sie etwas Willkürliches und der Frage Fremdes, nämlich ein Axensystem, in Betracht zu ziehen hat. Die Gleichung $E=0$ dagegen ist von jeder Rücksicht auf ein Axensystem durchaus unabhängig; sie drückt vielmehr, wie man sieht, eine Beziehung zwischen Dreiecken aus, von welchen jedes durch drei der N Punkte bestimmt wird und ist aus diesem Grunde schon an sich selbst einer geometrischen Deutung fähig.

Die niedrigsten Werthe von n sind $n=2$ und $n=3$. Im ersten Falle ist: $N=6$; $N^1=2$; $\Delta=(123)^2$ und

$$(17)\quad E = \begin{vmatrix} (234)\,(134) \;, & (234)\,(124) \;, & (134)\,(124) \\ (235)\,(135) \;, & (235)\,(125) \;, & (135)\,(125) \\ (236)\,(136) \;, & (236)\,(126) \;, & (136)\,(126) \end{vmatrix} = 0.$$

Im zweiten Falle kommt: $N=10$; $N^1=11$; $\Delta=(123)^{11}$ und E besteht aus 7 Reihen der Form:

$$(18)\quad \begin{matrix} (23\sigma)^2\,(13\sigma)\,,\ (23\sigma)^2\,(12\sigma)\,,\ (23\sigma)\,(13\sigma)^2, \\ (23\sigma)\,(13\sigma)(12\sigma), (23\sigma)(12\sigma)^2, (13\sigma)^2(12\sigma), (13\sigma)\,(12\sigma)^2, \end{matrix}$$

wobei

$$\sigma = 4,5\,..\,10.$$

Die Folgerungen aus Gleichung (17) sind aus der Theorie der Kegelschnitte zur Genüge bekannt. Die Gleichung (18), welche sich auf die ebenen Linien dritten Grades bezieht, gestattet, wie wir in der dritten Abtheilung sehen werden, eine Reihe von Transformationen, die ihren geometrischen Charakter nicht beeinträchtigen und zu einer viel einfacheren Form der Bedingungsgleichung führen.

Setzt man nunmehr $k=4$ und also $N=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$, so stellt

$$\Sigma K_r\, x_{1s}^{\varkappa_{1r}}\, x_{2s}^{\varkappa_{2r}}\, x_{3s}^{\varkappa_{3r}}\, x_{4s}^{\varkappa_{4r}} = 0$$

die allgemeine Gleichung der Flächen n^{ten} Grades dar, wenn man x_{1s}, x_{2s}, x_{3s} als Coordinaten eines Punktes P_s in Beziehung auf drei gegebene rechtwinkelige Axen betrachtet und ferner annimmt, dass x_{4s} für jeden Werth von s der positiven Einheit gleich sei. Die Gleichung $E=0$ drückt in diesem Falle die Bedingung aus, unter welcher die N Punkte $P_1\,..\,P_N$ auf einer Fläche n^{ten} Grades liegen und

man erkennt leicht, dass sie diese Bedingung als eine Beziehung zwischen Tetraedern darstellt, von welchen jedes durch vier der N Punkte bestimmt wird; denn die Elemente von E haben die Form:

$$\begin{matrix} \varkappa_{1r} & \varkappa_{2r} & \varkappa_{3r} & \varkappa_{4r} \\ \alpha_{\sigma 1} & \alpha_{\sigma 2} & \alpha_{\sigma 3} & \alpha_{\sigma 4} \end{matrix}$$

und es ist

$$\alpha_{\sigma 1} = (234\sigma) = \begin{vmatrix} x_{12}, & x_{22}, & x_{32}, & 1 \\ x_{13}, & x_{23}, & x_{33}, & 1 \\ x_{14}, & x_{24}, & x_{34}, & 1 \\ x_{1\sigma}, & x_{2\sigma}, & x_{3\sigma}, & 1 \end{vmatrix};$$

u. s. w.

Ist $n = 2$, so findet man: $N = 10$; $N^1 = 7$; $\Delta = (1234)^7$, und E besteht aus 6 Reihen der Form

$$(19) \qquad \begin{matrix} (234\sigma)(134\sigma), & (234\sigma)(124\sigma), & (234\sigma)(123\sigma) \\ (134\sigma)(124\sigma), & (134\sigma)(123\sigma), & (124\sigma)(123\sigma) \end{matrix}$$

wo

$$\sigma = 5, 6 \,.\,.\, 10;$$

$E = 0$ ist die als Bedingungsgleichung für die Flächen zweiten Grades.

Zweite Abtheilung.

Sechs Punkte in der Ebene und ihr Flächenproduct.

9.

Ist ein Sechseck einem Kegelschnitte eingeschrieben, so liegen, nach dem Pascal'schen Satze, die Durchschnittspunkte der einander entgegengesetzten Seiten in gerader Linie. Im allgemeinen Falle dagegen, wenn das Sechseck kein eingeschriebenes ist, bilden die drei Durchschnittspunkte ein Dreieck, dessen Flächeninhalt kurz durch Δ bezeichnet werde. Heissen die Eckpunkte des Sechsecks $P_1, P_2, \ldots P_6$ und folgen sie sich nach dieser Ordnung: so sind die einander entgegengesetzten Seitenpaare resp. $P_1 P_2$ und $P_4 P_5$; $P_2 P_3$ und $P_5 P_6$; $P_3 P_4$ und $P_6 P_1$.

Es seien OX_1 und OX_2 zwei gegebene rechtwinkelige Axen in der Ebene des Sechsecks; P_s irgend ein Punkt in derselben Ebene und x_{1s} und x_{2s} dessen auf OX_1 und OX_2 bezogene Coordinaten. Demzufolge werden die Seiten des Sechsecks, als unbegrenzte gerade Linien betrachtet, durch nachstehende Gleichungen ausgedrückt:

$$P_1\,P_2 \text{ durch } 0 = \binom{1\;2}{1\;2} - \binom{\mathrm{I}\;2}{1\;2}\,\xi + \binom{\mathrm{I}\;1}{1\;2}\,v;\text{*)}$$
$$P_2\,P_3 \text{ durch } 0 = \binom{1\;2}{2\;3} - \binom{\mathrm{I}\;2}{2\;3}\,\xi + \binom{\mathrm{I}\;1}{2\;3}\,v;$$
$$P_3\,P_4 \text{ durch } 0 = \binom{1\;2}{3\;4} - \binom{\mathrm{I}\;2}{3\;4}\,\xi + \binom{\mathrm{I}\;1}{3\;4}\,v;$$
$$P_4\,P_5 \text{ durch } 0 = \binom{1\;2}{4\;5} - \binom{\mathrm{I}\;2}{4\;5}\,\xi + \binom{\mathrm{I}\;1}{4\;5}\,v;$$
$$P_5\,P_6 \text{ durch } 0 = \binom{1\;2}{5\;6} - \binom{\mathrm{I}\;2}{5\;6}\,\xi + \binom{\mathrm{I}\;1}{5\;6}\,v;$$
$$P_6\,P_1 \text{ durch } 0 = \binom{1\;2}{6\;1} - \binom{\mathrm{I}\;2}{6\;1}\,\xi + \binom{\mathrm{I}\;1}{6\;1}\,v;$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\binom{1\;2}{1\;2} = z_{a1}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;2}{1\;2} = z_{b1}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;1}{1\;2} = z_{c1}\,;$$
$$\binom{1\;2}{2\;3} = z_{a2}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;2}{2\;3} = z_{b2}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;1}{2\;3} = z_{c2}\,;$$
$$\binom{1\;2}{3\;4} = z_{a3}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;2}{3\;4} = z_{b3}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;1}{3\;4} = z_{c3}\,;$$
$$\binom{1\;2}{4\;5} = z_{a4}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;2}{4\;5} = z_{b4}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;1}{4\;5} = z_{c4}\,;$$
$$\binom{1\;2}{5\;6} = z_{a5}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;2}{5\;6} = z_{b5}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;1}{5\;6} = z_{c5}\,;$$
$$\binom{1\;2}{6\;1} = z_{a6}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;2}{6\;1} = z_{b6}\,;\quad \binom{\mathrm{I}\;1}{6\;1} = z_{c6}\,;$$

gesetzt wird,

$$P_1\,P_2 \text{ durch } 0 = z_{a1} - z_{b1}\,\xi + z_{c1}\,v\,;$$
$$P_2\,P_3 \text{ durch } 0 = z_{a2} - z_{b2}\,\xi + z_{c2}\,v\,;$$
$$P_3\,P_4 \text{ durch } 0 = z_{a3} - z_{b3}\,\xi + z_{c3}\,v\,;$$
$$P_4\,P_5 \text{ durch } 0 = z_{a4} - z_{b4}\,\xi + z_{c4}\,v\,;$$
$$P_5\,P_6 \text{ durch } 0 = z_{a5} - z_{b5}\,\xi + z_{c5}\,v\,;$$
$$P_6\,P_1 \text{ durch } 0 = z_{a6} - z_{b6}\,\xi + z_{c6}\,v\,;$$

Man findet daher für die Durchschnittspunkte:

$$\text{von } P_1\,P_2 \text{ und } P_4\,P_5 : \xi = \frac{z\binom{a\;c}{1\;4}}{z\binom{b\;c}{1\;4}}\,;\quad v = \frac{z\binom{a\;b}{1\;4}}{z\binom{b\;c}{1\;4}}\,;$$

---

*) Hier steht allgemein $\binom{t\;u}{\tau\;v}$ zur Abkürzung für $x\binom{t\;u}{\tau\;v}$, wodurch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_{t\tau}\,, & x_{tv} \\ x_{u\tau}\,, & x_{uv} \end{vmatrix}$$

$$\text{von } P_2\,P_3 \text{ und } P_5\,P_6 : \xi = \frac{z\begin{pmatrix}a & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}}\,;\; v = \frac{z\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & 5\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}}\,;$$

$$\text{von } P_3\,P_4 \text{ und } P_6\,P_1 : \xi = \frac{z\begin{pmatrix}a & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}}\,;\; v = \frac{z\begin{pmatrix}a & b\\ 3 & 6\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}}\,;$$

und folglich

$$\pm\,2\,\Delta = \begin{vmatrix} 1\,, & \dfrac{z\begin{pmatrix}a & c\\ 1 & 4\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 1 & 4\end{pmatrix}}\,, & \dfrac{z\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & 4\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 1 & 4\end{pmatrix}} \\ 1\,, & \dfrac{z\begin{pmatrix}a & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}}\,, & \dfrac{z\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & 5\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}} \\ 1\,, & \dfrac{z\begin{pmatrix}a & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}}\,, & \dfrac{z\begin{pmatrix}a & b\\ 3 & 6\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot z\begin{pmatrix}b & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot z\begin{pmatrix}b & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}} \begin{vmatrix} z\begin{pmatrix}b & c\\ 1 & 4\end{pmatrix}, & z\begin{pmatrix}a & c\\ 1 & 4\end{pmatrix}, & z\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & 4\end{pmatrix} \\ z\begin{pmatrix}b & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}, & z\begin{pmatrix}a & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}, & z\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & 5\end{pmatrix} \\ z\begin{pmatrix}b & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}, & z\begin{pmatrix}a & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}, & z\begin{pmatrix}a & b\\ 3 & 6\end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{z\begin{pmatrix}b & c & a & c & a & b\\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6\end{pmatrix}}{z\begin{pmatrix}b & c\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot z\begin{pmatrix}b & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot z\begin{pmatrix}b & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}}\,;$$

(vergl. *Beiträge* S. 27) oder

$$(20)\qquad \pm\,2\,\Delta\cdot z\begin{pmatrix}b & c\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot z\begin{pmatrix}b & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot z\begin{pmatrix}b & c\\ 3 & 6\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}b & c & a & c & a & b\\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

10.

Zieht man aus O, dem Anfangspunkte der Coordinaten (also aus einem beliebigen Punkte) die Geraden $O\alpha$ und $O\beta$ resp. gleich und parallel den Strecken $P_1\,P_2$ und $P_4\,P_5$ und zwar derart, dass die Richtung von O nach α der von P_1 nach P_2 und die Richtung von O nach β der von P_4

---

bezeichnet wird. Das Zahlzeichen I hat als Suffixum die feststehende Bedeutung, dass $x_{\mathrm{I}s}$ für alle Werthe von s der positiven Einheit gleich ist.

nach P_5 entspreche, so ist das Dreieck $O\alpha\beta$ vollkommen bestimmt und werde das Dreieck der Geraden $P_1\,P_2$ und $P_4\,P_5$ genannt; sein Flächeninhalt werde durch Δ_1 bezeichnet. Unsern Bestimmungen zufolge sind die Coordinaten des Punktes α:

$$x_{12} - x_{11} = x\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = z_{c1};$$

und

$$x_{22} - x_{21} = x\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = z_{b1};$$

die des Punktes β:

$$x_{15} - x_{14} = x\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix} = z_{c4};$$

und

$$x_{25} - x_{24} = x\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix} = z_{b4};$$

woraus sich

$$\pm 2\,\Delta_1 = \begin{vmatrix} z_{b1}, & z_{b4}\\ z_{c1}, & z_{c4}\end{vmatrix} = z\begin{pmatrix}b & c\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

ergiebt. Ebenso findet man, wenn man das Dreieck der Geraden $P_2\,P_3$ und $P_5\,P_6$ und das der Geraden $P_3\,P_4$ und $P_6\,P_1$ auf analoge Weise bestimmt und ihren Flächeninhalt resp. durch Δ_2 und Δ_3 bezeichnet, $\pm\, 2\,\Delta_2 = z\begin{pmatrix}b & c\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; $\pm\, 2\,\Delta_3 = z\begin{pmatrix}b & c\\ 3 & 6\end{pmatrix}$. Es kommt daher nach Gleichung (20),

(21) $$\pm\, 16\,\Delta\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3 = z\begin{pmatrix}b\;c & a\;c & a\;b\\ 1\;4 & 2\;5 & 3\;6\end{pmatrix}.$$

Die Determinante

$$z\begin{pmatrix}b\;c & a\;c & a\;b\\ 1\;4 & 2\;5 & 3\;6\end{pmatrix} = -\,z\begin{pmatrix}a\;b & a\;c & b\;c\\ 1\;4 & 2\;5 & 3\;6\end{pmatrix}$$

ist eine einseitig vollständige der ersten Gattung (Beiträge S. 62 u. ff.) und lässt sich (nach dem zweiten Beispiele S. 64) in

$$-\begin{vmatrix} z\begin{pmatrix}a\;b\;c\\ 1\;2\;5\end{pmatrix}, & z\begin{pmatrix}a\;b\;c\\ 1\;3\;6\end{pmatrix}\\ z\begin{pmatrix}a\;b\;c\\ 4\;2\;5\end{pmatrix}, & z\begin{pmatrix}a\;b\;c\\ 4\;3\;6\end{pmatrix}\end{vmatrix}$$

transformiren. Nun ist aber

$$z\begin{pmatrix}a\;b\;c\\ 1\;2\;5\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\,2 & \mathrm{I}\,2 & \mathrm{I}\,1\\ 1\,2 & 2\,3 & 5\,6\end{pmatrix} = -\,x\begin{pmatrix}\mathrm{I}\,1 & \mathrm{I}\,2 & 1\,2\\ 1\,2 & 2\,3 & 5\,6\end{pmatrix}$$

ebenfalls eine einseitig vollständige Determinante der ersten Gattung und hat (nach dem ersten Beispiele, S. 64) den Werth

$$-\,x\begin{pmatrix}\mathrm{I}\;1\;2\\ 1\;2\;3\end{pmatrix} \cdot x\begin{pmatrix}\mathrm{I}\;1\;2\\ 2\;5\;6\end{pmatrix};$$

wofür wir abkürzend — (1 2 3) (2 5 6) schreiben. Auf ähnliche Weise findet man:

$$z\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = -(126)(134);\; z\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = +(456)(235);$$

$$z\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = +(345)(146);$$

folglich kommt:

$$z\begin{pmatrix} b\ c & a\ c & a\ b \\ 1\ 4 & 2\ 5 & 3\ 6 \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} -(123)(256), & -(126)(134) \\ +(456)(235), & +(345)(146) \end{vmatrix}$$
$$= (123)(256)(345)(146) - (456)(235)(126)(134)$$
$$= \pm 16\,\Delta\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3\,.$$

Dieser Formel liegt die Ordnung $P_1, P_2, .. P_6$ der Punkte oder, was dasselbe ist, die Ordnung 1, 2, .. 6 der Suffixe zu Grunde. Bezeichnet man, um dies anzudeuten, den Ausdruck:

$$(123)(256)(345)(146) - (456)(235)(126)(134)$$

durch $f(123456)$, indem man die Suffixe unter dem Symbole f ihrer zu Grunde liegenden Ordnung gemäss schreibt: so ist

$$(22) \qquad \pm 16\,\Delta\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3 = f(123456).$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass $f(123456)$ nur das Vorzeichen, nicht aber den absoluten Werth ändern kann, wenn man die Suffixe oder Zahlen 1, 2, . . . 6 auf beliebige Weise untereinander vertauscht. Vertauscht man nur zwei Zahlen untereinander, so hat man darauf zu achten, ob dieselben in einem Factor der Producte

$$(123)(256)(345)(146) \text{ und } (456)(235)(126)(134)$$

zusammen vorkommen oder nicht. In dieser Hinsicht bemerke man, dass jede Ambe, welche in einem Factor des einen Products enthalten ist, auch einem Factor des andern (und nur einem) angehört, dass also in $f(123456)$ nur zwölf Amben, nämlich:

12 13 14 16 23 25 26 34 35 45 46 56

vorkommen, während die übrigen:

15 24 36

darin fehlen. Vertauscht man zuerst zwei Zahlen, welche eine der vorkommenden Amben bilden, z. B. 1 und 2: so erhält man:

$$f(213456) = -(123)(156)(345)(246)$$
$$+ (456)(135)(126)(234);$$

und

$$f(123456) + f(213456) =$$
$$(123)(345)[(256)(146) - (156)(246)]$$
$$-(456)(126)[(235)(134) - (135)(234)]$$

oder da, wie hier als bekannt vorausgesetzt werden darf,

$$(256)(146) - (156)(246) = (456)(126);$$
$$(235)(134) - (135)(234) = (123)(345);$$

gefunden wird,

$$f\,(123456) + f\,(213456) = 0.$$

Gehören die zu vertauschenden Zahlen einer der fehlenden Amben an, wie 1 und 5, so verwandelt sich jedes der beiden Producte in das andere. Man ersieht hieraus, dass der Ausdruck $f\,(123456)$ in beiden Fällen in $-f\,(123456)$ übergeht und dass er folglich nur das Vorzeichen ändern kann, welche Ordnung man auch für $12\ldots6$ substituire. Bestimmter ausgedrückt: sind $a_1\,a_2\,\ldots\,a_6$ und $b_1\,b_2\,\ldots\,b_6$ zwei Permutationen von $12\ldots6$, so ist allgemein:

$$f\,(a_1\,a_2\,..\,a_6) = \pm f\,(b_1\,b_2\,..\,b_6);$$

und man sieht, dass das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem die beiden Permutationen derselben Classe angehören oder nicht.

Da der absolute Werth von $f\,(123456)$ von der Ordnung der Suffixe unabhängig ist, so gilt dies auch von dem Producte: $\Delta\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3$. Wir sind somit zu folgendem Satze gelangt:

Obgleich sich die vier Dreiecke, nämlich das der Durchschnittspunkte und die der einander entgegengesetzten Seitenpaare mit der Ordnung der Punkte alle oder zum Theile ändern müssen: so bleibt doch das Product ihrer Flächen bei jeder Ordnung der Punkte dieselbe.

Der Werth des Products $\Delta\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3$ hängt nach diesem Satze nur von der gegenseitigen Lage der sechs Punkte ab; wir werden es aus diesem Grunde *das Flächenproduct der Punkte* $P_1,\ P_2,\ \ldots\ P_6$ nennen und durch $F\,(123456)$ bezeichnen; wobei die Ordnung, in welcher die Suffixe geschrieben werden, gleichgültig ist. Man hat demzufolge:

$$\pm\,16\,F\,(123456) = f\,(123456);$$

und allgemeiner:

$$(23)\quad \pm\,16\,F(123456) = \pm\,16\,F\,(a_1\,a_2\ldots a_6) = f\,(a_1\,a_2\ldots a_6)\ldots$$

11.

Bei der Beantwortung der Frage: ob in Gleichung (23) das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen sei, hat man auf die Lage der sechs Punkte, dem zu Grunde liegenden Axensystem gegenüber, Rücksicht zu nehmen. Wir dürfen diesen Punkt hier übergehen, da er für unsern Zweck überflüssig ist. Dagegen haben wir eine andere damit verwandte Frage zur Entscheidung zu bringen, welche in ihrer allgemeinsten Fassung folgendermassen ausgedrückt wird:

Es seien $P_{\alpha_1},\ P_{\alpha_2},\ ..\ P_{\alpha_6}$ und $P_{\alpha_1},\ P_{\alpha_2},\ ..\ P_{\alpha_6}$ zwei Systeme von sechs Punkten und also

$$\pm\, 16\ F\,(a_1\, a_2 \,.\,.\, a_6) = f\,(a_1\, a_2 \,.\,.\, a_6);$$

und

$$\pm\, 16\ F\,(\alpha_1\, \alpha_2 \,.\,.\, \alpha_6) = f\,(\alpha_1\, \alpha_2 \,.\,.\, \alpha_6).$$

In welchen Fällen hat man die Flächenproducte $F\,(a_1\, a_2 \,.\,.\,.\, a_6)$ und $F\,(\alpha_1\, \alpha_2 \,.\,.\, \alpha_6)$ mit gleichen und in welchen mit ungleichen Vorzeichen zu nehmen?

Wir betrachten zuvörderst den einfachsten Fall, wo die beiden Systeme fünf Punkte miteinander gemein haben und stellen in dieser Hinsicht folgende Frage:

Es sei $P_1 \,.\,.\, P_5\ P_a$ ein System von sechs Punkten und also:

$$\pm\, 16\ F\,(12345a) = f\,(12345a).$$

Setzt man den Punkt P_α an die Stelle von P_a, so erhält man ein zweites System:

$$P_1 \,.\,.\, P_5\, P_\alpha \text{ und } \pm\, 16\, F\,(12345\alpha) = f\,(12345\alpha).$$

In welchen Fällen hat man die Flächenproducte $F\,(12345a)$ und $F\,(12345\alpha)$ mit gleichen und in welchen mit ungleichen Vorzeichen zu nehmen?

Die Antwort hierauf ist diese:

Durch die fünf gemeinschaftlichen Punke $P_1 \,.\,.\,.\, P_5$ lege man den durch dieselben unzweideutig bestimmten Kegelschnitt. Die durch P_a und P_α gehende unbegrenzte Gerade schneidet den Kegelschnitt entweder in keinem oder in zwei reellen Punkten. Im ersten Falle hat man den Flächenproducten gleiche Vorzeichen zu geben. Im zweiten seien P_6 und P_7 die beiden Schnittpunkte. Liegt von den Punkten P_a und P_α keiner oder liegen sie beide zwischen P_6 und P_7, so hat man ebenfalls gleiche Vorzeichen zu nehmen; ungleiche dagegen, wenn nur einer der Punkte P_a und P_α zwischen P_6 und P_7 fällt.

Dem Beweise dieses Criteriums schicken wir die Bemerkung voraus, dass $f\,(12345s) = 0$ sein muss, wenn der Punkt P_s auf dem durch $P_1 \,.\,.\,.\, P_5$ gehenden Kegelschnitte liegt; denn in diesem Falle wird $\Delta = 0$, da die Eckpunkte des bezüglichen Dreiecks in gerader Linie liegen.

Nun sei P_A ein willkürlich bestimmter, aber fester Punkt der unbegrenzten Geraden $P_a\ P_\alpha$ und P_s ein veränderlicher Punkt derselben. Setzt man $P_A\ P_s = r$ und nimmt r positiv oder negativ, je nachdem P_s auf der einen oder andern Seite von P_A liegt: so kann man die Coordinaten von P_s unter der Form:

$$x_{1s} = x_{1A} + rl\ ;\ x_{2s} = x_{2A} + rm$$

darstellen; wo l und m ebenso wie x_{1A} und x_{2A} für alle Punkte der Geraden $P_a\ P_\alpha$ constant sind. Da nun

$f(12345s) = (123)(345)(25s)(14s) - (235)(134)(45s)(12s)$
und

$$(25s) = \begin{vmatrix} 1, & x_{12}, & x_{22} \\ 1, & x_{15}, & x_{25} \\ 1, & x_{1s}, & x_{2s} \end{vmatrix} = (25A) + r \begin{vmatrix} 1, & x_{12}, & x_{22} \\ 1, & x_{15}, & x_{25} \\ 0, & l, & m \end{vmatrix};$$

u. s. w., so sieht man, dass $f(12345s)$ auf die Form

$$Lr^2 + Mr + N$$

gebracht werden kann, wo auch L, M und N für alle Punkte von $P_a\ P_\alpha$ constant bleiben.

Trifft die Gerade $P_a\ P_\alpha$ den Kegelschnitt in keinem Punkte, so folgt daraus, dass die Gleichung $Lr^2 + Mr + N = 0$ keine reellen Wurzeln hat; woraus man weiter schliesst, dass $Lr^2 + Mr + N$ oder $\pm\ 16\ F(12345s)$ für alle Werthe der Grösse r, von $r = -\infty$ bis zu $r = +\infty$ dasselbe Vorzeichen behalten muss. Man hat also in diesem Falle $\pm\ 16\ F(12345a)$ und $\pm\ 16\ F(12345\alpha)$ mit gleichen Vorzeichen zu nehmen.

Trifft dagegen $P_a\ P_\alpha$ den Kegelschnitt in zwei Punkten P_6 und P_7, so hat die Gleichung $Lr^2 + Mr + \mathrm{N} = 0$ zwei reelle Wurzeln r' und r'', welche sich auf diese Punkte beziehen. Da nun in diesem Falle

$$Lr^2 + Mr + N = L\ (r - r')\ (r - r'');$$

so erhellt, dass der Ausdruck $Lr^2 + Mr + N$ für alle Werthe von r zwischen r' und r'' dasselbe Vorzeichen hat und dass er für alle ausserhalb dieses Intervalls liegenden das entgegengesetzte annimmt. Man hat demnach $\pm\ 16\ F(12345a)$ und $\pm\ 16\ F(12345\alpha)$ mit gleichen Vorzeichen zu nehmen, wenn P_a und P_α beide zwischen oder beide ausserhalb P_6 und P_7 liegen; mit ungleichen dagegen, wenn dies nicht der Fall ist.

Es ist leicht einzusehen, dass das eben bewiesene Criterium hinreicht, auch alle weniger einfachen Fälle zu beurtheilen. Handelt es sich z. B. um die Systeme $P_1 \,..\, P_4\ P_a\ P_b$ und $P_1 \,..\, P_4\ P_\alpha\ P_\beta$, welche nur vier Punkte gemein haben: so bilde man das Hülfssystem $P_1 \,..\, P_4\ P_a\ P_\beta$, welches von jedem der zu vergleichenden fünf Punkte besitzt. Man kann daher bestimmen, ob

$$\pm\ 16\ F\ (1234a\beta) \text{ und } \pm\ 16\ F\ (1234ab)$$

und ferner ob

$$\pm\ 16\ F\ (1234a\beta) \text{ und } \pm\ 16\ F\ (1234\alpha\beta)$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben; woraus man ohne Weiteres auf die Gleichheit oder Ungleichheit der Vorzeichen von

$$\pm\ 16\ F\ (1234ab) \text{ und } \pm\ 16\ F\ (1234\alpha\beta)$$

schliesst. Wären die Systeme

$$P_1\ P_2\ P_3\ P_a\ P_b\ P_c \text{ und } P_1\ P_2\ P_3\ P_\alpha\ P_b\ P_\gamma$$

zu vergleichen, so hätte man zunächst das Hülfssystem

$$P_1\ P_2\ P_3\ P_a\ P_b\ P_\gamma$$

zu bilden u. s. w. Wir dürfen daher die gestellte Frage als in ihrer allgemeinsten Fassung gelöst betrachten.

Anmerkung. Bei dieser relativen Vorzeichenbestimmung zweier Flächenproducte kommt, wie man sieht, das Axensystem OX_1, OX_2 nur in sofern in Betracht, als vorausgesetzt wird, dass die Coordinaten aller Punkte auf ein und dasselbe System bezogen werden. Die Entscheidung der Frage hängt also nur von der gegenseitigen Lage der Punkte ab. Dieselbe Bemerkung kann man auch in Beziehung auf Dreiecke machen. Bezeichnet man nämlich den Flächeninhalt des Dreiecks $P_a\ P_b\ P_c$ durch $F(a\,b\,c)$; so ist

$$\pm\ 2\,F(a\,b\,c) = x\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

und man hat bei der Frage, ob das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen sei, die Lage der Punkte P_a, P_b und P_c dem Axensysteme gegenüber in Betracht zu ziehen. Dagegen hängt die Frage, ob in zwei Gleichungen, wie

$$\pm\ 2\,F(a\,b\,c) = x\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix} \text{ und } \pm\ 2\,F(\alpha\,\beta\,\gamma) = x\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 1 & 2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen zu nehmen seien, nur von der gegenseitigen Lage der Punkte $P_a\ P_b\ P_c\ P_\alpha\ P_\beta\ P_\gamma$ ab; vergl. *Beiträge*, S. 101.

12.

Liegen die Punkte $P_1 \ldots P_6$ auf einem Kegelschnitte, so ist, einer bereits gemachten Bemerkung zufolge: $f(123456) = 0$; dies muss sich also auch aus der Gleichung (17) der ersten Abtheilung ergeben. In der That kann man zeigen, dass $-E$ oder

$$\begin{vmatrix} (124)\,(134)\ , & (124)\,(234)\ , & (134)\,(234) \\ (125)\,(135)\ , & (125)\,(235)\ , & (135)\,(235) \\ (126)\,(136)\ , & (126)\,(236)\ , & (136)\,(236) \end{vmatrix}$$

mit $(123)^2\ f(123456)$ identisch ist. Bezeichnet man nämlich diese Determinante auf analoge Weise wie die zusammengesetzten der zweiten Gattung durch

$$\begin{bmatrix} 12\cdot13\ , & 12\cdot23\ , & 13\cdot23 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix};$$

(*Beiträge*, S. 55): so findet man, wenn man sie wie eine gewöhnliche behandelt*) und das Product $12\cdot13$ isolirt (*Beiträge*, S. 3),

*) In welchem Sinne dies erlaubt sei, erkennt man, wenn man

$$-E = \begin{bmatrix} 12\cdot 13 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12\cdot 23 & , & 13\cdot 23 \\ 5 & & 6 \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} 12\cdot 13 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12\cdot 23 & , & 13\cdot 23 \\ 4 & & 6 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 12\cdot 13 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12\cdot 23 & , & 13\cdot 23 \\ 4 & & 5 \end{bmatrix}.$$

Es ist aber, wenn man allgemein $a\,b\,c$ statt (abc) schreibt,

$$\begin{bmatrix} 12\cdot 23 & , & 13\cdot 23 \\ 5 & & 6 \end{bmatrix} = 235\cdot 236\,(125\cdot 136 - 126\cdot 135)$$
$$= 235\cdot 236\cdot 156\cdot 123;$$

u. s. w., folglich kommt:

$$-\frac{E}{1\,2\,3} = \begin{array}{ccccc} 12 & 13 & 23 & 23 & 1 \\ \hline +4 & 4 & 5 & 6 & 56 \\ -5 & 5 & 4 & 6 & 46 \\ +6 & 6 & 4 & 5 & 45 \end{array};$$

eine tabellarische Darstellung, welche wohl ohne weitere Erklärung verständlich ist. Nun ist

$$\begin{array}{cc} 12 & 1 \\ \hline 4 & 56 \end{array} = \begin{array}{ccc} & 12 & 1 \\ \hline + & 5 & 46 \\ - & 6 & 45 \end{array};$$

man erhält also, wenn man diesen Werth in das erste Glied von

$$-\frac{E}{1\,2\,3}$$

substituirt,

$$-\frac{E}{1\,2\,3} = \begin{array}{ccccc} 12 & 13 & 23 & 23 & 1 \\ \hline +5 & 4 & 5 & 6 & 46 \\ -6 & 4 & 5 & 6 & 45 \\ -5 & 5 & 4 & 6 & 46 \\ +6 & 6 & 4 & 5 & 45 \end{array}$$

$$= \begin{cases} 125\cdot 236\cdot 146\ (134\cdot 235 - 135\cdot 234) \\ -\,126\cdot 235\cdot 145\ (134\cdot 236 - 136\cdot 234) \end{cases}.$$

und hieraus

$$-\frac{E}{1\,2\,3^2} = \begin{cases} 125\cdot 236\cdot 146\cdot 345 \\ -\,126\cdot 235\cdot 145\cdot 346 \end{cases}.$$

$(1\,2\,s)\ (1\,3\,s) = \omega_{1s}$; $(1\,2\,s)\ (2\,3\,s) = \omega_{2s}$; $(1\,3\,s)\ (2\,3\,s) = \omega_{3s}$;
setzt, wodurch $-E$ auf die Form:

$$-E = \begin{vmatrix} \omega_{14} & , & \omega_{24} & , & \omega_{34} \\ \omega_{15} & , & \omega_{25} & , & \omega_{35} \\ \omega_{16} & ., & \omega_{26} & , & \omega_{36} \end{vmatrix} = \omega\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

also auf die einer gewöhnlichen Determinante gebracht wird.

Dieser Werth von $-\frac{E}{123^2}$ ist aber mit

$$f(123456) = 123\cdot256\cdot146\cdot345 - 126\cdot235\cdot134\cdot456$$

identisch, wie man sofort erkennt, wenn man die Zahlen 3 und 5 unter einander vertauscht und demgemäss die Vorzeichen wechselt. Es ist daher:

$$(24)\qquad -E = \begin{bmatrix} 12\cdot13 \, , & 12\cdot23 \, , & 13\cdot23 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 123^2 f(123456)\,\cdot$$

Vergleicht man diesen Werth von $-E$ mit der Gleichung (16′) der ersten Nummer, so ergiebt sich ferner: $D = \pm f(123456)$. Das Vorzeichen wird hier durch die Ordnung der Elemente in den Horizontalreihen von D bestimmt. Wird diese so angenommen, dass

$$D = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1s}^2 \, , & x_{1s} \, , & x_{2s} \, , & x_{1s} \, , & x_{2s}^2 \, , & x_{2s} \, , & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$s = 1, 2, \ldots 6;$$

so ist $D = + f(123456)$; denn das Anfangsglied von D ist in diesem Falle: $+ x_{11}^2 \; x_{12} \; x_{22} \; x_{13} \; x_{24}^2 \; x_{25}$, und dieses Product, mit demselben Vorzeichen genommen, ist ein Glied der Entwickelung von $+ 123\cdot256\cdot345\cdot146$; wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Anfangsglieder der Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_{11} \, , & x_{21} \, , & 1 \\ x_{12} \, , & x_{22} \, , & 1 \\ x_{13} \, , & x_{23} \, , & 1 \end{vmatrix} = 123$$

u. s. w. bestimmt.

Setzt man

$$x_{1s} = \frac{\xi_{1s}}{\xi_{3s}} \; ; \quad x_{2s} = \frac{\xi_{2s}}{\xi_{3s}}$$

so geht der eben festgesetzte Werth von D in

$$\frac{1}{\Pi} \cdot \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1s}^2 \, , & \xi_{1s}\,\xi_{2s} \, , & \xi_{1s}\,\xi_{3s} \, , & \xi_{2s}^2 \, , & \xi_{2s}\,\xi_{3s} \, , & \xi_{3s}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$s = 1, 2, \ldots 6$$

über, wenn zur Abkürzung Π statt

$$\xi_{31}^2 \; \xi_{32}^2 \; \xi_{33}^2 \; \xi_{34}^2 \; \xi_{35}^2 \; \xi_{36}^2$$

geschrieben wird. Ferner verwandelt sich allgemein $a\,b\,c$ oder

$$\begin{vmatrix} x_{1a} \, , & x_{2a} \, , & 1 \\ x_{1b} \, , & x_{2b} \, , & 1 \\ x_{1c} \, , & x_{2c} \, , & 1 \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \frac{1}{\xi_{3a} \; \xi_{3b} \; \xi_{3c}} \quad \xi \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix};$$

und folglich $f(123456)$ in

$$\frac{1}{\Pi}\cdot\left|\begin{matrix} \xi\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\1&4&6\end{pmatrix} \\ -\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&5\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&6\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}\end{matrix}\right|.$$

Die Gleichung $D = + f(123456)$ geht demnach in die allgemeinere:

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\begin{matrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1s}^2, \ \xi_{1s}\xi_{2s}, \ \xi_{1s}\xi_{3s}, \ \xi_{2s}^2, \ \xi_{2s}\xi_{3s}, \ \xi_{3s}^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix}\right| \\ &(s = 1, 2, \ldots 6) \\ &= \left\{\begin{matrix} \xi\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\1&4&6\end{pmatrix} \\ \xi\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&6\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}\end{matrix}\right. \end{aligned}\right.$$

über.

13.

Bei der Rechnung mit den Functionen f ist die Gleichung (24) von grossem Nutzen. Wir lassen hier einige Formeln folgen, welche dies näher veranschaulichen werden.

I. Die Determinante

$$\begin{bmatrix} 12\cdot13, & 12\cdot13, & 12\cdot23, & 13\cdot23 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

verschwindet identisch; denn sie hat zwei gleiche Reihen. Es kommt daher, wenn das erste Product: $12 \cdot 13$ isolirt wird,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &+\begin{bmatrix}12\cdot13\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\cdot13, & 12\cdot23, & 13\cdot23\\5 & 6 & 7\end{bmatrix} \\ &-\begin{bmatrix}12\cdot13\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\cdot13, & 12\cdot23, & 13\cdot23\\4 & 6 & 7\end{bmatrix} \\ &+\begin{bmatrix}12\cdot13\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\cdot13, & 12\cdot23, & 13\cdot23\\4 & 5 & 7\end{bmatrix} \\ &-\begin{bmatrix}12\cdot13\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\cdot13, & 12\cdot23, & 13\cdot23\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} \end{aligned}\right\} = 0,$$

und folglich, vermöge Gleichung (24), nachdem durch $1\,2\,3^2$ dividirt worden,

$$(26)\quad \begin{array}{cccc} & 12 & 13 & f(123) \\ \hline + & 4 & 4 & 567 \\ - & 5 & 5 & 467 \\ + & 6 & 6 & 457 \\ - & 7 & 7 & 456 \end{array} = 0.$$

II. Die zusammengesetzte Determinante der zweiten Gattung:

$$\begin{bmatrix} 12 & 13 & 14 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

verschwindet identisch; denn sie entsteht durch Erweiterung aus

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

und diese ist identisch $= 0$ (*Beiträge*, S. 89, Beispiel I.). Es ist also auch

$$\begin{bmatrix} 12 \cdot 34\,, & 13 \cdot 34\,, & 14 \cdot 34 \\ a & b & c \end{bmatrix} = 0 \text{ und}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \cdot 34\,, & 13 \cdot 14\,, & 13 \cdot 34\,, & 14 \cdot 34 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = 0;$$

was augenscheinlich wird, wenn man das zweite Product: $13 \cdot 14$ isolirt. Isolirt man dagegen das erste Product: $12 \cdot 34$, so erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (24) und nachdem mit 134^2 dividirt worden

$$(27) \qquad \begin{array}{lcc} 13 & 14 & f(134) \\ \hline +5 & 5 & 678 \\ -6 & 6 & 578 \\ +7 & 7 & 568 \\ -8 & 8 & 567 \end{array} = 0.$$

III. Setzt man allgemein:

$$12s \cdot 13s = \omega_{1s}\,;\; 12s \cdot 23s = \omega_{2s}\,;\; 13s \cdot 23s = \omega_{3s};$$

so ist

$$-\begin{bmatrix} 12 \cdot 13\,, & 12 \cdot 23\,, & 13 \cdot 23 \\ a & b & c \end{bmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix};$$

und folglich auch

$$\omega \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} = 123^2\, f(123abc).$$

Man ersieht hieraus, dass jede Gleichung zwischen Determinanten dritten Grades in eine andere zwischen Grössen von der Form: $123^2\, f(123abc)$ umgewandelt werden kann oder in eine zwischen Grössen von der Form: $f(123abc)$ allein, wenn die zu Grunde liegende Gleichung in Beziehung auf die Determinanten $\omega \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ homogen ist und die Suffixenreihe 123 überall dieselbe bleibt. So ist z. B. identisch:

$$\begin{array}{lcc} & \omega \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & . & . \end{pmatrix} & \omega \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & . & . \end{pmatrix} \\ \hline + & 457 & 689 \\ - & 458 & 679 \\ + & 459 & 678 \end{array} = \omega \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{rcc} & \omega\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ . & . & .\end{pmatrix} & \omega\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ . & . & .\end{pmatrix}\\ \hline + & 467 & 589\\ - & 468 & 579\\ + & 469 & 578\\ + & 478 & 569\\ - & 479 & 568\\ + & 489 & 567 \end{array} = 0;$$

(vergl. die allgemeinen Formeln (18) und (19), Beiträge, S. 24) und also:

$$(28)\qquad \begin{array}{rcc} & f(123) & f(123)\\ \hline + & 457 & 689\\ - & 458 & 679\\ + & 459 & 678 \end{array} = f(123456)\,f(123789)$$

$$(28')\qquad \begin{array}{rcc} & f(123) & f(123)\\ \hline + & 467 & 589\\ - & 468 & 579\\ + & 469 & 578\\ + & 478 & 569\\ - & 479 & 568\\ + & 489 & 567 \end{array} = 0.$$

Die Gleichungen (26), (27), (28) und (28') stellen, wie man sieht, allgemeine Beziehungen zwischen je sieben, je acht und je neun Punkten in der Ebene dar. Es wäre leicht, diesen Beziehungen mit Hülfe der Criterien für Dreiecke und Flächenproducte einen rein geometrischen Ausdruck zu geben.

IV. Auch die Gleichung (25) führt auf wichtige Formeln, von welchen wir schliesslich einige der nützlichsten mittheilen wollen.

Betrachtet man in Gleichung (25) die identischen Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen als Functionen der Grösse ξ_{16}, so sind sie vom zweiten Grade und der Coefficient von ξ_{16}^2 muss in beiden derselbe sein. Bestimmt man also diesen Coefficienten für beide Ausdrücke, so findet man:

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l} - \begin{vmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ \xi_{1s}\xi_{2s}, & \xi_{1s}\xi_{3s}, & \xi_{2s}^2, & \xi_{2s}\xi_{3s}, & \xi_{3s}^2 \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} \\ (s = 1, 2, \ldots 5) \\ = \left\{\begin{array}{l} \quad\ \xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix} \xi\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} \xi\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix} \\ - \xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix} \xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix} \xi\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} \xi\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Betrachtet man nunmehr die hier verglichenen identischen Ausdrücke als Functionen von ξ_{35} und bestimmt die Coefficienten von ξ_{35}^2, so kommt:

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} -\left|\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1s}\xi_{2s}, & \xi_{1s}\xi_{3s}, & \xi_{2s}^2, & \xi_{2s}\xi_{3s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right| \\ (s=1,2,3,4) \\ = \left\{\begin{array}{l} \xi\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}2\,3\\1\,4\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1\,2\\3\,4\end{pmatrix}\xi_{22} \\ -\xi\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,4\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}2\,3\\1\,2\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1\,2\\2\,3\end{pmatrix}\xi_{24} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Da die Gleichungen (29) und (30) identisch sind, so darf man die Grössen ξ_{1s}, ξ_{2s} und ξ_{3s} durch beliebige andere ersetzen. Es sei also: $s+3=t$ und

$$\xi_{1s} = x_{\textstyle,}\begin{pmatrix}1\,1\,2\\2\,3\,t\end{pmatrix} = 23t\,;\ \xi_{2s} = 13t\,;\ \xi_{3s} = 12t;$$

demnach geht

$$\left|\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1s}\xi_{2s}, & \xi_{1s}\xi_{3s}, & \xi_{2s}^2, & \xi_{2s}\xi_{3s}, & \xi_{3s}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right|$$

$$(s = 1, 2, \ldots 5)$$

in

$$\left|\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 23t\,.\,13t\,, & 23t\,.\,12t\,, & 13t^2\,, & 13t\,.\,12t\,, & 12t^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right|$$

$$(t = 4, 5, \ldots 8)$$

oder in

$$\begin{bmatrix} 23\underset{4}{.}13\,,\ 23\underset{5}{.}12\,,\ \underset{6}{13^2}\,,\ 13\underset{7}{.}12\,,\ \underset{8}{12^2} \end{bmatrix};$$

und

$$\left|\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1s}\xi_{2s}, & \xi_{1s}\xi_{3s}, & \xi_{2s}^2, & \xi_{2s}\xi_{3s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right|$$

$$(s = 1, 2, 3, 4)$$

in

$$\left|\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 23t\,.\,13t\,, & 23t\,.\,12t\,, & 13t^2\,, & 13t\,.\,12t \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right|$$

$$(t = 4, 5, 6, 7)$$

oder in

$$\begin{bmatrix} 23\underset{4}{\cdot}13\,,\ 23\underset{5}{\cdot}12\,,\ \underset{6}{13^2}\,,\ 13\underset{7}{\cdot}12 \end{bmatrix}$$

über. Ferner findet man, wenn allgemein $s_i + 3 = t_i$ gesetzt wird,

$$\xi\begin{pmatrix}2 & 3\\ s_1 & s_2\end{pmatrix} = 13t_1\cdot 12t_2 - 13t_2\cdot 12t_1 = -123\cdot 1t_1t_2;$$

$$\xi\begin{pmatrix}1 & 2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix} = 23t_1\cdot 13t_2 - 23t_2\cdot 13t_1 = -123\cdot 3t_1t_2;$$

$$\xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ s_1 & s_2 & s_3\end{pmatrix} = -123^2\cdot t_1t_2t_3;$$

und folglich:

$$\left.\begin{matrix} \xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix} \\ -\xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\end{matrix}\right\} =$$

$$123^6\left\{\begin{matrix} 456\cdot 678\cdot 158\cdot 147 \\ -568\cdot 467\cdot 178\cdot 145\end{matrix}\right\} = -123^6 f(145678);$$

und

$$\left.\begin{matrix} \xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\xi_{22} \\ -\xi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\xi_{24}\end{matrix}\right\} =$$

$$123^4\left\{\begin{matrix} -456\cdot 147\cdot 367\cdot 135 \\ +467\cdot 145\cdot 356\cdot 137\end{matrix}\right\} = -123^4 f(134567).$$

Die Gleichungen (29) und (30) verwandeln sich demzufolge in die nachstehenden:

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 23\cdot 13, & 23\cdot 12, & 13^2, & 13\cdot 12, & 12^2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix} \\ &= 123^6 f(145678)\end{aligned}\right.$$

und

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 23\cdot 13, & 23\cdot 12, & 13^2, & 13\cdot 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix} \\ &= 123^4 f(134567).\end{aligned}\right.$$

V. Die Determinanten

$$\begin{bmatrix} 12\cdot 13, & 23\cdot 13, & 23\cdot 12, & 13^2, & 13\cdot 12, & 12^2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} 12\cdot 13, & 23\cdot 13, & 23\cdot 12, & 13^2, & 13\cdot 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix}$$

verschwinden identisch, da jede von ihnen zwei gleiche Reihen besitzt.

Es kommt daher, wenn man in jeder das erste Product: 12 13 isolirt und resp. mit 123^6 und mit 123^4 dividirt,

(33)
$$\begin{array}{rrl} 12 & .\ 13 & f(1) \\ \hline +4 & 4 & 56789 \\ -5 & 5 & 46789 \\ +6 & 6 & 45789 \\ -7 & 7 & 45689 \\ +8 & 8 & 45679 \\ -9 & 9 & 45678 \end{array} = 0.$$

und

(34)
$$\begin{array}{rrl} 12 & .\ 13 & f(13) \\ \hline +4 & 4 & 5678 \\ -5 & 5 & 4678 \\ +6 & 6 & 4578 \\ -7 & 7 & 4568 \\ +8 & 8 & 4567 \end{array} = 0.$$

Dritte Abtheilung.

Die Beziehung zwischen zehn Punkten einer Curve dritter Ordnung.

14.

Erste Transformation.

Die aus dem Schema (18) gebildete Gleichung $E = 0$ drückt die Bedingung aus, welcher zehn Punkte einer ebenen Linie dritten Grades genügen müssen. Wendet man auf sie die schon öfter benutzte Bezeichnungsweise an, so erhält sie die Form:

$$E = \begin{bmatrix} 23^2.13\,, & 23^2.12\,, & 23.13^2\,, & 23.13.12\,, & 23.12^2\,, & 13^2.12\,, & 13.12^2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Statt der Ziffer 10 ist hier, wie im Folgenden, immer 0 gesetzt. Isolirt man die zwei letzten Producte: $13^2.12$, 13.12^2 und schreibt zur Abkürzung:

$$[a\,b] \text{ statt } \begin{bmatrix} 13^2.12\,, & 13.12^2 \\ a & b \end{bmatrix};$$

$$[a\,b\,c\,d\,e] \text{ statt } \begin{bmatrix} 23^2.13\,, & 23^2.12\,, & 23.13^2\,, & 23.13.12\,, & 23.12^2 \\ a & b & c & d & e \end{bmatrix}:$$

so findet man:

$$E = \left\{ \begin{array}{llllll} + & [45]\,[67890] & - & [57]\,[46890] & - & [60]\,[45789] \\ - & [46]\,[57890] & + & [58]\,[46790] & + & [78]\,[45690] \\ + & [47]\,[56890] & - & [59]\,[46780] & - & [79]\,[45680] \\ - & [48]\,[56790] & + & [50]\,[46789] & + & [70]\,[45689] \\ + & [49]\,[56780] & + & [67]\,[45890] & + & [89]\,[45670] \\ - & [40]\,[56789] & - & [68]\,[45790] & - & [80]\,[45679] \\ + & [56]\,[47890] & + & [69]\,[45780] & + & [90]\,[45678] \end{array} \right\} = 0.$$

Es ist aber allgemein:

$$[ab] = 13a \cdot 12a \cdot 13b \cdot 12b\ (13a \cdot 12b - 13b \cdot 12a) =$$
$$- 13a \cdot 12a \cdot 13b \cdot 12b \cdot 1ab \cdot 123 = - 123 \cdot \frac{12\ \ 13\ \ 12\ \ 13\ \ 1}{a\ \ \ a\ \ \ b\ \ \ b\ \ ab};$$

und

$$[abcde] = 23a \cdot 23b \cdot 23c \cdot 23d \cdot 23e \left[\frac{23 \cdot 13}{a}, \frac{23 \cdot 12}{b}, \frac{13^2}{c}, \frac{13 \cdot 12}{d}, \frac{12^2}{e} \right];$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (31),

$$[abcde] = 23a \cdot 23b \cdot 23c \cdot 23d \cdot 23e \cdot 123^6\, f\,(1abcde)$$
$$= 123^6 \cdot \frac{23\ \ 23\ \ 23\ \ 23\ \ 23\ \ \ f\,(1)}{a\ \ \ b\ \ \ c\ \ \ d\ \ \ e\ \ abcde}.$$

Es ergiebt sich demzufolge, nach der Division durch 123^7, die 21gliedrige Gleichung:

$$(35) \qquad \frac{E}{123^7} = \begin{array}{rcccccccccccc} & 12 & 13 & 12 & 13 & 1 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & f\,(1) \\ \hline - & 4 & 4 & 5 & 5 & 45 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 67890 \\ + & 4 & 4 & 6 & 6 & 46 & 5 & 7 & 8 & 9 & 0 & 57890 \\ - & 4 & 4 & 7 & 7 & 47 & 5 & 6 & 8 & 9 & 0 & 56890 \\ + & 4 & 4 & 8 & 8 & 48 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 56790 \\ - & 4 & 4 & 9 & 9 & 49 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 56780 \\ + & 4 & 4 & 0 & 0 & 40 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 56789 \\ - & 5 & 5 & 6 & 6 & 56 & 4 & 7 & 8 & 9 & 0 & 47890 \\ + & 5 & 5 & 7 & 7 & 57 & 4 & 6 & 8 & 9 & 0 & 46890 \\ - & 5 & 5 & 8 & 8 & 58 & 4 & 6 & 7 & 9 & 0 & 46790 \\ + & 5 & 5 & 9 & 9 & 59 & 4 & 6 & 7 & 8 & 0 & 46780 \\ - & 5 & 5 & 0 & 0 & 50 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 46789 \\ - & 6 & 6 & 7 & 7 & 67 & 4 & 5 & 8 & 9 & 0 & 45890 \\ + & 6 & 6 & 8 & 8 & 68 & 4 & 5 & 7 & 9 & 0 & 45790 \\ - & 6 & 6 & 9 & 9 & 69 & 4 & 5 & 7 & 8 & 0 & 45780 \\ + & 6 & 6 & 0 & 0 & 60 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 45789 \\ - & 7 & 7 & 8 & 8 & 78 & 4 & 5 & 6 & 9 & 0 & 45690 \\ + & 7 & 7 & 9 & 9 & 79 & 4 & 5 & 6 & 8 & 0 & 45680 \\ - & 7 & 7 & 0 & 0 & 70 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 45689 \\ - & 8 & 8 & 9 & 9 & 89 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 45670 \\ + & 8 & 8 & 0 & 0 & 80 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 45679 \\ - & 9 & 9 & 0 & 0 & 90 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 45678. \end{array} = 0.$$

Zweite Transformation.

Aus Gleichung (33) folgt, wenn man a, b, c, d, e resp. statt 5, 6, 7, 8, 9 setzt,

$$\begin{array}{ccc} 12 & 13 & f(1) \\ \hline 4 & 4 & abcde \end{array} = \begin{array}{cccc} & 12 & 13 & f(1) \\ \hline + & a & a & 4bcde \\ - & b & b & 4acde \\ + & c & c & 4abde \\ - & d & d & 4abce \\ + & e & e & 4abcd \end{array} = \begin{array}{cccc} & 12 & 13 & f(14) \\ \hline + & a & a & bcde \\ - & b & b & acde \\ + & c & c & abde \\ - & d & d & abce \\ + & e & e & abcd. \end{array}$$

Substituirt man die sich hieraus ergebenden Werthe von

$$\begin{array}{ccc} 12 & 13 & f(1) \\ \hline 4 & 4 & 67890 \end{array}; \qquad \begin{array}{ccc} 12 & 13 & f(1) \\ \hline 4 & 4 & 57890 \end{array} \text{ u. s. w.}$$

in die sechs ersten Glieder der Gleichung (35) und ordnet, so kommt:

$$\frac{E}{123^7} =$$

	12	13	12	13	23	23	23	23	f (14)					
—	5	5	6	6	7	8	9	0	7890	(145236	—	146235	+	156234)
+	5	5	7	7	6	8	9	0	6890	(145237	—	147235	+	157234)
—	5	5	8	8	6	7	9	0	6790	(145238	—	148235	+	158234)
+	5	5	9	9	6	7	8	0	6780	(145239	—	149235	+	159234)
—	5	5	0	0	6	7	8	9	6789	(145230	—	140235	+	150234)
—	6	6	7	7	5	8	9	0	5890	(146237	—	147236	+	167234)
+	6	6	8	8	5	7	9	0	5790	(146238	—	148236	+	168234)
—	6	6	9	9	5	7	8	0	5780	(146239	—	149236	+	169234)
+	6	6	0	0	5	7	8	9	5789	(146230	—	140236	+	160234)
—	7	7	8	8	5	6	9	0	5690	(147238	—	148237	+	178234)
+	7	7	9	9	5	6	8	0	5680	(147239	—	149237	+	179234)
—	7	7	0	0	5	6	8	9	5689	(147230	—	140237	+	170234)
—	8	8	9	9	5	6	7	0	5670	(148239	—	149238	+	189234)
+	8	8	0	0	5	6	7	9	5679	(148230	—	140238	+	180234)
—	9	9	0	0	5	6	7	8	5678	(149230	—	140239	+	190234)

Es ist aber allgemein:

$$14a \cdot 23b - 14b \cdot 23a + 1ab \cdot 234 = 123 \cdot 4ab;$$

[Beiträge, S. 24, Formel (18)]; also ergiebt sich, nach der Division durch 123, die 15gliedrige Gleichung:

(36) $\frac{E}{123^8} =$

	12	13	12	13	4	23	23	23	23	f (14)
—	5	5	6	6	56	7	8	9	0	7890
+	5	5	7	7	57	6	8	9	0	6890
—	5	5	8	8	58	6	7	9	0	6790
+	5	5	9	9	59	6	7	8	0	6780
—	5	5	0	0	50	6	7	8	9	6789
—	6	6	7	7	67	5	8	9	0	5890
+	6	6	8	8	68	5	7	9	0	5780
—	6	6	9	9	69	5	7	8	0	5790
+	6	6	0	0	60	5	7	8	9	5789
—	7	7	8	8	78	5	6	9	0	5690
+	7	7	9	9	79	5	6	8	0	5680
—	7	7	0	0	70	5	6	8	9	5689
—	8	8	9	9	89	5	6	7	0	5670
+	8	8	0	0	80	5	6	7	9	5679
—	9	9	0	0	90	5	6	7	8	5678.

$= 0.$

Dritte Transformation.

Multiplicirt man Gleichung (36) mit 145, so kommt:

(36′) $\frac{E \cdot 145}{123^8} =$

	14	12	13	12	13	4	23	23	23	23	f (14)
—	5	5	5	6	6	56	7	8	9	0	7890
+	5	5	5	7	7	57	6	8	9	0	6890
—	5	5	5	8	8	58	6	7	9	0	6790
+	5	5	5	9	9	59	6	7	8	0	6780
—	5	5	5	0	0	50	6	7	8	9	6789
—	5	6	6	7	7	67	5	8	9	0	5890
+	5	6	6	8	8	68	5	7	9	0	5790
—	5	6	6	9	9	69	5	7	8	0	5780
+	5	6	6	0	0	60	5	7	8	9	5789
—	5	7	7	8	8	78	5	6	9	0	5690
+	5	7	7	9	9	79	5	6	8	0	5680
—	5	7	7	0	0	70	5	6	8	9	5689
—	5	8	8	9	9	89	5	6	7	0	5670
+	5	8	8	0	0	80	5	6	7	9	5679
—	5	9	9	0	0	90	5	6	7	8	5678.

$= 0.$

Aus Gleichung (34) folgt, wenn man a, b, c, d statt $5, 6, 7, 8$; 5 statt 4; 4 statt 3; 3 statt 2 schreibt,

$$\begin{array}{ccc} 14 & 13 & f(14) \\ \hline 5 & 5 & abcd \end{array} = \begin{array}{rccc} & 14 & 13 & f(14) \\ \hline + & a & a & 5bcd \\ - & b & b & 5acd \\ + & c & c & 5abd \\ - & d & d & 5abc \end{array} = \begin{array}{rccc} & 14 & 13 & f(145) \\ \hline + & a & a & bcd \\ - & b & b & acd \\ + & c & c & abd \\ - & d & d & abc \end{array}.$$

Substituirt man die sich hieraus ergebenden Werthe von

$$\begin{array}{ccc} 14 & 13 & f(14) \\ \hline 5 & 5 & 7890 \end{array}; \quad \begin{array}{ccc} 14 & 13 & f(14) \\ \hline 5 & 5 & 6890 \end{array}$$

u. s. w. in die fünf ersten Glieder der Gleichung (36′) und ordnet, so kommt, wenn man zur Abkürzung

$$\begin{array}{rccccc} & 12 & 12 & 4 & 14 & 23 \\ \hline + & 5 & a & 5a & b & b \\ - & 5 & b & 5b & a & a \\ + & a & b & ab & 5 & 5 \end{array} = \varphi\,(ab)$$

setzt,

$$\frac{E \cdot 145}{123^8} = \begin{array}{rcccccccc} & 13 & 13 & 23 & 23 & 23 & f(145) & & \\ \hline - & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 890 & \varphi & (67) \\ + & 6 & 8 & 7 & 9 & 0 & 790 & \varphi & (68) \\ - & 6 & 9 & 7 & 8 & 0 & 780 & \varphi & (69) \\ + & 6 & 0 & 7 & 8 & 9 & 789 & \varphi & (60) \\ - & 7 & 8 & 6 & 9 & 0 & 690 & \varphi & (78) \\ + & 7 & 9 & 6 & 8 & 0 & 680 & \varphi & (79) \\ - & 7 & 0 & 6 & 8 & 9 & 689 & \varphi & (70) \\ - & 8 & 9 & 6 & 7 & 0 & 670 & \varphi & (89) \\ + & 8 & 0 & 6 & 7 & 9 & 679 & \varphi & (80) \\ - & 9 & 0 & 6 & 7 & 8 & 678 & \varphi & (90) \end{array} = 0.$$

Es ist aber

$$\begin{array}{cc} 4 & 14 \\ \hline ab & 5 \end{array} = \begin{array}{rcc} & 4 & 14 \\ \hline + & 5b & a \\ - & 5a & b \end{array}$$

und folglich:

$$\varphi\,(ab) = \begin{array}{rccccc} & 12 & 12 & 4 & 14 & 23 \\ \hline + & 5 & a & 5a & b & b \\ - & 5 & b & 5b & a & a \\ + & a & b & 5b & a & 5 \\ - & a & b & 5a & b & 5 \end{array} \begin{array}{l} = 12a\,.\,45a\,.\,14b\,.\,(125.23b - 12b.235) \\ \quad - 12b\,.\,45b\,.\,14a\,.\,(125.23a - 12a.235) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= 123.(12a.45a.14b.25b - 12b.45b.14a.25a) = 123\,.\,f\,(1245ab).$$

Man gelangt daher, nach der Division durch 123, zu der zehngliedrigen Gleichung:

$$(37)\qquad \frac{E\cdot 145}{123^9} = \begin{array}{c}13\;13\;23\;23\;23\quad f(1245)\quad f(145)\\ \hline \begin{array}{rccccccc} -6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 67 & 890\\ +6 & 8 & 7 & 9 & 0 & 68 & 790\\ -6 & 9 & 7 & 8 & 0 & 69 & 780\\ +6 & 0 & 7 & 8 & 9 & 60 & 789\\ -7 & 8 & 6 & 9 & 0 & 78 & 690\\ +7 & 9 & 6 & 8 & 0 & 79 & 680\\ -7 & 0 & 6 & 8 & 9 & 70 & 689\\ -8 & 9 & 6 & 7 & 0 & 89 & 670\\ +8 & 0 & 6 & 7 & 9 & 80 & 679\\ -9 & 0 & 6 & 7 & 8 & 90 & 678 \end{array}\end{array} = 0.$$

Vierte Transformation.

Multiplicirt man Gleichung (37) mit $45b$, so erhält man:

$$(37')\qquad \frac{E\cdot 145.45b}{123^9} = \begin{array}{c}13\;13\;45\;23\;23\;23\quad f(1245)\quad f(145)\\ \hline \begin{array}{rcccccccc} -6 & 7 & 6 & 8 & 9 & 0 & 67 & 890\\ +6 & 8 & 6 & 7 & 9 & 0 & 68 & 790\\ -6 & 9 & 6 & 7 & 8 & 0 & 69 & 780\\ +6 & 0 & 6 & 7 & 8 & 9 & 60 & 789\\ -7 & 8 & 6 & 6 & 9 & 0 & 78 & 690\\ +7 & 9 & 6 & 6 & 8 & 0 & 79 & 680\\ -7 & 0 & 6 & 6 & 8 & 9 & 70 & 689\\ -8 & 9 & 6 & 6 & 7 & 0 & 89 & 670\\ +8 & 0 & 6 & 6 & 7 & 9 & 80 & 679\\ -9 & 0 & 6 & 6 & 7 & 8 & 90 & 678 \end{array}\end{array} = 0.$$

Aus Gleichung (27) folgt, wenn man a statt 7, b statt 8 schreibt und ferner 1, 2, 3, 4, 5, 6 resp. durch 2, 3, 4, 5, 6, 1 ersetzt,

$$\begin{array}{rcc} 45 & 23 & f\,(245)\\ \hline +6 & 6 & 1ab\\ -1 & 1 & 6ab\\ +a & a & 61b\\ -b & b & 61a \end{array} = 0;$$

und hieraus

$$\begin{array}{ccc} 45 & 23 & f(1245)\\ \hline 6 & 6 & ab \end{array} = -\,145.123.\,f(2456ab) + \begin{array}{rc} 45\;23 & f\,(1245)\\ \hline +\,aa & 6b\\ -\,bb & 6a \end{array}.$$

Substituirt man die sich hieraus ergebenden Werthe von

$$\begin{array}{ccc} 45 & 23 & f\,(1245)\\ \hline 6 & 6 & 78 \end{array};\quad \begin{array}{ccc} 45 & 23 & f\,(1245)\\ \hline 6 & 6 & 79 \end{array}\ \text{u. s. w.}$$

in die sechs *letzten* Glieder der Gleichung (37′) und ordnet: so kommt, wenn man zur Abkürzung

$$\begin{array}{rcc} 13 & 45 & f\,(145) \\ \hline +6 & 6 & abc \\ -a & a & 6bc \\ +b & b & 6ac \\ -c & c & 6ab \end{array} = \chi\,(abc)$$

setzt,

$$\frac{E\cdot 145\cdot 456}{123^9} = 145\cdot 123\cdot \begin{array}{rccccc} 13 & 13 & 23 & 23 & f\,(2456) & f\,(1456) \\ \hline +7 & 8 & 9 & 0 & 78 & 90 \\ -7 & 9 & 8 & 0 & 79 & 80 \\ +7 & 0 & 8 & 9 & 70 & 89 \\ +8 & 9 & 7 & 0 & 89 & 70 \\ -8 & 0 & 7 & 9 & 80 & 79 \\ +9 & 0 & 7 & 8 & 90 & 78 \end{array}$$

$$+\begin{array}{rccccc} 13 & 23 & 23 & 23 & f\,(1245) & \\ \hline -7 & 8 & 9 & 0 & 67 & \chi(890) \\ +8 & 7 & 9 & 0 & 68 & \chi(790) \\ -9 & 7 & 8 & 0 & 69 & \chi(780) \\ +0 & 7 & 8 & 9 & 60 & \chi(789). \end{array}$$

Nun findet man aber, wenn man in Gleichung (27) statt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 resp. 1, 3, 4, 5, 6, a, b, c substituirt,

$$\begin{array}{rcc} 13 & 14 & f\,(145) \\ \hline +6 & 6 & abc \\ -a & a & 6bc \\ +b & b & 6ac \\ -c & c & 6ab \end{array} = 0 \text{ oder } \chi\,(abc) = 0;$$

es ergiebt sich daher nach der Division durch 145.123, die sechsgliedrige Gleichung:

$$\frac{E\cdot 456}{123^{10}} = \begin{array}{rccccc} 13 & 13 & 23 & 23 & f\,(2456) & f\,(1456) \\ \hline +7 & 8 & 9 & 0 & 78 & 90 \\ -7 & 9 & 8 & 0 & 79 & 80 \\ +7 & 0 & 8 & 9 & 70 & 89 \\ +8 & 9 & 7 & 0 & 89 & 70 \\ -8 & 0 & 7 & 8 & 80 & 79 \\ +9 & 0 & 7 & 9 & 90 & 78 \end{array} = 0;$$

oder

$$(38)\qquad \frac{E\cdot 456}{123^{10}} = \begin{array}{ccccccc} & 13 & 13 & 23 & 23 & f\,(456) & f\,(456) \\ \hline + & 7 & 8 & 9 & 0 & 278 & 190 \\ - & 7 & 9 & 8 & 0 & 279 & 180 \\ + & 7 & 0 & 8 & 9 & 270 & 189 \\ + & 8 & 9 & 7 & 0 & 289 & 170 \\ - & 8 & 0 & 7 & 9 & 280 & 179 \\ + & 9 & 0 & 7 & 8 & 290 & 178 \end{array} = 0\,.$$

Anmerkung. Der Verfasser hat diese bemerkenswerthe Gleichung ursprünglich auf einem viel kürzeren und directeren Wege gefunden. Wenn er es nichts desto weniger vorzog, sie vermittelst successiver Transformationen aus der Gleichung (18) herzuleiten: so geschah dies, weil das auf dem directeren Wege erhaltene Resultat wohl als ein plausibles, nicht aber als ein durchaus unanfechtbares gelten konnte. Er sah sich daher veranlasst, eine sicherere, wenn auch weitläuftigere Herleitungsmethode aufzusuchen.

Fünfte Transformation.

Aus Gleichung (28) folgt:

$$\begin{array}{ccc} f & (456) & f\,(456) \\ \hline + & 278 & 190 \\ - & 279 & 180 \\ + & 270 & 189 \end{array} = f\,(456271)\; f\,(456890),$$

und

$$\begin{array}{ccc} f & (456) & f\,(456) \\ \hline + & 178 & 290 \\ - & 179 & 280 \\ + & 170 & 289 \end{array} = f\,(456172)\; f\,(456890);$$

oder

$$\begin{array}{ccc} f & (456) & f\,(456) \\ \hline + & 278 & 190 \\ - & 279 & 180 \\ + & 270 & 189 \\ - & 127 & 890 \end{array} = 0 \text{ und } \begin{array}{ccc} f & (456) & f\,(456) \\ \hline + & 289 & 170 \\ - & 280 & 179 \\ + & 290 & 178 \\ + & 127 & 890 \end{array} = 0.$$

Zieht man diese Gleichungen, nachdem sie resp. mit

$$\begin{array}{cccc} 13 & 13 & 23 & 23 \\ \hline 7 & 8 & 9 & 0 \end{array} \text{ und } \begin{array}{cccc} 13 & 13 & 23 & 23 \\ \hline 8 & 9 & 7 & 0 \end{array}$$

multiplicirt worden, von Gleichung (38) ab, so erhält man:

$$\frac{E\cdot 456}{123^{10}} = \begin{array}{rrrl} 13 & 23 & f\,(456) & f\,(456) \\ \hline +\,7 & 0 & 279 & 180\,(138\,.\,239 - 139\,.\,238) \\ -\,7 & 9 & 270 & 189\,(138\,.\,230 - 130\,.\,238) \\ +\,8 & 7 & 280 & 179\,(139\,.\,230 - 130\,.\,239) \\ -\,9 & 7 & 290 & 178\,(138\,.\,230 - 130\,.\,238) \\ +\,8 & 0 & 127 & 890\,(137\,.\,239 - 139\,.\,237) \end{array} = 0;$$

und hieraus:

$$(39) \qquad \frac{E\cdot 456}{123^{11}} = \begin{array}{rrrrr} 13 & 23 & 3 & f\,(456) & f\,(456) \\ \hline +\,7 & 0 & 89 & 279 & 180 \\ -\,7 & 9 & 80 & 270 & 189 \\ +\,8 & 7 & 90 & 280 & 179 \\ -\,9 & 7 & 80 & 290 & 178 \\ +\,8 & 0 & 79 & 127 & 890 \end{array} = 0,$$

also eine fünfgliedrige Gleichung.

Sechste Transformation.

Da im gegenwärtigen Falle

$$D = \pm \frac{E}{123^{11}},$$

so erhält man die Bedingungsgleichung in ihrer reinsten Form, wenn man aus Gleichung (39) den Divisor 456 oder aus Gleichung (38) den Divisor 123 . 456 ausscheidet. Wir thun hier das letztere, da sich die dazu erforderlichen Operationen leichter gestalten und auch die resultirende Gleichung eine grössere Uebersichtlickkeit gewährt.

Nach Gleichung (28′) ist:

$$\begin{array}{rr} f\,(456) & f\,(456) \\ \hline +\ 278 & 190 \\ -\ 279 & 180 \\ +\ 270 & 189 \\ +\ 289 & 170 \\ -\ 280 & 179 \\ +\ 290 & 178 \end{array} = 0.$$

Zieht man diese Gleichung, nachdem sie mit

$$\frac{13\quad 13\quad 23\quad 23}{7\quad 8\quad 9\quad 0}$$

multiplicirt worden, von Gleichung (38) ab, so kommt:

$$\frac{E\cdot 456}{123^{10}} = \begin{array}{rcccc} 13 & 23 & f\,(456) & f\,(456) & \\ \hline +\,7 & 0 & 279 & 180 & (138\,.\,239 - 139\,.\,238) \\ -\,7 & 9 & 270 & 189 & (138\,.\,230 - 130\,.\,238) \\ -\,8 & 0 & 289 & 170 & (137\,.\,239 - 139\,.\,237) \\ +\,8 & 9 & 280 & 179 & (137\,.\,230 - 130\,.\,237) \\ - & & 290 & 178 & \begin{pmatrix} 137\,.\,138\,.\,239\,.\,230 \\ -139\,.\,130\,.\,237\,.\,238 \end{pmatrix} \end{array} = 0;$$

und folglich

$$(38') \qquad \frac{E\cdot 456}{123^{11}} = \begin{array}{rccccc} 13 & 23 & 3 & f\,(456) & f\,(456) \\ \hline +\,7 & 0 & 89 & 279 & 180 \\ -\,7 & 9 & 80 & 270 & 189 \\ -\,8 & 0 & 79 & 289 & 170 \\ +\,8 & 9 & 70 & 280 & 179 \\ \left.\begin{array}{rcc} -\,7 & 0 & 89 \\ -\,9 & 8 & 70 \end{array}\right\} & & & 290 & 178^{*)} \end{array} = 0.$$

Aus

$$f\,(123\,456) = 123\,.\,256\,.\,345\,.\,146 - 456\,.\,235\,.\,126\,.\,134;$$

folgt, wenn man 1, 2, 3, 4, 5, 6 resp. durch 5, 4, 6, a, b, c ersetzt,

$$f\,(546\,abc) = 546\,.\,4bc\,.\,6ab\,.\,5ac - abc\,.\,46b\,.\,54c\,.\,56a;$$

oder

$$f\,(456\,abc) = 456\,.\,4bc\,.\,5ac\,.\,6ab - abc\,.\,56a\,.\,46b\,.\,45c.$$

Substituirt man die sich hieraus ergebenden Werthe von

$$f\,(456\,279)\;;\; f\,(456\,1810)\;;\; f\,(456\,2710) \text{ u. s. w.}$$

in Gleichung (38′) und entwickelt, so findet man eine Gleichung von der Form:

$$(38'') \qquad \frac{E\cdot 456}{123^{11}} = 456^2\,T - 456\,U + V = 0,$$

in welcher

$$T = \begin{array}{rcccccccc} 13 & 23 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ \hline +\,7 & 0 & 89 & 79 & 80 & 29 & 10 & 27 & 18 \\ -\,7 & 9 & 80 & 70 & 89 & 20 & 19 & 27 & 18 \\ -\,8 & 0 & 79 & 89 & 70 & 29 & 10 & 28 & 17 \\ +\,8 & 9 & 70 & 80 & 79 & 20 & 19 & 28 & 17 \\ \left.\begin{array}{rcc} -\,7 & 0 & 89 \\ -\,9 & 8 & 70 \end{array}\right\} & & & 90 & 78 & 20 & 18 & 29 & 17 \end{array};$$

*) Es ist nämlich:

$$\begin{pmatrix} 137\,.\,138\,.\,239\,.\,230 \\ -139\,.\,130\,.\,237\,.\,238 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 137\,.\,138\,.\,239\,.\,230 \\ -137\,.\,139\,.\,238\,.\,230 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 139\,.\,130\,.\,237\,.\,238 \\ -137\,.\,139\,.\,238\,.\,230 \end{pmatrix}$$
$$= \left\{\begin{array}{l} \,137\,.\,230\,.\,(138\,.\,239 - 139\,.\,238) \\ +\,139\,.\,238\,.\,(137\,.\,230 - 130\,.\,237) \end{array}\right. \text{ u. s. w.}$$

$$U = \begin{array}{cccccccccc} 13 & 23 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 56 & 46 & 45 \\ \hline +7 & 0 & 89 & 79 & 80 & 10 & 18 & 2 & 7 & 9 \\ -7 & 9 & 80 & 70 & 89 & 19 & 18 & 2 & 7 & 0 \\ -8 & 0 & 79 & 89 & 70 & 10 & 17 & 2 & 8 & 9 \\ +8 & 9 & 70 & 80 & 79 & 19 & 17 & 2 & 8 & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\left.\begin{matrix} -7 & 0 & 89 \\ -9 & 8 & 70 \end{matrix}\right\}} & 90 & 78 & 18 & 17 & 2 & 9 & 0 \end{array}$$

$$+ \begin{array}{cccccccccc} 13 & 23 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 56 & 46 & 45 \\ \hline +7 & 0 & 89 & 80 & 79 & 29 & 27 & 1 & 8 & 0 \\ -7 & 9 & 80 & 89 & 70 & 20 & 27 & 1 & 8 & 9 \\ -8 & 0 & 79 & 70 & 89 & 29 & 28 & 1 & 7 & 0 \\ +8 & 9 & 70 & 79 & 80 & 20 & 28 & 1 & 7 & 9 \\ \multicolumn{3}{c}{\left.\begin{matrix} -7 & 0 & 89 \\ -9 & 8 & 70 \end{matrix}\right\}} & 78 & 90 & 20 & 29 & 1 & 7 & 8 \end{array};$$

$$V = \begin{array}{ccccccccccc} 13 & 23 & 3 & 2 & 1 & 56 & 56 & 46 & 46 & 45 & 45 \\ \hline +7 & 0 & 89 & 79 & 80 & 2 & 1 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ -7 & 9 & 80 & 70 & 89 & 2 & 1 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ -8 & 0 & 79 & 89 & 70 & 2 & 1 & 8 & 7 & 9 & 0 \\ +8 & 9 & 70 & 80 & 79 & 2 & 1 & 8 & 7 & 0 & 9 \\ \multicolumn{3}{c}{\left.\begin{matrix} -7 & 0 & 89 \\ -9 & 8 & 70 \end{matrix}\right\}} & 90 & 78 & 2 & 1 & 9 & 7 & 0 & 8 \end{array}.$$

Nun verschwindet die Determinante

$$\begin{bmatrix} 13 \cdot 12 \,, & 13 \cdot 23 \,, & 23 \cdot 12 \,, & 23 \cdot 13 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

identisch, da sie zwei gleiche Reihen besitzt. Isolirt man also die beiden ersten Producte $13 \cdot 12$, $13 \cdot 23$ und erwägt, dass

$$\begin{bmatrix} 13 \cdot 12 \,, & 13 \cdot 23 \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{13 \cdot 13}{a \quad b} \, (12a . 23b - 12b . 23a) = 123 \cdot \frac{13 \quad 13 \quad 2}{a \quad b \quad ab};$$

$$\begin{bmatrix} 23 \cdot 12 \,, & 23 \cdot 13 \\ a & b \end{bmatrix} = 123 \cdot \frac{23 \quad 23 \quad 1}{a \quad b \quad ab};$$

so findet man nach der Division durch 123^2,

$$\begin{array}{cccccc} 13 & 13 & 23 & 23 & 2 & 1 \\ \hline +7 & 8 & 9 & 0 & 78 & 90 \\ -7 & 9 & 8 & 0 & 79 & 80 \\ +7 & 0 & 8 & 9 & 70 & 89 \\ +8 & 9 & 7 & 0 & 89 & 70 \\ -8 & 0 & 7 & 9 & 80 & 79 \\ +9 & 0 & 7 & 8 & 90 & 78 \end{array} = 0.$$

Zieht man von dieser Gleichung die ebenfalls identische

$$\frac{13\;\;13\;\;23\;\;23}{7\;\;\;8\;\;\;9\;\;\;0}\cdot\left\{\begin{array}{rcc} & 2 & 1 \\ \hline + & 78 & 90 \\ - & 79 & 80 \\ + & 70 & 89 \\ + & 89 & 70 \\ - & 80 & 79 \\ + & 90 & 78 \end{array}\right\} = 0\,;$$

ab, so erhält man:

$$\begin{array}{rccccc} & 13 & 23 & 3 & 2 & 1 \\ \hline +7 & 0 & 89 & & 79 & 80 \\ -7 & 9 & 80 & & 70 & 98 \\ -8 & 0 & 79 & & 89 & 70 \\ +8 & 9 & 70 & & 80 & 79 \\ -7 & 0 & 89 & \multirow{2}{*}{\}} & \multirow{2}{*}{90} & \multirow{2}{*}{78} \\ -9 & 8 & 70 & & & \end{array} = 0;$$

also kommt, wenn diese Gleichung durch $v = 0$ bezeichnet wird,

$$V = V - v\cdot\frac{56\;\;56\;\;46\;\;46\;\;45\;\;45}{1\;\;\;2\;\;\;7\;\;\;8\;\;\;9\;\;\;0}$$

$$= \begin{array}{rccc} & 13 & 23 & 3 \\ \hline + & 7 & 0 & 89 \\ + & 9 & 8 & 70 \end{array}\cdot\frac{2\;\;\;1}{9\;\;\;0}\cdot\begin{array}{rcccccc} & 56 & 56 & 46 & 46 & 45 & 45 \\ \hline + & 1 & 2 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ - & 1 & 2 & 7 & 9 & 8 & 0 \end{array}$$

$$= 456\cdot\begin{array}{rccc} & 13 & 23 & 3 \\ \hline - & 7 & 0 & 89 \\ - & 9 & 8 & 70 \end{array}\cdot\frac{2\;\;\;\;1\;\;56\;\;56\;\;46\;\;45\;\;4}{90\;\;78\;\;1\;\;\;2\;\;\;7\;\;\;0\;\;\;89}\,.$$

Substituirt man diesen Werth von V in Gleichung (38″) und dividirt durch 456, so gelangt man schliesslich zu der Bedingungsgleichung in ihrer reinsten Form, nämlich zu der 20gliedrigen Gleichung:

$$\text{(40)}\qquad \frac{E}{123^{11}} = 0 =$$

$$\left.\begin{array}{l} +137.230.389.\left[\begin{array}{l} +\;456.479.480.529.510.627\;.\;618 \\ -\;279.480.510.618.256.467\;.\;459 \\ -\;180.479.529.627.156.468\;.\;450 \end{array}\right. \\ -137.239.380.\left[\begin{array}{l} +\;456.470.489.520.519.627\;.\;618 \\ -\;270.489.519.618.256.467\;.\;450 \\ -\;189.470.520.627.156.468\;.\;459 \end{array}\right. \\ -138.230.379.\left[\begin{array}{l} +\;456.489.470.529.510.628\;.\;617 \\ -\;289.470.510.617.256.468\;.\;459 \\ -\;170.489.529.628.156.467\;.\;450 \end{array}\right. \end{array}\right\}$$

$$+\,138\,.\,239\,.\,370\,.\left[\begin{array}{cl} + & 456\,.\,480\,.\,479\,.\,520\,.\,519\,.\,628\,.\,617 \\ - & 280\,.\,479\,.\,519\,.\,617\,.\,256\,.\,468\,.\,450 \\ - & 179\,.\,480\,.\,520\,.\,628\,.\,156\,.\,467\,.\,459 \end{array}\right]$$

$$-\left[\begin{array}{l} 137\,.\,230\,.\,389 \\ +139\,.\,238\,.\,370 \end{array}\right].\left[\begin{array}{cl} + & 456\,.\,490\,.\,478\,.\,520\,.\,518\,.\,629\,.\,617 \\ - & 290\,.\,478\,.\,518\,.\,617\,.\,256\,.\,469\,.\,450 \\ - & 178\,.\,490\,.\,520\,.\,629\,.\,156\,.\,467\,.\,458 \\ + & 290\,.\,178\,.\,156\,.\,256\,.\,467\,.\,450\,.\,489 \end{array}\right]$$

15.

Jede der Gleichungen (18), (35), 36), (37), (38), (39), (40) ist, wie man sieht, eines rein geometrischen Ausdrucks fähig. In dieser Hinsicht dürfte Gleichung (38) den Vorzug verdienen; denn sie steht, was die Anzahl und Beschaffenheit der Glieder anbelangt, nur der Gleichung (39) nach, übertrifft aber diese durch die Regelmässigkeit und leichte Erkennbarkeit ihres Bildungsgesetzes.

Es ist hier nicht die Absicht, auf die Anwendungen der mitgetheilten Gleichungen näher einzugehen. Ein einziges Beispiel genüge, ihren Nutzen thatsächlich zu bewähren.

Nimmt man an, dass die Punkte P_1, P_3, P_7 und ferner, dass die Punkte P_2, P_3, P_8 in gerader Linie liegen, so ist $137 = 0$, $238 = 0$, und die Gleichung (38) reducirt sich auf

$$\frac{\begin{array}{cccccc} 13 & 13\;23 & 23 & f\,(456) & f\,(456) \end{array}}{\begin{array}{cccccc} +\,8 & 9\;\;7 & 0 & 289 & 170 \\ -\,8 & 0\;\;7 & 9 & 280 & 179 \end{array}} = 0.$$

Fügt man die Annahme hinzu, dass die Punkte P_4, P_5, P_6, P_1, P_7 P_9 auf einem Kegelschnitte liegen, so ist auch $f\,(456\;179) = 0$ und folglich:

$$138\,.\,139\,.\,237\,.\,230\,.\,f(456\;289)\,.\,f(456\;170) = 0.$$

Es kann aber unsern Annahmen zufolge keine der Determinanten 138, 139, 237, 230 verschwinden, da nicht mehr als drei Punkte einer Linie dritten Grades in gerader Linie liegen können. Ebenso wenig kann $f\,(456\;170) = 0$ sein, da der durch die Punkte P_4, P_5, P_6, P_1, P_7 gehende Kegelschnitt die Linie dritten Grades in nicht mehr als sechs Punkten schneiden kann. Hieraus folgt, dass

$$f\,(456\;289) = 0$$

sein muss, dass also die Punkte P_4, P_5, P_6, P_2, P_8, P_9 ebenfalls auf einem Kegelschnitte liegen. Da nun dieser mit dem ersteren die vier Punkte P_4, P_5, P_6, P_9 gemein hat, so schliesst man ohne Weiteres auf folgenden bereits bekannten Satz:

Es sei L eine ebene Linie dritten Grades. Durch vier Punkte derselben, A, B, C und D, lege man irgend einen Kegelschnitt, welcher L noch in zwei anderen Punkten, E und F, schneide. Die durch E und F gehende Gerade trifft L in einem dritten Punkte G, welcher für alle durch A, B, C und D gehenden Kegelschnitte derselbe ist.

Frankfurt a. M., den 31. October 1867.

Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen, insbesondere über die Reihe:

$$1 + \frac{a_0\, a_1\, a_2}{1\,.\,b_1\, b_2}\, x + \frac{a_0\,(a_0+1)\, a_1\,(a_1+1)\, a_2\,(a_2+1)}{1\,.\,2\,.\,b_1\,(b_1+1)\, b_2\,(b_2+1)}\, x^2 + \cdots\cdots$$

Von J. Thomae in Halle.

Bei der Integration linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten, ist es in mancher Hinsicht von Vortheil, die Differentialquotienten nach der unabhängigen Variabeln x in Differentialquotienten nach $\lg x$ umzuformen, so dass dieselben die Gestalt erhalten:

$$(1) \quad X_0 \cdot \frac{d^h y}{d(\lg x)^h} + X_1 \cdot \frac{d^{h-1} y}{d\,(\lg x)^{h-1}} + \cdot\cdot\; X_{h-1}\, \frac{dy}{d \lg x} + X_h \cdot y = 0,$$

worin $X_0,\, X_1,\, ..\, X_h$ ganze Functionen von x sind. Setzt man nämlich für y die mit einer unbestimmten Potenz beginnende, und nach um eine Einheit steigenden oder fallenden Potenzen von x geordnete Reihe

$$y = \Sigma a_n x^n$$

in die Differentialgleichung ein, so fangen die differenzirten Reihen alle mit derselben Potenz von x an, und man erhält so in übersichtlicher Weise die Gleichung:

$$\Sigma a_n\, (n^h\, X_0 + n^{h-1} X_1 + \cdots X_h)\; x^n = 0,$$

aus der sich für die Coefficienten $a_n,\, a_{n-1},\, \ldots$ Recursionsformeln ergeben, die vom h^{ten} Grade in Bezug auf n sind. Im einfachsten Falle sind die Coefficienten $X_0,\, X_1,\, ..\, X_h$ Constanten, etwa $A_0,\, A_1,\, ..\, A_h$. Es sind dann die particulären Integrale der Differentialgleichung (1) Potenzen von x, deren Exponenten $\alpha,\, \alpha',\, ..\, \alpha^{(h-1)}$ die Wurzeln der Gleichungen sind

$$\mu^h\, A_0 + \mu^{h-1}\, A_1 + \cdot\cdot\; \mu\, A_{h-1} + A_h = 0.$$

Sind aber einige von diesen Wurzeln einander gleich, etwa $\alpha,\, \alpha',\, ..\, \alpha^{(r)}$, so sind die ihnen entsprechenden Integrale

$$x^\alpha\,,\; x^\alpha \lg x\,,\; x^\alpha\, (\lg x)^2,\, ..\; x^\alpha\, (\lg x)^{r-1}\,.$$

Setzt man z für $\lg x$, so erhält man hieraus die Integrale einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten.

Demnächst ist der einfachste Fall der, in welchem die Coefficienten $X_0,\, X_1,\, ..\, X_h$ ganze lineare Functionen von x sind. Die Diffe-

rentialgleichung (1) kann dann, abgesehen von speciellen Fällen, auf die Form gebracht werden

(2)
$$(1-x)\frac{d^h y}{d(\lg x)^h}+(-A_1-B_1x)\frac{d^{h-1}y}{d(\lg x)^{h-1}}+(A_2-B_2x)\frac{d^{h-2}y}{d(\lg x)^{h-2}}+\cdots+((-1)^hA_h-B_hx)\,y=0.$$

Sind nun $\alpha, \alpha', \ldots \alpha^{(h-1)}$ die Wurzeln der Gleichung
$$\mu^h - A_1\mu^{h-1} + A_2\mu^{h-2} - \cdots + (-1)^h A_h = 0$$
und $-\beta, -\beta', \ldots -\beta^{(h-1)}$ die Wurzeln der Gleichung:
$$\mu^h + B_1\mu^{h-1} + B_2\mu^{h-2} + \cdots B_h = 0,$$
und setzt man die Reihe $\Sigma\, a_n x^n$ in die Differentialgleichung (2) ein, so liefert die Methode der unbestimmten Coefficienten die Recursionsformel: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+\beta}{n+1-\alpha}\cdot\frac{n+\beta'}{n+1-\alpha'}\cdots\frac{n+\beta^{(h-1)}}{n+1-\alpha^{(h-1)}}$,

welcher durch die Gleichung genügt wird:
$$a_n=\frac{\text{Const.}\ (-1)^{hn}}{\Pi(n-\alpha)\cdot\Pi(n-\alpha')\cdots\Pi(n-\alpha^{(h-1)})\cdot\Pi(-n-\beta)\,\Pi(-n-\beta')\cdots\Pi(-n-\beta^{(h-1)})}.$$
Demnach wird die Differentialgleichung (2) durch die Reihe
$$\Sigma\,\frac{\text{Const.}\ (-1)^{hn}\,x^n}{\Pi(n-\alpha)\cdot\Pi(n-\alpha')\cdots\Pi(n-\alpha^{(h-1)})\cdot\Pi(-n-\beta)\cdot\Pi(-n-\beta')\cdots\Pi(-n-\beta^{(h-1)})}$$
integrirt, sowohl wenn die Exponenten von α oder α' .. oder $\alpha^{(h-1)}$ an um eine Einheit zunehmen, als auch wenn sie von $-\beta$ oder $-\beta'$ oder $-\beta''$ .. oder $-\beta^{(h-1)}$ an um eine Einheit abnehmen.

Führen wir nun die Bezeichnung ein
$$F_\varepsilon\begin{pmatrix}\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(h-1)} & \\ \beta, \beta', \beta'', \ldots \beta^{(h-1)} & x\end{pmatrix}=$$
$$x^\varepsilon\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^{hn}\cdot x^n\cdot\Pi(\varepsilon-\alpha)\Pi(\varepsilon-\alpha')\cdots\Pi(\varepsilon-\alpha^{(h-1)})\Pi(-\varepsilon-\beta)\Pi(-\varepsilon-\beta')\cdots\Pi(-\varepsilon-\beta^{(h-1)})}{\Pi(n+\varepsilon-\alpha)\Pi(n+\varepsilon-\alpha')\cdots\Pi(n+\varepsilon-\alpha^{(h-1)})\Pi(-n-\varepsilon-\beta)\Pi(-n-\varepsilon-\beta')\cdots\Pi(-n-\varepsilon-\beta^{(h-1)})}$$
machen die Voraussetzung, dass von den Differenzen
$$\alpha-\alpha',\ \alpha-\alpha'', \ldots, \alpha^{(h-2)}-\alpha^{(h-1)},\ \beta-\beta',\ \beta-\beta'', \ldots, \beta^{(h-2)}-\beta^{(h-1)}$$
keine eine ganze Zahl sei, und setzen ferner:

$A_1=\alpha+\alpha'+\cdots\alpha^{(h-1)}$, $\quad B_1=\beta+\beta'+\cdots\beta^{(h-1)}$,

$A_2=\alpha\alpha'+\alpha\alpha''+\cdots\alpha^{(h-2)}\alpha^{(h-1)}$, $\quad B_2=\beta\beta'+\beta\beta''+\cdots\beta^{(h-2)}\beta^{(h-1)}$

. . . .

$A_h=\alpha\alpha'\alpha''\cdots\alpha^{(h-1)}$, $\quad B_h=\beta\beta'\beta''\cdots\beta^{(h-1)}$.

Alsdann sind die $2h$ Reihen
$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha', \ldots \alpha^{(h-1)} & \\ \beta,\beta', \ldots \beta^{(h-1)} & x\end{pmatrix},\ F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha,\alpha', \ldots \alpha^{(h-1)} & \\ \beta,\beta', \ldots \beta^{(h-1)} & x\end{pmatrix},\ F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha,\alpha', \ldots \alpha^{(h-1)} & \\ \beta,\beta', \ldots \beta^{(h-1)} & x\end{pmatrix}, \ldots$$
$$F_\beta\begin{pmatrix}\beta,\beta', \ldots \beta^{(h-1)} & \\ \alpha,\alpha', \ldots \alpha^{(h-1)} & \frac{1}{x}\end{pmatrix},\ F_{\beta'}\begin{pmatrix}\beta,\beta', \ldots \beta^{(h-1)} & \\ \alpha,\alpha', \ldots \alpha^{(h-1)} & \frac{1}{x}\end{pmatrix},\ F_{\beta''}\begin{pmatrix}\beta,\beta', \ldots \beta^{(h-1)} & \\ \alpha,\alpha', \ldots \alpha^{(h-1)} & \frac{1}{x}\end{pmatrix}, \ldots$$

eben so viele verschiedene particuläre Integrale der Differentialgleichung (2), von denen die aufsteigenden für Norm $x < 1$, die absteigenden für Norm $x > 1$ convergiren. Diese Reihen sollen *hypergeometrische Reihen h^{ter} Ordnung* genannt werden.

Diese Reihen sollen nun für den Fall $h = 3$, in welchem sie sich, abgesehen von einem Factor, der eine Potenz von x ist, von der in der Ueberschrift gegebenen nur dadurch unterscheiden, dass für die Grössen a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, einfache Ausdrücke in $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ eingetreten sind, weiter untersucht werden. Und zwar soll die stetige Fortsetzung irgend einer der Reihen über ihr Convergenzgebiet hinaus durch die dort convergirenden Reihen dargestellt werden. Ist also:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha + \alpha' + \alpha'', & B_1 &= \beta + \beta' + \beta'', \\ A_2 &= \alpha\alpha' + \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'', & B_2 &= \beta\beta' + \beta\beta'' + \beta'\beta'', \\ A_3 &= \alpha\alpha'\alpha'', & B_3 &= \beta\beta'\beta'', \end{aligned}$$

so wird die zu behandelnde Differentialgleichung

$$(3) \quad (1-x)\frac{d^3 y}{d\,(\log x)^3} - (A_1 + B_1 x)\frac{d^2 y}{d\,(\log x)^2} + (A_2 - B_2 x)\frac{dy}{d\log x} - (A_3 + B_3 x)\,y = 0$$

sein, und ihre Integrale werden

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha', \alpha'', \\ \beta, \beta', \beta'', \end{pmatrix} x\Bigr) \;,\; F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, \alpha', \alpha'', \\ \beta, \beta', \beta'', \end{pmatrix} x\Bigr) \;,\; F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, \alpha', \alpha'', \\ \beta, \beta', \beta'', \end{pmatrix} x\Bigr)$$

$$F_\beta\begin{pmatrix}\beta, \beta', \beta'', & \frac{1}{x} \\ \alpha, \alpha', \alpha'', & \end{pmatrix} \;,\; F_{\beta'}\begin{pmatrix}\beta, \beta', \beta'', & \frac{1}{x} \\ \alpha, \alpha', \alpha'', & \end{pmatrix} \;,\; F_{\beta''}\begin{pmatrix}\beta, \beta', \beta'', & \frac{1}{x} \\ \alpha, \alpha', \alpha'', & \end{pmatrix}$$

oder (wenn es ohne Zweideutigkeit geschehen kann) kürzer

$$F_\alpha(x) \;,\; F_{\alpha'}(x) \;,\; F_{\alpha''}(x) \;,\; F_\beta\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr) \;,\; F_{\beta'}\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr) \;,\; F_{\beta''}\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr)$$

sein. Ich bemerke noch, dass ich unter der Bezeichnung

$$F_\alpha(x), \;..\; F_{\beta''}\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr)$$

nicht blos die convergirenden Reihen, sondern zugleich auch ihre stetigen Fortsetzungen verstanden wissen will.

Machen wir nun fürs erste die Voraussetzung, dass der reelle Theil von $\alpha + \beta'' - 1$ und von $-\alpha'' - \beta''$ grösser als -1 sei, so finden wir für $F_\alpha(x)$ leicht einen Ausdruck durch ein bestimmtes Integral, der für alle Werthe von x brauchbar ist, da ja längst die gewöhnliche hypergeometrische Reihe für alle Werthe ihres vierten Elementes fortgesetzt werden kann. Es ist nämlich

$$(4) \quad F_\alpha(x) = \frac{x^\alpha\,\Pi(\alpha-\alpha')}{\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}\int_0^1 \frac{F(\alpha+\beta, \alpha+\beta', \alpha-\alpha'+1, xs)\,ds}{s^{1-\alpha-\beta''}\,.\,(1-s)^{\alpha''+\beta''}}\,.$$

Wir wollen nun einen Zweig der Function $F_\alpha(x)$ so definiren. Wir ziehen von 0 über 1 nach ∞ längs der reellen Axe in der Ebene, welche die Werthe der complexen Variabeln x repräsentirt, eine Ge-

rade, die wir den Querschnitt nennen. Die Function $F_\alpha(x)$ soll nun auf dem positiven (linken) Ufer des Querschnitts für reelle Werthe von x kleiner als Eins durch die Reihe dargestellt werden:

$$e^{\alpha \lg x}\left(1+\frac{\alpha+\beta}{1}\cdot\frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1}\cdot\frac{\alpha+\beta''}{\alpha-\alpha''+1}\,x+\cdots\right),$$

$F_\beta\left(\frac{1}{x}\right)$ für reelle x grösser als Eins durch die Reihe:

$$e^{-\beta \lg x}\left(1+\frac{\beta+\alpha}{1}\cdot\frac{\beta+\alpha'}{\beta-\beta'+1}\cdot\frac{\beta+\alpha''}{\beta-\beta''+1}\,x+\cdots\right)$$

worin $\lg x$ reell zu nehmen ist, und soll von da aus durch die ganze Ebene, ohne den Querschnitt jemals zu überschreiten, stetig fortgesetzt werden. Der so definirte Zweig soll der Hauptzweig sein, und hier immer zu Grunde gelegt werden. Aehnliches gilt von

$$F_{\alpha'}(x)\;,\;F_{\alpha''}(x)\;,\;F_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right),\;F_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Da nun zwischen je vier Integralen der Differentialgleichung (3) eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet, so kann man setzen:

$$F_\alpha(x)=\alpha_\beta\,F_\beta\left(\frac{1}{x}\right)+\alpha_{\beta'}\,F_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right)+\alpha_{\beta''}\,F_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nehmen wir dabei an, dass die Grössen β, β', β'', die mit einander vertauscht werden können, so geordnet seien, dass $\beta-\beta'$, $\beta-\beta''$, $\beta'-\beta''$ einen negativen reellen Theil besitzen, und daher für sehr grosse x die Potenzen $x^{\beta-\beta'}$, $x^{\beta-\beta''}$ gegen Null convergiren, so nähert sich $F_\alpha(x)\,.\,x^\beta$ mit wachsendem x der Constanten α_β und es ist daher:

$$\alpha_\beta=\lim_{x=\infty}\frac{x^{\alpha+\beta}\,\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}\int_0^1\frac{F(\alpha+\beta\,,\,\alpha+\beta',\,\alpha-\alpha'+1\,,xs)\,ds}{s^{1-\alpha-\beta''}\cdot(1-s)^{\alpha''+\beta''}}.$$

Wir können hierin die Annäherung des Punktes x an den unendlich fernen Punkt längs der negativen reellen Achse vor sich gehen lassen, damit die Integrationsvariabele bei der Integration niemals auf die Unstetigkeitsstelle $\frac{1}{x}$ treffe. Ist nun x sehr gross, so ist das Intervall δ, für welches Norm $(xs)<1$ ist, und also die hypergeometrische Reihe unter dem Integralzeichen convergirt, sehr klein, und da $\alpha+\beta''-1$ einen reellen Theil grösser als -1 hat, so ist das Integral über das Intervall von 0 bis δ sehr klein und convergirt mit δ gegen Null. Für das Intervall von δ bis 1 aber kann man das Integral in die beiden zerlegen:*)

---

*) Die Formeln für die Fortsetzung der gewöhnlichen hypergeometrischen Reihe, die hier angewendet sind, habe ich in Schlömilchs Zeitschrift für Math. und Phys. Jahrgang 1869 pag. 60 zusammengestellt, es haben aber dort die absteigenden Reihen ihren Hauptwerth auf dem negativen Ufer des Querschnitts.

$$\frac{e^{i\pi(\alpha+\beta)}\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\beta'-\beta-1)\,\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(\alpha+\beta'-1)\Pi(\alpha+\beta''-1)\Pi(-\alpha''-\beta'')\Pi(-\alpha'-\beta)}\int_\delta^1 \frac{F(\alpha+\beta,\alpha'+\beta,\beta-\beta'+1,\ \xi\sigma)\,ds}{s^{1-\beta''+\beta}\cdot(1-s)^{\alpha''+\beta''}}$$

$$+\frac{e^{i\pi(\alpha+\beta')}\Pi(\alpha-\alpha')\Pi(\beta-\beta'-1)\Pi(\alpha-\alpha'')\,x^{\beta-\beta'}}{\Pi(\alpha+\beta-1)\Pi(\alpha+\beta''-1)\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(-\alpha''-\beta'')}\int_\delta^1 \frac{F(\alpha+\beta',\alpha'+\beta',\beta'-\beta+1,\ \xi\sigma)\,ds}{s^{1-\beta''+\beta'}\cdot(1-s)^{\alpha''+\beta''}},$$

wo zur augenblicklichen Abkürzung ξ und σ gesetzt sind für x^{-1} und s^{-1}. Geht man hierin mit x zur Grenze ∞ über, so verschwindet δ und $x^{\beta-\beta'}$ und die hypergeometrischen Reihen unter den Integralzeichen nähern sich der Eins, und man findet:

$$(5)\quad \alpha_\beta = \frac{e^{i\pi(\alpha+\beta)}\,\Pi(\alpha-\alpha')\cdot\Pi(\alpha-\alpha'')\cdot\Pi(\beta'-\beta-1)\cdot\Pi(\beta''-\beta-1}{\Pi(\alpha+\beta'-1)\cdot\Pi(\alpha+\beta''-1)\cdot\Pi(-\alpha'-\beta)\cdot\Pi(-\alpha''-\beta)}.$$

In der Gleichung

$$F_\alpha(x) = \alpha_\beta\cdot F_\beta\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha_{\beta'}\cdot F_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha_{\beta''}\cdot F_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right)$$

bleibt die linke Seite ungeändert, wenn man die Grössen β, β', β'' vertauscht, dasselbe muss daher auch auf der rechten Seite statthaben, was nur möglich ist, wenn durch Vertauschung von β und β' der Ausdruck für $\alpha_{\beta'}$ in den für α_β übergeht, und durch Vertauschung von β mit β'' der Ausdruck für $\alpha_{\beta''}$ in den für α_β. Setzen wir nun

$$F_{\alpha'}(x) = \alpha'_\beta\cdot F_\beta\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha'_{\beta'}\cdot F_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha'_{\beta''}\cdot F_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$F_{\alpha''}(x) = \alpha''_{\beta}\cdot F_\beta\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha''_{\beta'}\cdot F_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha''_{\beta''}\cdot F_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$F_\beta\left(\frac{1}{x}\right) = \beta_\alpha\cdot F_\alpha(x) + \beta_{\alpha'}\cdot F_{\alpha'}(x) + \beta_{\alpha''}\cdot F_{\alpha''}(x),$$

$$F_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right) = \beta'_\alpha\cdot F_\alpha(x) + \beta'_{\alpha'}\cdot F_{\alpha'}(x) + \beta'_{\alpha''}\cdot F_{\alpha''}(x),$$

$$F_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right) = \beta''_\alpha\cdot F_\alpha(x) + \beta''_{\alpha'}\cdot F_{\alpha'}(x) + \beta''_{\alpha''}\cdot F_{\alpha''}(x),$$

so finden wir in derselben Weise die Coefficienten α'_β, $\alpha'_{\beta'}$, $\ldots$ $\beta''_{\alpha''}$, von denen wir hier eine Zusammenstellung folgen lassen:

$$\alpha_\beta = \frac{\Pi(\alpha-\alpha')}{\Pi(-\beta-\alpha')}\,\frac{\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(-\beta-\alpha'')}\,\frac{\Pi(\beta'-\beta-1)}{\Pi(\beta'+\alpha-1)}\,\frac{\Pi(\beta''-\beta-1)}{\Pi(\beta''+\alpha-1)}\,e^{i\pi(\alpha+\beta)}$$

$$\alpha_{\beta'} = \frac{\Pi(\alpha-\alpha')}{\Pi(-\beta'-\alpha')}\,\frac{\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(-\beta'-\alpha'')}\,\frac{\Pi(\beta-\beta'-1)}{\Pi(\beta+\alpha-1)}\,\frac{\Pi(\beta''-\beta'-1)}{\Pi(\beta''+\alpha-1)}\,e^{i\pi(\alpha+\beta')}$$

$$\alpha_{\beta''} = \frac{\Pi(\alpha-\alpha')}{\Pi(-\beta''-\alpha')}\,\frac{\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(-\beta''-\alpha'')}\,\frac{\Pi(\beta-\beta''-1)}{\Pi(\beta+\alpha-1)}\,\frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)}{\Pi(\beta'+\alpha-1)}\,e^{i\pi(\alpha+\beta'')}$$

$$\alpha'_\beta = \frac{\Pi(\alpha'-\alpha)}{\Pi(-\beta-\alpha)}\,\frac{\Pi(\alpha'-\alpha'')}{\Pi(-\beta-\alpha'')}\,\frac{\Pi(\beta'-\beta-1)}{\Pi(\beta'+\alpha'-1)}\,\frac{\Pi(\beta''-\beta-1)}{\Pi(\beta''+\alpha'-1)}\,e^{i\pi(\alpha'+\beta)}$$

$$\alpha'_{\beta'} = \frac{\Pi(\alpha'-\alpha)}{\Pi(-\beta'-\alpha)}\,\frac{\Pi(\alpha'-\alpha'')}{\Pi(-\beta'-\alpha'')}\,\frac{\Pi(\beta-\beta'-1)}{\Pi(\beta+\alpha'-1)}\,\frac{\Pi(\beta''-\beta'-1)}{\Pi(\beta''+\alpha'-1)}\,e^{i\pi(\alpha'+\beta')}$$

$$\alpha'_{\beta''} = \frac{\Pi(\alpha'-\alpha)}{\Pi(-\beta''-\alpha)}\,\frac{\Pi(\alpha'-\alpha'')}{\Pi(-\beta''-\alpha'')}\,\frac{\Pi(\beta-\beta''-1)}{\Pi(\beta+\alpha'-1)}\,\frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)}{\Pi(\beta'+\alpha'-1)}\,e^{i\pi(\alpha'+\beta'')}$$

$$\alpha''_{\beta} = \frac{\Pi(\alpha''-\alpha)}{\Pi(-\beta-\alpha)} \frac{\Pi(\alpha''-\alpha')}{\Pi(-\beta-\alpha')} \frac{\Pi(\beta'-\beta-1)}{\Pi(\beta'+\alpha''-1)} \frac{\Pi(\beta''-\beta-1)}{\Pi(\beta''+\alpha''-1)} e^{i\pi(\alpha''+\beta)}$$

$$\alpha''_{\beta'} = \frac{\Pi(\alpha''-\alpha)}{\Pi(-\beta'-\alpha)} \frac{\Pi(\alpha''-\alpha')}{\Pi(-\beta'-\alpha')} \frac{\Pi(\beta-\beta'-1)}{\Pi(\beta+\alpha''-1)} \frac{\Pi(\beta''-\beta'-1)}{\Pi(\beta''+\alpha''-1)} e^{i\pi(\alpha''+\beta')}$$

$$\alpha''_{\beta''} = \frac{\Pi(\alpha''-\alpha)}{\Pi(-\beta''-\alpha)} \frac{\Pi(\alpha''-\alpha')}{\Pi(-\beta''-\alpha')} \frac{\Pi(\beta-\beta''-1)}{\Pi(\beta-\alpha''-1)} \frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)}{\Pi(\beta'+\alpha''-1)} e^{i\pi(\alpha''+\beta'')}$$

$$\beta_{\alpha} = \frac{\Pi(\beta-\beta')}{\Pi(-\alpha-\beta')} \frac{\Pi(\beta-\beta'')}{\Pi(-\alpha-\beta'')} \frac{\Pi(\alpha'-\alpha-1)}{\Pi(\alpha'+\beta-1)} \frac{\Pi(\alpha''-\alpha-1)}{\Pi(\alpha''+\beta-1)} e^{-i\pi(\alpha+\beta)}$$

$$\beta_{\alpha'} = \frac{\Pi(\beta-\beta')}{\Pi(-\alpha'-\beta')} \frac{\Pi(\beta-\beta'')}{\Pi(-\alpha'-\beta'')} \frac{\Pi(\alpha-\alpha'-1)}{\Pi(\alpha'+\beta-1)} \frac{\Pi(\alpha''-\beta-1)}{\Pi(\alpha''+\alpha-1)} e^{-i\pi(\alpha'+\beta)}$$

$$\beta_{\alpha''} = \frac{\Pi(\beta-\beta')}{\Pi(-\alpha''-\beta')} \frac{\Pi(\beta-\beta'')}{\Pi(-\alpha''-\beta'')} \frac{\Pi(\alpha-\alpha''-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)} \frac{\Pi(\alpha'-\alpha''-1)}{\Pi(\alpha'+\beta-1)} e^{-i\pi(\alpha''+\beta)}$$

$$\beta'_{\alpha} = \frac{\Pi(\beta'-\beta)}{\Pi(-\alpha-\beta)} \frac{\Pi(\beta'-\beta'')}{\Pi(-\alpha-\beta'')} \frac{\Pi(\alpha'-\alpha-1)}{\Pi(\alpha'+\beta'-1)} \frac{\Pi(\alpha''-\alpha-1)}{\Pi(\alpha''+\beta'-1)} e^{-i\pi(\alpha+\beta')}$$

$$\beta'_{\alpha'} = \frac{\Pi\beta'-\beta)}{\Pi(-\alpha'-\beta)} \frac{\Pi(\beta'-\beta'')}{\Pi(-\alpha'-\beta'')} \frac{\Pi(\alpha-\alpha'-1)}{\Pi(\alpha+\beta'-1)} \frac{\Pi(\alpha''-\alpha'-1)}{\Pi(\alpha''+\beta'-1)} e^{-i\pi(\alpha'+\beta')}$$

$$\beta'_{\alpha''} = \frac{\Pi(\beta'-\beta)}{\Pi(-\alpha''-\beta)} \frac{\Pi(\beta'-\beta'')}{\Pi(-\alpha''-\beta'')} \frac{\Pi(\alpha'-\alpha''-1)}{\Pi(\alpha'+\beta'-1)} \frac{\Pi(\alpha'-\alpha''-1)}{\Pi(\alpha'+\beta'-1)} e^{-i\pi(\alpha''+\beta')}$$

$$\beta''_{\alpha} = \frac{\Pi(\beta''-\beta)}{\Pi(-\alpha-\beta)} \frac{\Pi(\beta''-\beta')}{\Pi(-\alpha-\beta')} \frac{\Pi(\alpha'-\alpha-1)}{\Pi(\alpha'+\beta''-1)} \frac{\Pi(\alpha''-\alpha-1)}{\Pi(\alpha''+\beta''-1)} e^{-i\pi(\alpha+\beta'')}$$

$$\beta''_{\alpha'} = \frac{\Pi(\beta''-\beta)}{\Pi(-\alpha'-\beta)} \frac{\Pi(\beta''-\beta')}{\Pi(-\alpha'-\beta')} \frac{\Pi(\alpha-\alpha'-1)}{\Pi(\alpha+\beta''-1)} \frac{\Pi(\alpha''-\alpha'-1)}{\Pi(\alpha''+\beta''-1)} e^{-i\pi(\alpha'+\beta'')}$$

$$\beta''_{\alpha''} = \frac{\Pi(\beta''-\beta)}{\Pi(-\alpha''-\beta)} \frac{\Pi(\beta''-\beta')}{\Pi(-\alpha''-\beta')} \frac{\Pi(\alpha-\alpha''-1)}{\Pi(\alpha+\beta''-1)} \frac{\Pi(\alpha'-\alpha''-1)}{\Pi(\alpha'+\beta''-1)} e^{-i\pi(\alpha''+\beta'')}.$$

Diese Coefficienten sind jedoch unter der Voraussetzung gefunden, dass die Integrale, welche die Functionen $F_\alpha(x)$, $F_{\alpha'}(x)$, .. darstellen, einen Sinn haben, also α_β, $\alpha_{\beta'}$, $\alpha_{\beta''}$ unter der Voraussetzung, dass der reelle Theil von $\alpha + \beta'' - 1$, $- \alpha'' - \beta''$ grösser als -1 sei. Entwickelt man aber $F_\alpha(x)$ nach aufsteigenden Potenzen von $x - a$, und wählt a innerhalb des Einheitskreises so, dass der Convergenzkreis dieser Reihe (der nothwendig einen der Punkte 0 oder 1 berührt, weil nach der Theorie der Differentialgleichungen $F_\alpha(x)$ andere Unstetigkeits- oder Verzweigungsstellen als $0, 1, \infty$ nicht haben kann), ein endliches Gebiet von Punkten enthält, deren Entfernungen vom Nullpunkte grösser als Eins sind, so ist diese Reihe eine eindeutige Function der Grössen $\alpha, \alpha', .. \beta''$, und wird als Function einer einzelnen derselben nur in einzelnen Punkten unstetig. Diese Reihe, sie heisse S, genügt nun der Gleichung

$$S = \alpha_\beta \cdot F_\beta\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha_{\beta'} \cdot F_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha_{\beta''} \cdot F_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right)$$

für alle diejenigen Werthe von x, für welche sie selbst und die rechts stehenden Reihen convergiren, so lange die Grössen $\alpha, \alpha', \ldots \beta''$ den genannten Beschränkungen Genüge leisten. Da diese Beschränkungen aber für jede der Variabeln $\alpha, \alpha'', \ldots \beta''$ ein endliches Gebiet von zweifacher Ausdehnung frei lassen, so können die Ausdrücke zu beiden Seiten der Gleichung nur auf eine Weise stetig als Functionen der complexen Variabeln $\alpha, \alpha', \ldots \beta''$ fortgesetzt werden, die Gleichungen gelten daher allgemein, und da auch die Entwicklung der Reihe S aus der Reihe $F_\alpha(x)$ nicht von den speciellen Werthen der Grössen $\alpha, \alpha', \ldots \beta''$ abhängt, so behalten die oben aufgestellten Coefficienten ihre Giltigkeit für alle Werthe der Exponenten, für welche sie nicht ∞ werden.

Die hier angewendete Methode, die Fortsetzung einer aufsteigenden Reihe $F_\alpha(x)$ durch die absteigenden darzustellen, und umgekehrt, lässt sich ganz ebenso der Reihe nach auf die höhern hypergeometrischen Reihen ausdehnen.

Setzen wir

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \ldots & \alpha^{(h-1)} & \\ \beta, & \beta', & \ldots & \beta^{(h-1)} & x\end{pmatrix} =$$

$$H_{\alpha,\beta}\cdot F_\beta\begin{pmatrix}\beta, & \beta' & \ldots & \beta^{(h-1)} & \frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha' & \ldots & \alpha^{(h-1)} & \end{pmatrix} + H_{\alpha',\beta'}\cdot F_{\beta'}\begin{pmatrix}\beta, \beta' & \ldots & \beta^{(h-1)} & \frac{1}{x}\\ \alpha, \alpha' & \ldots & \alpha^{(h-1)} & \end{pmatrix} + \cdots$$

so ergiebt sich der Coefficient $H_{\alpha,\beta}$ als folgender:

$$(6)\qquad H_{\alpha,\beta} = \frac{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')\ldots\Pi(\alpha-\alpha^{(h-1)})}{\Pi(-\beta-\alpha')\,\Pi(-\beta-\alpha'')\ldots\Pi(-\beta-\alpha^{(h-1)})}\,.$$

$$\frac{\Pi(\beta'-\beta-1)\,\Pi(\beta''-\beta-1)\ldots\Pi(\beta^{(h-1)}-\beta-1)}{\Pi(\beta'+\alpha-1)\,\Pi(\beta''+\alpha-1)\ldots\Pi(\beta^{(h-1)}+\alpha-1)}\,e^{i\pi(\alpha+\beta)},$$

woraus durch Vertauschungen die übrigen Coefficienten $H_{\alpha,\beta'}\ldots$ leicht abgeleitet werden.

Integrirt man die Differentialgleichung (2) durch Reihen, welche nach Potenzen von $1-x$ geordnet sind, so findet man, dass dieselben bezüglich mit der 0^{ten}, 1^{ten}, .. $h-2^{\text{ten}}$ und γ^{ten} Potenz beginnen, wenn

$$\gamma = h - 1 - \alpha - \alpha' \ldots - \alpha^{(h-1)} - \beta - \beta' \ldots - \beta^{(h-1)}$$

gesetzt wird. Also müssen die $2h$ Functionen

$$F_\alpha(x)\,,\ F_{\alpha'}(x)\,,\ \ldots F_\beta\left(\frac{1}{x}\right),\ F_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right),\ \ldots$$

mit $(1-x)^{-\gamma}$ multiplicirt sämmtlich für $x=1$, wenn $\gamma < 0$ ist, endlich und von Null verschieden sein. Aus den Convergenzbedingungen der Fourier'schen Reihe folgt dann, dass sämmtliche $2h$ Reihen für Norm $x=1$ convergiren, so lange

$$h - 1 - \alpha - \alpha' - \cdots - \beta - \cdots - \beta^{(h-1)}$$

einen reellen Theil besitzt, der grösser als -1 ist, für $x=1$ selbst aber nur dann, wenn dieser relle Theil grösser als Null (also positiv) ist.

Die Formeln, welche den Zusammenhang zwischen je vier Integralen der Differentialgleichung (3), z. B. zwischen

$$F_\alpha(x),\ F_\beta\left(\frac{1}{x}\right),\ F_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right),\ F_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right)$$

vermitteln, vereinfachen sich wesentlich, wenn man statt dieser particulären Integrale gewisse neue einführt, die sich von ihnen nur durch constante Factoren unterscheiden. Es sei deshalb:

$$(7^a)\qquad \mathfrak{F}_\varepsilon\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ \beta, & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\Pi(\varepsilon+\beta-1)\,\Pi(\varepsilon+\beta'-1)\,\Pi(\varepsilon+\beta''-1)}{e^{(\alpha+\alpha'+\alpha'')\pi i}\,\Pi(\varepsilon-\alpha)\,\Pi(\varepsilon-\alpha')\,\Pi(\varepsilon-\alpha'')}\cdot F_\varepsilon\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ \beta, & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix},$$

$$(7^b)\qquad \mathfrak{F}_\varepsilon\begin{pmatrix}\beta, & \beta', & \beta'', & \frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\Pi(\varepsilon+\alpha-1)\,\Pi(\varepsilon+\alpha'-1)\,\Pi(\varepsilon+\alpha''-1)}{e^{(\beta+\beta'+\beta'')\pi i}\,\Pi(\varepsilon-\beta)\,\Pi(\varepsilon-\beta')\,\Pi(\varepsilon-\beta'')}\cdot F_\varepsilon\begin{pmatrix}\beta, & \beta', & \beta'' & \frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha', & \alpha'' & \end{pmatrix}.$$

Man hat dann die Relationen:

$$(8^a)\quad \mathfrak{F}_\alpha(x)\cdot e^{(\alpha'+\alpha'')\pi i} = \frac{e^{2\beta\pi i}\cdot\sin(\beta+\alpha')\pi\cdot\sin(\beta+\alpha'')\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi\cdot\sin(\beta''-\beta)\pi\cdot e^{-(\beta'+\beta'')\pi i}}\cdot F_\beta\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+\frac{e^{2\beta'\pi i}\cdot\sin(\beta'+\alpha')\pi\cdot\sin(\beta'+\alpha'')\pi}{\sin(\beta-\beta')\pi\cdot\sin(\beta''-\beta')\pi\cdot e^{-(\beta+\beta'')\pi i}}\cdot\mathfrak{F}_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+\frac{e^{2\beta''\pi i}\cdot\sin(\beta''+\alpha')\pi\cdot\sin(\beta''+\alpha'')\pi}{\sin(\beta'-\beta'')\pi\cdot\sin(\beta-\beta'')\pi\cdot e^{-(\beta+\beta')\pi i}}\cdot\mathfrak{F}_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(8^b)\quad \mathfrak{F}_{\alpha'}(x)\, e^{(\alpha+\alpha'')\pi i} = \frac{e^{2\beta\pi i}\sin(\beta+\alpha)\pi\cdot\sin(\beta+\alpha'')\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi\cdot\sin(\beta''-\beta)\pi\cdot e^{-(\beta'-\beta'')\pi i}}\cdot\mathfrak{F}_\beta\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+\frac{e^{2\beta'\pi i}\cdot\sin(\beta'+\alpha)\pi\cdot\sin(\beta'+\alpha'')\pi}{\sin(\beta-\beta')\pi\cdot\sin(\beta''-\beta')\pi\cdot e^{-(\beta+\beta'')\pi i}}\cdot\mathfrak{F}_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+\frac{e^{2\beta''\pi i}\cdot\sin(\beta''+\alpha)\pi\cdot\sin(\beta''+\alpha'')\pi}{\sin(\beta-\beta'')\pi\cdot\sin(\beta'-\beta'')\pi\cdot e^{-(\beta+\beta')\pi i}}\cdot\mathfrak{F}_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(8^c)\quad \mathfrak{F}_{\alpha''}(x)\cdot e^{(\alpha+\alpha')\pi i} = \frac{e^{2\beta\pi i}\cdot\sin(\beta+\alpha)\pi\cdot\sin(\beta+\alpha')\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi\cdot\sin(\beta''-\beta)\pi\cdot e^{-(\beta'+\beta'')\pi i}}\cdot\mathfrak{F}_\beta\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+\frac{e^{2\beta'\pi i}\cdot\sin(\beta'+\alpha)\pi\cdot\sin(\beta'+\alpha')\pi}{\sin(\beta-\beta')\pi\cdot\sin(\beta''-\beta')\pi\cdot e^{-(\beta+\beta'')\pi i}}\cdot\mathfrak{F}_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+\frac{e^{2\beta''\pi i}\cdot\sin(\beta''+\alpha)\pi\cdot\sin(\beta''+\alpha')\pi}{\sin(\beta-\beta'')\pi\cdot\sin(\beta'-\beta'')\pi\cdot e^{-(\beta+\beta')\pi i}}\cdot\mathfrak{F}_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Diese Gleichungen besitzen nun die bemerkenswerthe Eigenschaft, *dass sich ihre Coefficienten nicht ändern, wenn die Exponenten α, α', α'', β, β', β'' der $\mathfrak{F}$-Function um beliebige ganze Zahlen geändert werden.*

Ganz ähnlich lassen sich auch Gleichungen mit der nämlichen Eigenschaft für die hypergeometrischen Reihen beliebiger Ordnung aufstellen.

Sind nun

$$\mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha', \alpha'', x\\ \beta, \beta', \beta'',\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F}_{\alpha_1}\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1'', x\\ \beta_1, \beta_1', \beta_1'',\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F}_{\alpha_2}\begin{pmatrix}\alpha_2, \alpha_2', \alpha_2'', x\\ \beta_2, \beta_2', \beta_2'',\end{pmatrix}$$

drei hypergeometrische Reihen dritter Ordnung, *in denen sich die entsprechenden Exponenten nur um ganze Zahlen unterscheiden*, so folgt aus den Gleichungen (8) mit Hülfe bekannter Sätze aus der Theorie der Determinanten, dass die beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{F}_\alpha(x) , & \mathfrak{F}_{\alpha_1}(x) , & \mathfrak{F}_{\alpha_2}(x)\\ \mathfrak{F}_{\alpha'}(x) , & \mathfrak{F}_{\alpha_1'}(x) , & \mathfrak{F}_{\alpha_2'}(x)\\ \mathfrak{F}_{\alpha''}(x) , & \mathfrak{F}_{\alpha_1''}(x) , & \mathfrak{F}_{\alpha_2''}(x)\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\mathfrak{F}_\beta\left(\frac{1}{x}\right) , & \mathfrak{F}_{\beta_1}\left(\frac{1}{x}\right) , & \mathfrak{F}_{\beta_2}\left(\frac{1}{x}\right)\\ \mathfrak{F}_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right) , & \mathfrak{F}\left(\frac{1}{x}\right) , & \mathfrak{F}_{\beta_2'}\left(\frac{1}{x}\right)\\ \mathfrak{F}_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right) , & \mathfrak{F}_{\beta_1''}\left(\frac{1}{x}\right) , & \mathfrak{F}_{\beta_2''}\left(\frac{1}{x}\right)\end{vmatrix}$$

nur durch einen constanten Factor von einander verschieden sein können. Bezeichnen wir also diese Determinanten zur Abkürzung mit

$$\Delta_{\alpha,\,\alpha_1,\,\alpha_2}(x) \qquad \text{und} \qquad \Delta_{\beta,\,\beta_1,\,\beta_2}\left(\frac{1}{x}\right),$$

so findet die Relation statt:

$$\Delta_{\alpha,\,\alpha_1,\,\alpha_2}(x) = \text{Const.}\ \Delta_{\beta,\,\beta_1,\,\beta_2}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke mit

$$x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''}\,.\,(1-x)^{-\gamma} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta-\beta'-\beta''}.\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\gamma}$$

worin $\gamma = 2 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \beta - \beta' - \beta''$ ist, so ist das Product eine Function von x, die weder um den Punkt $x = 0$ herum, noch um den Punkt $x = \infty$ herum sich verzweigt. Deshalb kann das Product auch um den Punkt $x = 1$ herum sich nicht verzweigen, weil eine Function der complexen Variabeln x sich um einen einzelnen Punkt herum allein niemals verzweigen kann. Das Product ist demnach für alle Werthe von x einändrig, weil die hypergeometrischen Reihen dritter (wie jeder) Ordnung, selbst sich nur um $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ herum verzweigen können.

Die Differentialgleichung (3) lässt sich nun durch drei, noch um eine Einheit steigenden Potenzen von $1 - x$ geordnete Reihen

$$(0)\ ,\ (1)\ ,\ (\gamma)$$

integriren, von denen die erste mit der 0^{ten}, die zweite mit der ersten, die dritte mit der Potenz $\gamma = 2 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \beta - \beta' - \beta''$ beginnt. Ebenso lässt sich die Differentialgleichung, deren Integrale $\mathfrak{F}_{\alpha_1}(x)$, $\mathfrak{F}_{\alpha_1'}(x)$ $\mathfrak{F}_{\alpha_1''}(x)$, und durch drei Reihen

$$(0_1)\ ,\ (1_1)\ ,\ (\gamma_1)$$

und die Differentialgleichung, deren Integrale $\mathfrak{F}_{\alpha_2}(x)$, $\mathfrak{F}_{\alpha_2'}(x)$, $\mathfrak{F}_{\alpha_2''}(x)$ sind, durch drei Reihen

$$(0_2)\ ,\ (1_2)\ ,\ (\gamma_2)$$

integriren, die alle nach Potenzen von $1-x$ fortschreiten, von denen (0_1), (0_2) mit der 0^{ten}, (1_1), (1_2) mit der ersten, (γ_1) mit der Potenz $\gamma_1 = 2 - \alpha_1 - \alpha_1' - \alpha_1'' - \beta_1 - \beta_1' - \beta_1''$, (γ_2) mit der Potenz $\gamma_2 = 2 - \alpha_2 - \alpha_2' - \alpha_2'' - \beta_2 - \beta_2' - \beta_2''$ beginnt. Zwischen je vier Integralen einer linearen Differentialgleichung findet aber eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt, und man kann daher setzen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_{\alpha}(x) &= a_0\ (0) + a_1\ (1) + a_\gamma\ (\gamma)\\
\mathfrak{F}_{\alpha_1}(x) &= a_{10}(0_1) + a_{11}(1_1) + a_{1\gamma}(\gamma_1)\\
\mathfrak{F}_{\alpha_2}(x) &= a_{20}(0_2) + a_{21}(1_2) + a_{2\gamma}(\gamma_2)
\end{aligned}$$

Denkt man sich diese Werthe von $\mathfrak{F}_{\alpha}(x)$, $\mathfrak{F}_{\alpha_1}(x)$, $\mathfrak{F}_{\alpha_2}(x)$ und die analogen Werthe von $\mathfrak{F}_{\alpha'}(x)$, $\mathfrak{F}_{\alpha_1'}(x)$, etc. etc. in die Determinante

$$\Delta_{\alpha\,,\,\alpha_1\,,\,\alpha_2}(x)$$

wirklich eingesetzt, so muss das Product

$$(1-x)^{-\gamma}\ .\ \Delta_{\alpha,\,\alpha_1,\,\alpha_2}(x)$$

an der Stelle $x = 1$ einändrig sein. Dies ist aber nur möglich, wenn in der Determinante $\Delta_{\alpha,\,\alpha_1,\,\alpha_2}(x)$, welche eine Summe von Producten aus je drei nach Potenzen von $1-x$ aufsteigenden Reihen ist, die Coefficienten aller *der* Producte verschwinden, in denen mehr als eine der mit $(1-x)^{\gamma}$, $(1-x)^{\gamma_1}$, $(1-x)^{\gamma_2}$ beginnenden Reihen vorkommt. Entwickelt man die Determinante nach um Eins steigenden Potenzen von $1-x$, so wird daher die niedrigste Potenz aus einem der Producte $(0)\cdot(0_1)\cdot(\gamma_2)$, $(0)\cdot(\gamma_1)\cdot(0_2)$, $(\gamma)\cdot(0_1)\cdot(0_2)$ herrühren, und ihr Exponent, der mit $\bar{\gamma}$ bezeichnet werden soll, diejenige unter den Grössen γ, γ_1, γ_2 sein, welche um eine ganze positive Zahl kleiner als die andern ist. Es sei ferner $\bar{\alpha}$ diejenige unter den Grössen

$$\alpha+\alpha_1'+\alpha_2'',\alpha+\alpha_1''+\alpha_2',\alpha'+\alpha_1+\alpha_2'',\alpha'+\alpha_1''+\alpha_2,\alpha''+\alpha_1+\alpha_2',\alpha''+\alpha_1'+\alpha_2,$$

$\bar{\beta}$ diejenige unter den Grössen

$$\beta+\beta_1'+\beta_2'',\beta+\beta_1''+\beta_2',\beta'+\beta_1+\beta_2'',\beta'+\beta_1''+\beta_2,\beta''+\beta_1+\beta_2',\beta''+\beta_1'+\beta_2,$$

welche um eine ganze positive Zahl kleiner als die übrigen ist. Dann wird der Ausdruck

$$x^{-\bar{\alpha}}(1-x)^{-\bar{\gamma}}\ \Delta_{\alpha,\,\alpha_1,\,\alpha_2}(x),$$

oder (was dasselbe ist) der Ausdruck:

$$\text{Const.}\left(\frac{1}{x}\right)^{-\bar{\beta}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\bar{\gamma}}x^{-\bar{\alpha}-\bar{\beta}-\bar{\gamma}}\ \Delta_{\beta,\,\beta_1,\,\beta_2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

eine überall einändrige, und für endliche Werthe von x endliche Function, die für $x = \infty$ unendlich gross von der Ordnung $-\bar{\alpha}-\bar{\beta}-\bar{\gamma}$

wird, und verschwinden muss, wenn diese Ordnung sich als eine negative ergiebt. Demnach ist sie eine ganze Function von x vom Grade $-\overline{\alpha} - \overline{\beta} - \overline{\gamma}$, oder identisch Null, wenn dieser Grad ein negativer ist.

Ist nun

$$\mathfrak{F}_{\alpha_3}\begin{pmatrix}\alpha_3\,, & \alpha_3'\,, & \alpha_3''\,, & x\\ \beta_3\,, & \beta_3'\,, & \beta_3''\,, & \end{pmatrix}$$

eine vierte Reihe, deren Exponenten sich von den entsprechenden in $\mathfrak{F}_\alpha(x)$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, so folgt aus der Identität

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_\alpha(x)\cdot\Delta_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3}(x) - \mathfrak{F}_{\alpha_1}(x)\cdot\Delta_{\alpha,\,\alpha_2,\,\alpha_3}(x)\\ + \mathfrak{F}_{\alpha_2}(x)\cdot\Delta_{\alpha,\,\alpha_1,\,\alpha_3}(x) - \mathfrak{F}_{\alpha_3}(x)\cdot\Delta_{\alpha,\,\alpha_1,\,\alpha_2}(x) = 0,\end{aligned}$$

dass zwischen den vier Functionen

$$\mathfrak{F}_\alpha(x)\,,\ \mathfrak{F}_{\alpha_1}(x)\,,\ \mathfrak{F}_{\alpha_2}(x)\,,\ \mathfrak{F}_{\alpha_3}(x)$$

und mithin zwischen

$$F_\alpha(x)\,,\ F_{\alpha_1}(x),\ F_{\alpha_2}(x)\,,\ F_{\alpha_3}(x)$$

eine lineare homogene Gleichung besteht, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind, wenn nicht sämmtliche Coefficienten identisch verschwinden. Es besteht aber in diesem Falle schon zwischen je dreien unter den vier Functionen eine lineare homogene Gleichung mit ganzen Coefficienten. Wählt man nämlich für $F_{\alpha_3}(x)$ andere und andere Functionen, so ändern sich in obiger Identität die Coefficienten von $\mathfrak{F}_\alpha(x)$, $\mathfrak{F}_{\alpha_1}(x)$, $\mathfrak{F}_{\alpha_2}(x)$, hingegen der Coefficient von $\mathfrak{F}_{\alpha_3}(x)$ bleibt völlig ungeändert, also Null. Da man nun die Exponenten von $\mathfrak{F}_{\alpha_3}(x)$ jedenfalls so wählen kann, dass die Coefficienten von $\mathfrak{F}_\alpha(x)$, $\mathfrak{F}_{\alpha_1}(x)$, $\mathfrak{F}_{\alpha_2}(x)$ nicht verschwinden, sondern abgesehen von einem gemeinsamen Factor ganze Functionen von x werden, so findet in der That zwischen diesen dreien eine lineare homogene Relation mit in x ganzen Coefficienten statt, und zwar allemal dann, wenn

$$-\overline{\alpha} - \overline{\beta} - \overline{\gamma}$$

eine ganze negative Zahl ist. Drei solche Reihen, zwischen denen keine lineare Relation mit ganzen Coefficienten statt hat, sollen von einander unabhängige heissen. Hieraus folgt der Satz:

Sämmtliche hypergeometrische Reihen dritter Ordnung, deren entsprechende Exponenten nur um ganze Zahlen verschieden sind, lassen sich als lineare, homogene Functionen von drei unabhängigen unter ihnen ausdrücken, mit Coefficienten, die rationale Functionen in x sind.

Der Satz gilt in ähnlicher Weise für die hypergeometrischen Reihen jeder Ordnung. Ist die Ordnung die h^{te}, so lassen sich die ihr zugehörigen Reihen durch h von einander unabhängige unter ihnen linear ausdrücken mit Coefficienten, die rationale Functionen in x sind.

Zunächst interessiren diejenigen Relationen, welche zwischen *drei* contiguen hypergeometrischen Reihen dritter Ordnung stattfinden. Wir wollen hier die Herleitung einiger derselben völlig durchführen.

Deshalb setzen wir abkürzungsweise

$$\mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\; x\right) = A_\alpha \quad , \quad \mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' & , \alpha'', \\ \beta, & \beta'+1, & \beta'',\end{matrix}\; x\right) = B_\alpha$$

$$\mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta, & \beta', & \beta''+1,\end{matrix}\; x\right) = C_\alpha \, , \quad \mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta+2, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\; x\right) = D_\alpha$$

und bezeichnen die Coefficienten der in der ersten Horizontalreihe stehenden Elemente der identisch verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} A_\alpha & , & B_\alpha & , & C_\alpha & , & D_\alpha \\ A_\alpha & , & B_\alpha & , & C_\alpha & , & D_\alpha \\ A_{\alpha'} & , & B_{\alpha'} & , & C_{\alpha'} & , & D_{\alpha'} \\ A_{\alpha''} & , & B_{\alpha''} & , & C_{\alpha''} & , & D_{\alpha''} \end{vmatrix}$$

der Reihe nach mit D, D_1, D_2, D_3, so ist nach dem bewiesenen Satz $D_3 = 0$. Setzt man nun zur augenblicklichen Abkürzung:

$$\Upsilon(t) = \Pi(t+\beta-1)\, \Pi(t+\beta'-1)\, \Pi(t+\beta''-1);$$

und ferner:

$$\mu = \frac{e^{-3(\alpha+\alpha'+\alpha'')\pi i} \,.\, \Upsilon(\alpha)\, \Upsilon(\alpha')\, \Upsilon(\alpha'')}{\Pi(\alpha-\alpha')\, \Pi(\alpha-\alpha'')\, \Pi(\alpha'-\alpha)\, \Pi(\alpha'-\alpha'')\, \Pi(\alpha''-\alpha)\, \Pi(\alpha''-\alpha')},$$

so wird die Constante, welcher

$$D \,.\, x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''} \,.\, (1-x)^{-(2-\alpha-\alpha'-\alpha''-(\beta+2)-\beta'-\beta'')}$$

gleichzusetzen ist, den Werth besitzen:

$$\mu \begin{vmatrix} \alpha+\beta' , & \alpha+\beta'' , & (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) \\ \alpha'+\beta' , & \alpha'+\beta'' , & (\alpha'+\beta)(\alpha'+\beta+1) \\ \alpha''+\beta' , & \alpha''+\beta'' , & (\alpha''+\beta)(\alpha''+\beta+1) \end{vmatrix} = \mu(\beta'-\beta'') \begin{vmatrix} 1, \alpha , \alpha^2 \\ 1, \alpha' , \alpha'^2 \\ 1, \alpha'', \alpha''^2 \end{vmatrix},$$

und ferner diejenige Constante, welcher

$$D_1 \,.\, x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''} \,.\, (1-x)^{-(2-\alpha-\alpha'-\alpha''-(\beta+2)-\beta'-\beta'')}$$

gleichzusetzen ist, den Werth besitzen:

$$-\mu \begin{vmatrix} 1 , & \alpha+\beta'' , & (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) \\ 1 , & \alpha'+\beta'' , & (\alpha'+\beta)(\alpha'+\beta+1) \\ 1 , & \alpha''+\beta'' , & (\alpha''+\beta)(\alpha''+\beta+1) \end{vmatrix} = -\mu \begin{vmatrix} 1 , & \alpha , & \alpha^2 \\ 1 , & \alpha' , & \alpha'^2 \\ 1 , & \alpha'' , & \alpha''^2 \end{vmatrix}.$$

Endlich wird diejenige Constante, welcher

$$D_2 \,.\, x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''} \,.\, (1-x)^{-(2-\alpha-\alpha'-\alpha''-(\beta+2)-\beta'-\beta'')}$$

gleichzusetzen ist, dargestellt sein durch:

$$\mu \begin{vmatrix} 1 , & \alpha+\beta' , & \alpha+\beta'', \\ 1 , & \alpha'+\beta' , & \alpha'+\beta'', \\ 1 , & \alpha''+\beta' , & \alpha''+\beta'', \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} 1 , & \alpha , & \alpha^2 \\ 1 , & \alpha' , & \alpha'^2 \\ 1 , & \alpha'' , & \alpha''^2 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt die Gleichung:

$$(9^a)\qquad \mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha',\alpha'', & x\\ \beta,\beta',\beta'', & \end{pmatrix}(\beta'-\beta'') - \mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha' & ,\alpha'' & x\\ \beta,\beta'+1, & \beta'' & \end{pmatrix}$$
$$+ \mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha',\alpha'', & x\\ \beta,\beta',\beta''+1, & \end{pmatrix}=0,$$

und daraus

$$(9)\qquad F_\alpha(x)(\beta'-\beta'') - F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha' & ,\alpha'', & x\\ \beta,\beta'+1, & \beta'', & \end{pmatrix}(\alpha+\beta')$$
$$+ F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha',\alpha'', & x\\ \beta,\beta',\beta''+1, & \end{pmatrix}(\alpha+\beta'') = 0.$$

Setzen wir in (9^a) statt der aufsteigenden Reihen ihre Fortsetzungen durch absteigende, so fliessen daraus drei neue Gleichungen, von denen jedoch nur zwei wesentlich verschieden sind. Nehmen wir in diesen x statt $\frac{1}{x}$, und vertauschen bezüglich α, α', α'' und β, β', β'', so finden wir:

$$(10^a)\qquad \mathfrak{F}_\alpha(x)(\alpha'-\alpha'') - \mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha'+1,\alpha'', & x\\ \beta,\beta' \quad ,\beta'', & \end{pmatrix}$$
$$+ \mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha',\alpha''+1 & x\\ \beta,\beta',\beta'', & \end{pmatrix} = 0,$$

$$(11^a)\qquad \mathfrak{F}_\alpha(x)(\alpha-\alpha'') - \mathfrak{F}_{\alpha+1}\begin{pmatrix}\alpha+1,\alpha',\alpha'' & x\\ \beta \quad ,\beta',\beta'' & \end{pmatrix}$$
$$+ \mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha',\alpha''+1, & x\\ \beta,\beta',\beta'', & \end{pmatrix} = 0,$$

und hieraus

$$(10)\qquad F_\alpha(x)(\alpha'-\alpha'') + F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha'+1,\alpha'', & x\\ \beta,\beta' \quad ,\beta'', & \end{pmatrix}(\alpha-\alpha')$$
$$- F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha',\alpha''+1, & x\\ \beta,\beta',\beta'', & \end{pmatrix}(\alpha-\alpha'')=0,$$

$$(11)\qquad F_\alpha(x)(\alpha-\alpha'') + F_{\alpha+1}\begin{pmatrix}\alpha+1,\alpha',\alpha'', & x\\ \beta \quad ,\beta',\beta'' & \end{pmatrix}\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta')(\alpha+\beta'')}{(\alpha-\alpha'+1)(\alpha-\alpha''+1)}$$
$$- F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha',\alpha''+1, & x\\ \beta,\beta',\beta'', & \end{pmatrix}(\alpha-\alpha'')=0.$$

Eliminirt man aus (10^a) und (11^a) $\mathfrak{F}_\alpha(x)$, so folgt:

$$(12^a)\qquad \mathfrak{F}_{\alpha+1}\begin{pmatrix}\alpha+1,\alpha',\alpha'', & x\\ \beta \quad ,\beta',\beta'', & \end{pmatrix}(\alpha'-\alpha'') - \mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha'+1,\alpha'', & x\\ \beta,\beta' \quad ,\beta'', & \end{pmatrix}(\alpha-\alpha'')$$
$$+ \mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\alpha',\alpha''+1, & x\\ \beta,\beta',\beta'', & \end{pmatrix}(\alpha-\alpha')=0.$$

Bildet man aus (9^a) dadurch eine neue Relation, dass man β mit β' vertauscht, und eliminirt aus dieser und aus (9^a) $\mathfrak{F}_\alpha(x)$, so erhält man:

$$(13^a)\quad \mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta+1, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right)(\beta'-\beta'') - \mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta, & \beta'+1, & \beta'',\end{matrix}\, x\right)(\beta-\beta'')$$
$$+ \mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta, & \beta', & \beta''+1,\end{matrix}\, x\right)(\beta-\beta') = 0,$$

und hieraus folgen die Gleichungen:

$$(12)\ F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha'+1, & \alpha'', \\ \beta, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right)(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'') - F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha''+1, \\ \beta, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right)(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')$$
$$- F_{\alpha+1}\left(\begin{matrix}\alpha+1, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right)\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta')(\alpha+\beta'')(\alpha'-\alpha'')}{(\alpha-\alpha'+1)(\alpha-\alpha''+1)} = 0,$$

$$(13)\ F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta+1, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right)(\alpha+\beta)(\beta'-\beta'') - F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta, & \beta'+1, & \beta'',\end{matrix}\, x\right)(\alpha+\beta')(\beta-\beta'')$$
$$+ F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta, & \beta', & \beta''+1,\end{matrix}\, x\right)(\beta-\beta')(\alpha+\beta'') = 0.$$

Die Gleichungen (12) und (12ª) können auch so geschrieben werden:

$$(14)\ F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha'+1, & \alpha'', \\ \beta, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right)(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'') - F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha''+1, \\ \beta, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right)(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')$$
$$- x\, F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha'-1, & \alpha''-1, \\ \beta+1, & \beta'+1, & \beta''+1,\end{matrix}\, x\right)\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta')(\alpha+\beta'')(\alpha'-\alpha'')}{(\alpha-\alpha'+1)(\alpha-\alpha''+1)} = 0.$$

$$(14^a)\ \mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha'+1, & \alpha'', \\ \beta, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right)(\alpha-\alpha'') - \mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha''+1, \\ \beta, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right)(\alpha-\alpha')$$
$$+ x\, \mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha'-1, & \alpha''-1, \\ \beta+1, & \beta'+1, & \beta''+1,\end{matrix}\, x\right)(\alpha'-\alpha'') = 0.$$

Nach derselben Methode wollen wir die Relation suchen zwischen den vier Functionen

$$F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right),\ F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta+1, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right),\ F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta+2, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right),\ F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta+3, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right),$$

und setzen dabei zur Abkürzung

$$\mathfrak{F}_\alpha(x) = B_\alpha,\ \mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta+1, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right) = B'_\alpha,$$
$$\mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta+2, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right) = B''_\alpha,\ \mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta+3, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\, x\right) = B'''_\alpha,$$

und bezeichnen die Coefficienten der Elemente der ersten Horizontalreihe der verschwindenden Determinante

$$\left|\begin{matrix} B_\alpha, & B'_\alpha, & B''_\alpha, & B'''_\alpha \\ B_\alpha, & B'_\alpha, & B''_\alpha, & B'''_\alpha \\ B_{\alpha'}, & B'_{\alpha'}, & B''_{\alpha'}, & B'''_{\alpha'} \\ B_{\alpha''}, & B', & B''_{\alpha''}, & B'''_{\alpha''} \end{matrix}\right|$$

der Reihe nach mit Δ, Δ', Δ'', Δ''', so ist

$$\Delta\,.\,x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''}\,.\,(1-x)^{-(2-\alpha-\alpha'-\alpha''-(\beta+3)-\beta'-\beta'')}$$

gleich der Constanten

$$\mu \begin{vmatrix} \alpha+\beta, & (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1), & (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2) \\ \alpha'+\beta, & (\alpha'+\beta)(\alpha'+\beta+1), & (\alpha'+\beta)(\alpha'+\beta+1)(\alpha'+\beta+2) \\ \alpha''+\beta, & (\alpha''+\beta)(\alpha''+\beta+1), & (\alpha''+\beta)(\alpha''+\beta+1)(\alpha''+\beta+2) \end{vmatrix} =$$

$$\mu \begin{vmatrix} 1, & \alpha, & \alpha^2 \\ 1, & \alpha', & \alpha'^2 \\ 1, & \alpha'', & \alpha''^2 \end{vmatrix} (\alpha+\beta)(\alpha'+\beta)(\alpha''+\beta),$$

wenn μ dieselbe Bedeutung hat als auf Seite 438.

Sodann ist $\Delta' . x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''} . (1-x)^{-(2-\alpha-\alpha'-\alpha''-(\beta+3)-\beta'-\beta'')}$ eine lineare Function von x, und zwar gleich

$$-bx-\mu \begin{vmatrix} 1, & (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1), & (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2) \\ 1, & (\alpha'+\beta)(\alpha'+\beta+1), & (\alpha'+\beta)(\alpha'+\beta+1)(\alpha'+\beta+2) \\ 1, & (\alpha''+\beta)(\alpha''+\beta+1), & (\alpha''+\beta)(\alpha''+\beta+1)(\alpha''+\beta+2) \end{vmatrix}$$

$$=-bx-\mu \begin{vmatrix} 1, & \alpha, & \alpha^2 \\ 1, & \alpha', & \alpha'^2 \\ 1, & \alpha'', & \alpha''^2 \end{vmatrix} . \left\{ \begin{matrix} (\alpha+\beta)(\alpha'+\beta)+(\alpha+\beta)(\alpha''+\beta) \\ +(\alpha'+\beta)(\alpha''+\beta)+\alpha+\alpha'+\alpha''+3\beta+1 \end{matrix} \right\}$$

Ferner ist:

$$\Delta'' . x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''} . (1-x)^{-(2-\alpha-\alpha'-\alpha''-(\beta+3)-\beta'-\beta'')}$$

eine lineare Function von x, und zwar gleich

$$cx+\mu \begin{vmatrix} 1, & \alpha+\beta, & (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2) \\ 1, & \alpha'+\beta, & (\alpha'+\beta)(\alpha'+\beta+1)(\alpha'+\beta+2) \\ 1, & \alpha''+\beta, & (\alpha''+\beta)(\alpha''+\beta+1)(\alpha''+\beta+2) \end{vmatrix}$$

$$=cx+\mu \begin{vmatrix} 1, & \alpha, & \alpha^2 \\ 1, & \alpha', & \alpha'^2 \\ 1, & \alpha'', & \alpha''^2 \end{vmatrix} (\alpha+\alpha'+\alpha''+3\beta+3).$$

Endlich ist

$$\Delta''' . x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''} . (1-x)^{-(2-\alpha-\alpha'-\alpha''-(\beta+2)-\beta'-\beta'')}$$

gleich der Constanten

$$-\mu \begin{vmatrix} 1, & \alpha+\beta, & (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) \\ 1, & \alpha'+\beta, & (\alpha'+\beta)(\alpha'+\beta+1) \\ 1, & \alpha''+\beta, & (\alpha''+\beta)(\alpha''+\beta+1) \end{vmatrix} = -\mu \begin{vmatrix} 1, & \alpha, & \alpha^2 \\ 1, & \alpha', & \alpha'^2 \\ 1, & \alpha'', & \alpha''^2 \end{vmatrix}.$$

Rechnet man in die noch unbestimmten Constanten b und c einen gemeinsamen Factor ein, so ergiebt sich für die gesuchte Relation die Form:

$$F_\alpha(x)(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta)(\alpha''+\beta)$$

$$-\left\{ \begin{matrix} bx+(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta)+(\alpha+\beta)(\alpha''+\beta) \\ +(\alpha'+\beta)(\alpha''+\beta)+\alpha+\alpha'+\alpha''+3\beta+1 \end{matrix} \right\} . F_\alpha\begin{pmatrix} \alpha & , \alpha', \alpha'', & x \\ \beta+1, \beta', \beta'', & \end{pmatrix}$$

$$+(cx+\alpha+\alpha'+\alpha''+3\beta+3)\, F_\alpha\begin{pmatrix} \alpha & , \alpha', \alpha'', & x \\ \beta+2, \beta', \beta'', & \end{pmatrix} - (1-x)\, F_\alpha\begin{pmatrix} \alpha & , \alpha', \alpha'', & x \\ \beta+3, \beta', \beta'', & \end{pmatrix} = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung statt der Reihen $\mathfrak{F}_\alpha(x)$, . . die absteigenden $\mathfrak{F}_\beta\left(\frac{1}{x}\right)$, . . oder $\mathfrak{F}_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right)$, . ., so muss sie durch diese auch befriedigt werden. Im ersten Falle beginnt jede der absteigenden Reihen mit einer andern Potenz von x, und man erhält durch Vergleichung der Coefficienten der höchsten unter ihnen:

$$\frac{\Pi(\beta+\alpha-1)\,.\,\Pi(\beta+\alpha'-1)\,.\,\Pi(\beta+\alpha''-1)}{e^{(\beta+\beta'+\beta'')\pi i}\,.\,\Pi(\beta-\beta')\,.\,\Pi(\beta-\beta'')}\cdot(\alpha+\beta)\,(\alpha'+\beta)\,(\alpha''+\beta)$$
$$=\frac{b\,.\,\Pi(\beta+\alpha)\,.\,\Pi(\beta+\alpha')\,.\,\Pi(\beta+\alpha'')}{e^{(\beta+1+\beta'+\beta'')\pi i}\,.\,\Pi(\beta-\beta'+1)\,.\,\Pi(\beta-\beta''+1)},$$

und demnach

$$b=-(\beta-\beta'+1)\,.\,(\beta-\beta''+1).$$

Im zweiten Falle beginnen alle vier Reihen mit der Potenz $x^{-\beta}$, und man erhält durch Nullsetzung des Coefficienten der höchsten Potenz des Gesammtausdrucks

$$(\beta-\beta'+1)\,(\beta-\beta''+1)-c\,(\beta'-\beta-1)+(\beta'-\beta-1)\,(\beta'-\beta-2)=0,$$

also $\qquad c=\beta'-\beta-2-\beta-\beta''-1=\beta'+\beta''-2\beta-3,$

und so finden wir nun:

$$(15^a)\qquad \mathfrak{F}_\alpha(x)\,(\alpha+\beta)\,(\alpha'+\beta)\,(\alpha''+\beta)$$
$$+\left\{\begin{matrix}(\beta-\beta'+1)\,(\beta-\beta''+1)\,x-(\alpha+\beta)\,(\alpha'+\beta)-(\alpha+\beta)\,(\alpha''+\beta)\\ -(\alpha'+\beta)\,(\alpha''+\beta)-\alpha-\alpha'-\alpha''-3\beta-1\end{matrix}\right\}\cdot\mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'',\\ \beta+1, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\;x\right)$$
$$+\left\{\begin{matrix}(\beta'+\beta''-2\beta-3)\,x\\ +\alpha+\alpha''+\alpha'+3\beta+3\end{matrix}\right\}\cdot\mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'',\\ \beta+2, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\;x\right)-(1-x)\,\mathfrak{F}_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'',\\ \beta+3, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\;x\right)=0,$$

und hieraus:

$$(15)\qquad F_\alpha(x)\,(\alpha'+\beta)(\alpha''+\beta)-(1-x)\,F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'',\\ \beta+3, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\;x\right)(\alpha+\beta+1)\,(\alpha+\beta+2)$$
$$+(\alpha+\beta+1)\left\{\begin{matrix}(\beta'+\beta''-2\beta-3)\,x\\ +\alpha+\alpha'+\alpha''+3\beta+3\end{matrix}\right\}\cdot F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'',\\ \beta+2, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\;x\right)$$
$$+\left\{\begin{matrix}(\beta-\beta'+1)\,(\beta-\beta''+1)\,x-(\alpha+\beta)\,(\alpha'+\beta)-(\alpha+\beta)\,(\alpha''+\beta)\\ -(\alpha'+\beta)\,(\alpha''+\beta)-\alpha-\alpha'-\alpha''-3\beta-1\end{matrix}\right\}\cdot F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'',\\ \beta+1, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\;x\right)=0.$$

Für $\qquad x=1,\; F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'',\\ \beta+n, & \beta', & \beta'',\end{matrix}\;1\right)=A_n,$

$$\alpha+\beta=a\;,\;\alpha'+\beta=a'\;,\;\alpha''+\beta=a''\;,\;\beta-\beta'+1=c'\;,\;\beta-\beta''+1=c''$$

fliesst hieraus:

$$(16)\qquad A_n\,(n+a)\,(n+a'')$$
$$+A_{n+1}\left\{\begin{matrix}c'c''-aa'-aa''-a'a''-aa'a''-a-a'-a''-1\\ -n\,(3+2a+2a'+2a''-c'-c'')-2n^2\end{matrix}\right\}$$
$$+A_{n+2}\,(n+a+1)\,(n+a+a'+a''-c-c'+2)=0,$$

welche Gleichung für die Differenzenrechnung von Wichtigkeit ist.

In (15^a) können wir nun die aufsteigenden Reihen durch absteigende ersetzen, woraus zwei neue Gleichungen zwischen contiguen Functionen erhalten werden. Schreibt man in diesen x statt $\frac{1}{x}$, $\alpha, \alpha', \alpha''$ statt β, β', β'', so sind sie:

$$(17)\quad \mathfrak{F}_\alpha(x)(\beta+\alpha)(\beta'+\alpha)(\beta''+\alpha) - (1-x)\,\mathfrak{F}_{\alpha+3}\begin{pmatrix}\alpha+3, \alpha', \alpha'', & x\\ \beta\;, \beta', \beta'', & \end{pmatrix}$$

$$+\left\{\begin{matrix}(\alpha-\alpha'+1)(\alpha-\alpha''+1)-(\beta+\alpha)(\beta'+\alpha)-(\beta+\alpha)(\beta''+\alpha)\\ -(\beta'+\alpha)(\beta''+\alpha)-\beta-\beta'-\beta''-3\alpha-1\end{matrix}\right\}\mathfrak{F}_{\alpha+1}\begin{pmatrix}\alpha+1, \alpha', \alpha'', & x\\ \beta\;, \beta', \beta'', & \end{pmatrix}$$

$$+\left\{(\alpha'+\alpha''-2\alpha-3)\,x+\beta+\beta'+\beta''+3\alpha+3\right\}\mathfrak{F}_{\alpha+2}\begin{pmatrix}\alpha+2, \alpha', \alpha'', & x\\ \beta\;, \beta', \beta'', & \end{pmatrix}=0,$$

und wenn man die zu α' gehörenden Functionen einsetzt, und dann α mit α' vertauscht:

$$(18)\qquad \mathfrak{F}_\alpha(x)(\beta+\alpha')(\beta'+\alpha')(\beta''+\alpha')$$

$$+\left\{\begin{matrix}(\alpha'-\alpha+1)(\alpha'-\alpha''+1)\,x-(\beta+\alpha')(\beta'+\alpha')-(\beta+\alpha')(\beta''+\alpha')\\ -(\beta'+\alpha')(\beta''+\alpha'')-\beta-\beta'-\beta''-3\alpha'-1\end{matrix}\right\}\mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha'+1, \alpha'', & x\\ \beta, \beta'\;, \beta'', & \end{pmatrix}$$

$$+\left\{\begin{matrix}(\alpha+\alpha''-2\alpha'-3)\,x\\ +\beta+\beta'+\beta''+3\alpha'+3\end{matrix}\right\}\mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha'+2, \alpha'', & x\\ \beta, \beta'\;, \beta'', & \end{pmatrix}-(1-x)\,\mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha'+3, \alpha'', & x\\ \beta, \beta'\;, \beta'', & \end{pmatrix}=0,$$

welche Gleichungen man leicht in die für die Functionen $F_\alpha(x)$ .. umsetzt. Die Gleichung (17) kann auch aus der Differentialgleichung (3) mittels der Relation abgeleitet werden:

$$\frac{\partial}{\partial \lg x}\mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha', \alpha'', & x\\ \beta, \beta', \beta'', & \end{pmatrix}=\alpha\,\mathfrak{F}_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha', \alpha'', & x\\ \beta, \beta', \beta'', & \end{pmatrix}-\mathfrak{F}_{\alpha+1}\begin{pmatrix}\alpha+1, \alpha', \alpha'', & x\\ \beta\;, \beta', \beta'', & \end{pmatrix}.$$

Ein leichtes Mittel, Relationen zwischen contiguen hypergeometrischen Reihen dritter Ordnung zu erhalten, bietet der Integralausdruck für dieselben. Wir fügen ein Beispiel hier an. Wir fanden unter (4):

$$\frac{\Pi(\alpha+\beta''-1)\,.\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}{x^\alpha\,.\,\Pi(\alpha-\alpha'')}\,.\,F_\alpha(x)=\int_0^1\frac{F(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta',\ \alpha-\alpha'+1,\ xs)\,ds}{s^{1-\alpha-\beta''}\,.\,(1-s)^{\alpha''+\beta''}}.$$

Durch partielle Integration geht die rechte Seite über in

$$-\int_0^1\frac{(\alpha+\beta''-1)\,.\,F(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta',\ \alpha-\alpha'+1,\ xs)\,ds}{(\alpha''+\beta''-1)\,.\,s^{2-\alpha-\beta''}\,.\,(1-s)^{\alpha''+\beta''-1}}$$

$$+\frac{x(\alpha+\beta)(\alpha+\beta')}{(\alpha-\alpha'+1)(\alpha''+\beta''-1)}\int_0^1\frac{\mathfrak{F}(\alpha+\beta+1,\ \alpha+\beta'+1,\ \alpha-\alpha'+2,\ xs)\,ds}{s^{1-\alpha-\beta''}\,.\,(1-s)^{\alpha''+\beta''-1}}$$

$$=-\frac{\alpha+\beta''-1}{\alpha''+\beta''-1}\,\frac{\Pi(\alpha+\beta''-2)\,\Pi(-\alpha''-\beta''+1)}{x^\alpha\,.\,\Pi(\alpha-\alpha'')}\,.\,F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha', \alpha'', & x\\ \beta, \beta', \beta''-1, & \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\alpha'+1}\,\frac{\alpha+\beta'}{\alpha''+\beta''-1}\,\frac{\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha''-\beta''+1)}{x^{\alpha+1}\,.\,\Pi(\alpha-\alpha''+1)},$$

woraus folgt:

$$(19)\qquad F_a(x) - F_a\begin{pmatrix}\alpha, \alpha', \alpha'', & x\\ \beta, \beta', \beta''-1, & \end{pmatrix}$$
$$-\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\alpha'+1}\,\frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha''+1}\,x F_a\begin{pmatrix}\alpha, \alpha'-1, \alpha''-1, & x\\ \beta+1, \beta'+1, \beta'', & \end{pmatrix} = 0.$$

Obgleich bei dieser Herleitung Beschränkungen gemacht werden müssen über die Exponenten $\alpha, \alpha', \ldots$, damit die partielle Integration angewendet werden kann, so sieht man doch die Allgemeingültigkeit des Resultats aus dem Princip der Continuität leicht ein.

Diese Beispiele mögen genügen, da eine Aufstellung aller möglichen Relationen zwischen contiguen Functionen nicht nothwendig erscheint, weil die von uns angegebenen Mittel jedesmal hinreichen, die Gleichung, welche zwischen vier beliebig gegebenen contiguen Functionen besteht, wirklich aufzustellen.

Halle, im März 1869.

Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve dritten Grades besitzen.

Von A. Clebsch in Göttingen.

---

§ 1.

Zwei Darstellungen der zu behandelnden Fläche durch Parameter.

Die windschiefen Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelcurve dritten Grades werden durch die Projectionsstrahlen zweier projectivisch auf einander bezogenen Kegelschnitte gebildet (vgl. Cremona, Mem. dell' Accad. Bologna, Bd. 8). Die Coordinaten zweier entsprechenden Punkte y, z der Kegelschnitte erhält man also, ausgedrückt durch einen gemeinschaftlichen Werth eines Parameters λ, mit Hülfe von Formeln der folgenden Art:

$$y_i = a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i \quad , \quad z_i = \alpha_i + \lambda \beta_i + \lambda^2 \gamma_i$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

und wenn μ ein weiterer Parameter ist, so sind die Punkte eines Projectionsstrahles dargestellt durch:

$$(1) \quad \varrho x_i = y_i + \mu z_i = (a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i) + \mu\,(\alpha_i + \lambda \beta_i + \lambda^2 \gamma_i).$$

Diese Gleichungen stellen die Fläche vierter Ordnung dar, welche wir behandeln wollen; und zwar geben sie sogleich die Abbildung der Fläche auf der Ebene in möglichst einfacher Form, nämlich mit Hülfe von Abbildungsfunctionen (in λ, μ) von der dritten Ordnung.

Setzt man in (1) $\frac{\lambda}{\nu}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ an Stelle von λ, μ, so erhält man für die x_i die Ausdrücke

$$(2) \quad \varrho x_i = f_i = \nu\,(a_i \nu^2 + b_i \nu \lambda + c_i \lambda^2) + \mu\,(\alpha_i \nu^2 + \beta_i \nu \lambda + \gamma_i \lambda^2) = \nu \varphi_i + \mu \psi_i.$$

Man sieht, dass die Curven $f_i = 0$ sämmtlich bei $\nu = 0$, $\mu = 0$ einen festen Punkt, bei $\nu = 0$, $\lambda = 0$ einen festen Doppelpunkt haben.

Daher ist (vgl. diese Annalen Bd. I. p. 253 folgg.) die Ordnung der Fläche in der That gleich $3^2 - 4 - 1 = 4$. Weitere feste Punkte des Systems der Abbildungen ebener Schnitte finden also nicht statt. Wird $\frac{\lambda}{\nu}$ constant gesetzt, so erhält man die Erzeugenden der Fläche; wird $\frac{\mu}{\nu}$ constant gesetzt, die Kegelschnitte, welche sie bilden. Nur eine Erzeugende ist ausgezeichnet, deren Bild der Punkt $\mu = 0$, $\nu = 0$ ist, und ein Kegelschnitt, dessen Bild der Punkt $\lambda = 0$, $\nu = 0$ ist. Endlich ist der Schnittpunkt dieser beiden, ein ganz beliebiger Punkt der Fläche, ausgezeichnet, indem er sich durch die Gerade $\nu = 0$ abbildet.

Parallel mit der durch (2) dargestellten Abbildung geht eine zweite, ihr dualistisch entgegengesetzte, welche nicht die Punkte, sondern die Tangentenebenen der Fläche abbildet. Die betrachtete Fläche entsteht auch durch zwei Kegel zweiten Grades, deren Tangentenebenen projectivisch auf einander bezogen sind, und bei denen die Durchschnitte entsprechender Tangentenebenen die Erzeugenden der Fläche bilden. So wie oben die Ebenen der anwendbaren Kegelschnitte die doppelt berührenden Ebenen der Fläche sind, so sind hier als Kegelspitzen irgend zwei Punkte der Doppelcurve benutzbar. Sind

$$(3)\qquad v_i = A_i + \lambda B_i + \lambda^2 C_i \quad , \quad w_i = \mathsf{A}_i + \lambda \mathsf{B}_i + \lambda^2 \Gamma_i$$

die Gleichungen für die Tangentenebenen zweier solcher Kegel, so sind die Tangentenebenen der Fläche durch

$$\varrho u_i = v_i + \mu' w_i = (A_i + \lambda B_i + \lambda^2 C_i) + \mu' (\mathsf{A}_i + \lambda \mathsf{B}_i + \lambda^2 \Gamma_i)$$

dargestellt, oder wenn man $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\nu}$ für λ, μ' setzt:

$$(4)\quad \varrho u_i = \nu (A_i \nu^2 + B_i \lambda \nu + C_i \lambda^2) + \mu' (\mathsf{A}_i \nu^2 + \mathsf{B}_i \lambda \nu + \Gamma_i \lambda^2) = \nu \Phi_i + \mu' \Psi_i.$$

Für $\frac{\lambda}{\nu}$ = Const. erhält man die Geraden der Fläche, hier als Axen von Ebenenbüscheln aufgefasst, für $\frac{\mu'}{\nu}$ = Const. die verschiedenen Berührungskegel zweiter Ordnung, welche die Fläche zulässt. Interpretiren wir λ, μ', ν als Coordinaten eines Punktes in einer festen Ebene, so stellen sich die Tangentenkegel, welche man an die Fläche ziehen kann (oder vielmehr das System ihrer Tangentenebenen) durch Curven dritter Ordnung mit einem festen Doppelpunkt ($\lambda = 0$, $\nu = 0$) und einem festen einfachen Punkt ($\mu' = 0$, $\nu = 0$) dar. Einer der Tangentenkegel zweiter Ordnung ist ausgezeichnet, indem er sich durch den Punkt $\lambda = 0$, $\nu = 0$ abbildet, sowie eine Gerade, die durch $\mu = 0$, $\nu = 0$ abgebildet wird; eine durch sie gehende Ebene berührt den ausgezeichneten Tangentenkegel; sie ist eine übrigens beliebige, aber hier ausgezeichnete Tangentenebene der Fläche und wird durch die Gerade $\nu = 0$ abgebildet.

§ 2.

Zusammenhang der beiden Darstellungen.

Ich habe in den Gleichungen (2) und (4) für λ und ν dieselben Zeichen gewählt. In der That kann man immer annehmen, dass derselbe Werth $\frac{\lambda}{\nu}$ in den Gleichungen (2) und (4) auch immer dieselbe Erzeugende gebe, einmal als Punktreihe, einmal als Axe eines Ebenenbüschels aufgefasst. Um dies zu zeigen, ist nur nöthig nachzuweisen, dass man die Constanten $A, B, C, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$, wenn die $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ gegeben sind, oder auch umgekehrt diese, wenn jene gegeben sind, so wählen könne, dass u_x identisch verschwinde. Dies ist in der That die Art, wie man von einem der Systeme (2), (4) zum andern übergehen muss. Es sind zu dem Zwecke folgende Gleichungen, identisch für λ, zu erfüllen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi_1\Phi_1 + \varphi_2\Phi_2 + \varphi_3\Phi_3 + \varphi_4\Phi_4 = 0 \\ \varphi_1\Psi_1 + \varphi_2\Psi_2 + \varphi_3\Psi_3 + \varphi_4\Psi_4 = 0 \\ \psi_1\Phi_1 + \psi_2\Phi_2 + \psi_3\Phi_3 + \psi_4\Phi_4 = 0 \\ \psi_1\Psi_1 + \psi_2\Psi_2 + \psi_3\Psi_3 + \psi_4\Psi_4 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind in der That immer erfüllbar; sie genügen zugleich um, wenn die Functionen φ, ψ gegeben sind, die Functionen Φ, Ψ zu bestimmen, und umgekehrt. Nehmen wir z. B. die φ, ψ als gegeben an. Die Φ so wie die Ψ sind dann Lösungen der Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi_1 F_1 + \varphi_2 F_2 + \varphi_3 F_3 + \varphi_4 F_4 = 0 \\ \psi_1 F_1 + \psi_2 F_2 + \psi_3 F_3 + \psi_4 F_4 = 0, \end{cases}$$

in welchen die F unbekannte Functionen zweiter Ordnung sind. Setzt man in diesen Gleichungen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von λ gleich Null, so erhält man 10 Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der 12 Coefficienten der F; von diesen bleiben also zwei beliebig, und die F haben also die Form:

$$(7)\qquad F_i = \alpha\Phi_i + \beta\Psi_i,$$

wo α, β beliebige Grössen, Φ, Ψ aber die beiden von einander unabhängigen Lösungen der Gleichungen (6) sind. Um aber die Ausdrücke (7) zu finden, hat man nicht nöthig, die erwähnten 10 Gleichungen ersten Grades aufzulösen, man kommt mit deren 5 aus. Man bemerkt nämlich leicht folgenden Satz:

Die Erzeugenden der betrachteten Fläche bestimmen einen Complex erster Ordnung, auf welchem sie liegen.

In der That sind die Plücker'schen Coordinaten der Erzeugenden keine andern (vgl. diese Annalen Bd. II. pag. 1) als die Grössen

$$(8) \qquad \varrho q_{ik} = \varphi_i \psi_k - \psi_i \varphi_k$$

oder

$$(9) \qquad \sigma p_{ik} = \Phi_i \Psi_k - \Psi_i \Phi_k,$$

von denen die ersten die Coordinaten der Verbindungslinie entsprechender Punkte zweier Kegelschnitte, die letztern die des Durchschnitts entsprechender Tangentenebenen zweier Kegel zweiter Ordnung darstellen. Sollen nun alle Erzeugenden einem linearen Complex

$$(10) \qquad \Sigma c_{ik} \; q_{ik} = 0$$

angehören, so muss diese Gleichung, wenn man die q durch ihre Werthe aus (8) ersetzt, für alle Werthe von λ erfüllt sein. Da nun die q von der vierten Ordnung in λ sind, so giebt diese Bedingung 5 lineare Gleichungen für die c, welche im Allgemeinen zur Bestimmung derselben hinreichen. Sind aber die c bestimmt, so hat man

$$F_i = \Sigma_k c_{ik} \, (\alpha \varphi_k + \beta \psi_k),$$

denn indem man diese Werthe in (6) einführt, und bemerkt, dass $c_{ik} = - c_{ki}$ ist, erhält man:

$$\Sigma \varphi_i F_i = \alpha \, \Sigma \Sigma c_{ik} \, \varphi_i \varphi_k + \beta \, \Sigma \Sigma c_{ik} \, \varphi_i \psi_k = \frac{\beta}{2} \, \Sigma \Sigma c_{ik} \, (\varphi_i \psi_k - \psi_i \varphi_k) = 0$$

$$\Sigma \psi_i F_i = \alpha \, \Sigma \Sigma c_{ik} \, \psi_i \varphi_k + \beta \, \Sigma \Sigma c_{ik} \, \psi_i \psi_k = - \frac{\alpha}{2} \, \Sigma \Sigma c_{ik} (\varphi_i \psi_k - \psi_i \varphi_k) = 0.$$

Man kann also setzen:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \Phi_i &= c_{i1} \varphi_1 + c_{i2} \varphi_2 + c_{i3} \varphi_3 + c_{i4} \varphi_4 \\ \Psi_i &= c_{i1} \psi_1 + c_{i2} \psi_2 + c_{i3} \psi_3 + c_{i4} \psi_4, \end{aligned}$$

sowie umgekehrt:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \varphi_i &= \gamma_{i1} \Phi_1 + \gamma_{i2} \Phi_2 + \gamma_{i3} \Phi_3 + \gamma_{i4} \Phi_4 \\ \psi_i &= \gamma_{i1} \Psi_1 + \gamma_{i2} \Psi_2 + \gamma_{i3} \Psi_3 + \gamma_{i4} \Psi_4. \end{aligned}$$

Die γ sind dabei bis auf einen gemeinsamen Factor dieselben Coefficienten wie die c, nur in anderer Ordnung, indem nämlich:

$$(13) \qquad \begin{aligned} r\gamma_{12} &= c_{34}\,, \; r\gamma_{13} = c_{42}\,, \; r\gamma_{14} = c_{23} \\ r\gamma_{34} &= c_{12}\,, \; r\gamma_{42} = c_{13}\,, \; r\gamma_{23} = c_{14} \end{aligned}$$

$$r = - (c_{12} c_{34} + c_{13} c_{42} + c_{14} c_{23}) = - \frac{1}{\gamma_{12} \gamma_{34} + \gamma_{13} \gamma_{42} + \gamma_{14} \gamma_{23}}.$$

§ 3.

Die Fläche und ein linearer Complex.

Diese Betrachtungen gestatten es, folgende neue Definitionen der hier untersuchten windschiefen Fläche zu geben:

1. *Die Fläche ist der Ort derjenigen Sehnen einer gegebenen Raumcurve dritter Ordnung, welche einem gegebenen linearen Complexe angehören. Die Curve dritter Ordnung ist die Doppelcurve der Fläche.*

2. *Die Fläche ist der Ort derjenigen Durchschnitte von Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung, welche einem gegebenen linearen Complex angehören. Die abwickelbare Fläche der Schmiegungsebenen ist zugleich die der doppelt berührenden Ebenen.*

Da die eine dieser Definitionen der andern dualistisch entgegen steht, so ist nur eine derselben zu beweisen. Und zwar ist nur nachzuweisen, dass bei 1. die dem Complexe angehörigen Sehnen der Raumcurve wirklich eine Fläche vierter Ordnung bilden, welche die in Frage stehende Curve dritter Ordnung zur Doppelcurve hat. Seien daher A_1, A_2, A_3, A_4 Functionen dritten Grades eines Parameters λ, A_1', A_2', ... dieselben mit einem Parameter λ' geschrieben. Zwei Punkte einer durch diese Functionen gegebenen Raumcurve dritter Ordnung haben die Coordinaten:

$$\varrho x_i = A_i \quad , \quad \varrho' x_i' = A_i',$$

und die Coordinaten der beide verbindenden Sehne sind also:

$$q_{ik} = A_i A_k' - A_i' A_k.$$

Soll diese Sehne dem Complex

$$\Sigma\Sigma c_{ik}\, q_{ik} = 0$$

angehören, so erhält man die Gleichung

$$(14) \qquad \Sigma\Sigma c_{ik} (A_i A_k' - A_i' A_k) = 0.$$

Diese Gleichung ist durch $\lambda' - \lambda$ theilbar, und es bleibt sodann eine Gleichung übrig, welche für λ, λ' symmetrisch und für jede dieser Grössen quadratisch ist. Jedem λ entsprechen also zwei Werthe von λ'; durch jeden Punkt der Curve dritter Ordnung gehen zwei Erzeugende der Fläche, oder diese Curve ist Doppelcurve derselben.

Schneiden wir nun die entstandene Fläche, deren Coordinaten die Form haben:

$$\varrho x_i = A_i + \mu A_i',$$

durch eine Gerade, und untersuchen, ob auf dieser wirklich vier Punkte der Fläche liegen. Die Gleichungen zweier Ebenen, die sich in dieser Geraden schneiden, seien

$$\Sigma u_i x_i = 0 \quad , \quad \Sigma v_i x_i = 0.$$

Dann ist also für die Schnittpunkte mit der Fläche:

$$\Sigma u_i A_i + \mu \Sigma u_i A_i' = 0$$
$$\Sigma v_i A_i + \mu \Sigma v_i A_i' = 0,$$

oder, nach Elimination von μ:

$$(15) \qquad \Sigma u_i A_i \, \Sigma v_i A_i' - \Sigma v_i A_i \, \Sigma u_i A_i' = 0.$$

Auch diese Gleichung ist durch $\lambda' - \lambda$ theilbar, und die übrigbleibende Gleichung ist symmetrisch für λ, λ', und für jede dieser Grössen quadratisch.

Man hat also aus (14), (15), indem man jedesmal durch $\lambda' - \lambda$ dividirt, zwei Gleichungen zweiten Grades für die beiden Grössen

$$p = \lambda + \lambda' \quad , \quad q = \lambda\lambda',$$

Gleichungen, welche die Form haben:

$$a + bp + cq + dp^2 + epq + fq^2 = 0$$
$$\alpha + \beta p + \gamma q + \delta p^2 + \varepsilon pq + \zeta q^2 = 0.$$

Diese Gleichungen geben vier Werthssysteme p, q, also vier Werthepaare λ, λ'. Die Gerade u, v wird also von vier Erzeugenden der Fläche getroffen, was zu beweisen war.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass auf diese Weise die in Rede stehende Fläche völlig und eindeutig gegeben ist, wenn man einem gegebenen linearen Complexe die Doppelcurve oder die abwickelbare Fläche der doppelt berührenden Ebene hinzufügt. Dabei stehen die Punkte der Doppelcurve und die doppelt berührenden Ebenen in eindeutiger Beziehung zu einander, welche durch den Complex vermittelt wird. Denn da durch jeden Punkt der Doppelcurve zwei Erzeugende der windschiefen Fläche, also zwei Complexlinien gehen, so ist ihre Ebene diejenige, welche dem betreffenden Punkte der Doppelcurve in Bezug auf den Complex zugeordnet ist.

Besonderheiten der Doppelcurve oder der abwickelbaren Fläche der doppeltberührenden Ebenen sind natürlich hier immer ausgeschlossen.

§ 4.

Gegenseitiges Entsprechen der Punkte und ihrer Tangentenebenen in den beiden Darstellungen.

Gehen wir nunmehr von den beiden conjugirten Abbildungen der Fläche aus:

$$(16) \qquad \begin{cases} \varrho x_i = \nu\varphi_i + \mu\,\psi_i \\ \varrho u_i = \nu\Phi_i + \mu'\Psi_i, \end{cases}$$

indem wir voraussetzen, dass zwischen den φ, ψ, Φ, Ψ die oben entwickelten Relationen bestehen.

Untersuchen wir jetzt, welcher Zusammenhang, bei gegebenem $\frac{\lambda}{\nu}$, zwischen den beiden Grössen $\frac{\mu}{\nu}$ und $\frac{\mu'}{\nu}$ bestehen muss, damit die zweite Gleichung (16) die Tangentenebene desjenigen Punktes der Fläche darstelle, dessen Coordinaten durch die erste Gleichung (16) gegeben sind.

Soll diese Beziehung stattfinden, so muss nicht blos

$$\Sigma\, u_i\, x_i = 0$$

sein, sondern auch

$$\Sigma\, u_i\, dx_i = 0 \quad , \text{ oder } \Sigma\, x_i\, du_i = 0,$$

was dasselbe ist. Man muss also die Gleichung haben:

$$0 = \Sigma (\nu \Phi_i + \mu' \Psi_i) \left(\varphi_i \, d\nu + \nu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} d\nu \right) \right.$$
$$\left. + \psi_i \, d\mu + \mu \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} d\nu \right) \right).$$

Wegen der Gleichungen (5) kann man dies sofort auf

$$(17) \qquad 0 = \Sigma (\nu \Phi_i + \mu' \Psi_i) \left(\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} \right)$$

reduciren. Zwischen den Parametern μ, μ' eines Punktes auf einer Erzeugenden und seiner Tangentenebene besteht also diese Gleichung, welche die Form hat:

$$(18) \qquad 0 = \nu^2 M + \nu \mu N + \nu \mu' P + \mu \mu' Q,$$

und in welcher M, N, P, Q homogene Functionen dritten Grades von λ und ν bedeuten. Die Reihe der Punkte ist dem Büschel der Tangentenebenen projectivisch; aber die Art der Beziehung hängt von dem Parameter λ der Erzeugenden ab.

Eine genauere Untersuchung lehrt, dass die Form der Gleichungen (17), (18) sich noch etwas vereinfacht. Man hat

$$M = \Sigma \Phi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} \qquad N = \Sigma \Phi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda}$$
$$P = \Sigma \Psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} \qquad Q = \Sigma \Psi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda}.$$

Führen wir nun für die Φ, Ψ ihren Werth als (11) ein, so haben wir

$$M = \Sigma c_{ik} \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} = \tfrac{1}{2} \Sigma c_{ik} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} \lambda + \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \nu \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} = \frac{\nu}{2} \Sigma c_{ik} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda},$$

und ebenso

$$Q = \Sigma c_{ik} \psi_k \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} = \tfrac{1}{2} \Sigma c_{ik} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial \lambda} \lambda + \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \nu \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} = \frac{\nu}{2} \Sigma c_{ik} \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda}.$$

Endlich ist noch

$$N = \Sigma c_{ik} \varphi_k \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda}$$
$$P = \Sigma c_{ik} \psi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda}.$$

Vertauscht man in P die Indices i und k, und setzt $-c_{ik}$ statt c_{ki}, so hat man

$$N - P = \Sigma c_{ik} \left(\varphi_k \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} + \psi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} \right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\Sigma c_{ik} \varphi_k \psi_i \right)$$

Aber die c_{ik} waren oben so bestimmt, dass der eingeklammerte Ausdruck identisch verschwindet. Daher ist $N = P$. Ferner

$$N + P = \Sigma c_{ik}\left(\varphi_k \frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda} - \psi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,\Sigma c_{ik}\left(\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}\lambda + \frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\nu\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda} - \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda}\lambda + \frac{\partial\psi_i}{\partial\nu}\nu\right)\frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}\right)$$
$$= \frac{\nu}{2}\,\Sigma c_{ik}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda} - \frac{\partial\psi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}\right).$$

Setzt man also:

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathsf{M} = \Sigma c_{ik}\,\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\,\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\lambda} \\ \Lambda = \Sigma c_{ik}\left(\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\,\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial\psi_i}{\partial\nu}\,\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}\right) \\ \mathsf{K} = \Sigma c_{ik}\,\dfrac{\partial\psi_k}{\partial\nu}\,\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\lambda}, \end{cases}$$

so verwandeln die Gleichungen (17), (18) sich in folgende:

$$(20)\qquad \nu^2\mathsf{M} + \nu(\mu + \mu')\,\Lambda + \mu\mu'\,\mathsf{K} = 0,$$

wo die Functionen M, Λ, K nur noch quadratisch sind. Das Entsprechen der Parameter μ, μ' ist ein gegenseitiges.

§ 5.

Gleichung der Fläche.

Es ist leicht, aus den Gleichungen (14) auch die *Gleichung* der Fläche, sei es in Punkt- oder in Ebenencoordinaten, abzuleiten. Tangentenebene der Fläche ist jede Ebene, welche durch eine Erzeugende geht. Ist λ_0 ein Werth von $\frac{\lambda}{\nu}$, welcher einer bestimmten Erzeugenden entspricht, so muss für eine Ebene, welche durch diese Erzeugende geht, die Gleichung

$$0 = \varrho\,(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4)$$
$$= \nu\,\Sigma u_i\varphi_i + \mu\,\Sigma u_i\psi_i$$

durch $\lambda = \lambda_0\nu$ erfüllt werden, d. h. die Gleichung muss $\lambda - \lambda_0\nu$ als Factor enthalten. Da dieses unabhängig von μ eintreten muss, so müssen gleichzeitig die Ausdrücke

$$\Sigma u_i\varphi_i \quad , \quad \Sigma u_i\psi_i$$

für $\lambda = \lambda_0\nu$ verschwinden. Die Bedingung für eine Tangentenebene der Fläche ist also, dass die Gleichungen

$$\Sigma u_i\varphi_i = 0 \quad , \quad \Sigma u_i\psi_i = 0,$$

für einen Werth von $\frac{\lambda}{\nu}$ zusammen bestehen; oder die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten ist das Resultat der Elimination von λ aus den Gleichungen:

$$0 = \nu^2 u_a + \nu\lambda u_b + \lambda^2 u_c$$
$$0 = \nu^2 u_\alpha + \nu\lambda u_\beta + \lambda^2 u_\gamma,$$

so dass die Gleichung der Fläche folgende wird:

$$0 = (u_a u_\beta - u_b u_\alpha)(u_b u_\gamma - u_c u_\beta) - (u_a u_\gamma - u_c u_\alpha)^2.$$

Bildet man ebenso die Bedingung dafür, dass ein Punkt der Fläche auf einer ihrer Geraden liegt, so kann man dieses so ausdrücken, dass unter den von dem Punkte aus an die Fläche gelegten Tangentenebenen sich dasjenige Büschel von Ebenen befindet, welches die durch den Punkt gehende Erzeugende $\lambda = \lambda_0 \nu$ zur Axe hat. Die Gleichung

$$0 = \nu \Sigma x_i \Phi_i + \mu \Sigma x_i \Psi_i$$

muss daher durch $\lambda = \lambda_0 \nu$ befriedigt werden; es muss $\frac{\lambda}{\nu} = \lambda_0$ eine gemeinsame Lösung der Gleichungen

$$\Sigma x_i \Phi_i = 0 \quad , \quad \Sigma x_i \Psi_i = 0,$$

oder was dasselbe ist, der Gleichungen

$$\nu^2 A_x + \nu\lambda B_x + \lambda^2 C_x = 0$$
$$\nu^2 \mathsf{A}_x + \nu\lambda \mathsf{B}_x + \lambda^2 \Gamma_x = 0$$

sein. Die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten ist daher:

$$0 = (A_x \mathsf{B}_x - B_x \mathsf{A}_x)(B_x \Gamma_x - C_x \mathsf{B}_x) - (A_x \Gamma_x - C_x \mathsf{A}_x)^2.$$

§ 6.

Die Doppelcurve und die doppelt berührenden Ebenen.

Die doppelt berührenden Ebenen sind dadurch charakterisirt, dass sie einen auf der Fläche liegenden Kegelschnitt enthalten. Die Gleichung

$$0 = \varrho \Sigma u_i x_i = \Sigma u_i (\nu \varphi_i + \mu \psi_i),$$

welche für den Schnitt der Ebene u mit der Fläche gilt, muss also für einen gewissen Werth $\frac{\mu}{\nu} = \mu_0$ erfüllt werden, d. h. man muss haben

$$\Sigma u_i (\varphi_i + \mu_0 \psi_i) = 0,$$

unabhängig von λ und ν. Diese Gleichung löst sich also in die drei folgenden auf, welche die abwickelbare Fläche der doppelt berührenden Ebenen bestimmen:

$$\begin{aligned} u_a + \mu_0 u_\alpha &= 0 \\ u_b + \mu_0 u_\beta &= 0 \\ u_c + \mu_0 u_\gamma &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Diese Gleichungen lassen die Coordinaten einer doppelt berührenden Ebene als Functionen dritter Ordnung des Parameters $\mu_0 = \frac{\mu}{\nu}$

ausdrücken. Man hat also eine abwickelbare Fläche dritter Classe vor sich.

Ebenso sind die Punkte der Doppelcurve dadurch charakterisirt, dass die von ihnen an die Fläche gelegten Tangentenkegel in einen Kegel zweiter Classe und zwei Ebenenbüschel sich auflösen. Für die Tangentenebenen des Kegels zweiter Classe hat $\frac{\mu'}{\nu}$ einen constanten Werth μ_0'; man hat also für diese Punkte die Bedingung, dass die für alle von ihnen an die Fläche gelegten Tangentenebenen gültige Gleichung

$$0 = \varrho\, \Sigma u_i\, x_i = \Sigma x_i\, (\nu\, \Phi_i + \mu\, \Psi_i)$$

durch $\frac{\mu'}{\nu} = \mu_0'$ befriedigt werden muss, und zwar muss die Gleichung

$$0 = \Sigma x_i\, (\Phi_i + \mu_0'\, \Psi_i)$$

unabhängig von λ bestehen, so dass sie sich in die Gleichungen

$$(22) \qquad \begin{aligned} A_x + \mu_0'\, \mathsf{A}_x &= 0 \\ B_x + \mu_0'\, \mathsf{B}_x &= 0 \\ C_x + \mu_0'\, \Gamma_x &= 0 \end{aligned}$$

auflöst. Diese Gleichungen stellen in der That eine Curve dritter Ordnung dar, indem die x als Functionen dritten Grades eines Parameters $\frac{\mu'}{\nu} = \mu_0'$ sich aus ihnen bestimmen.

Zwischen den Parametern μ_0, μ_0' findet ein eindeutiges Entsprechen in der Art statt, dass jedem Punkte der Doppelcurve die Ebene der beiden durch ihn gehenden Erzeugenden entspricht, und umgekehrt jeder doppelt berührenden Ebene der Schnittpunkt der beiden in ihr liegenden Erzeugenden.

Drückt man sich die u aus (21) durch μ_0, die x aus (22) durch μ_0' aus, und bildet die Bedingung $u_x = 0$, welche aussagt, dass eine doppelt berührende Ebene durch einen Punkt der Doppelcurve gehe, so erhält man die Determinanten des unvollständigen Systems der Coefficienten von (21) mit denen des unvollständigen Systems der Coefficienten von (22) multiplicirt, und die Summe gleich Null gesetzt; oder, nach bekannten Determinantensätzen die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} A_a + \mu_0 A_\alpha + \mu_0' \mathsf{A}_a + \mu_0\mu_0' \mathsf{A}_\alpha & A_b + \mu_0 A_\beta + \mu_0' \mathsf{A}_b + \mu_0\mu_0' \mathsf{A}_\beta & A_c + \mu_0 A_\gamma + \mu_0' \Gamma_c + \mu_0\mu_0' \Gamma_\gamma \\ B_a + \mu_0 B_\alpha + \mu_0' \mathsf{B}_a + \mu_0\mu_0' \mathsf{B}_\alpha & B_b + \mu_0 B_\beta + \mu_0' \mathsf{B}_b + \mu_0\mu_0' \mathsf{B}_\beta & B_c + \mu_0 B_\gamma + \mu_0' \Gamma_c + \mu_0\mu_0' \Gamma_\gamma \\ C_a + \mu_0 C_\alpha + \mu_0' \Gamma_a + \mu_0\mu_0' \Gamma_\alpha & C_b + \mu_0 C_\beta + \mu_0' \Gamma_b + \mu_0\mu_0' \Gamma_\beta & C_c + \mu_0 C_\gamma + \mu_0' \Gamma_c + \mu_0\mu_0' \Gamma_\gamma \end{vmatrix}.$$

Bildet man aber die Bedingung dafür, dass der Ausdruck

$$\Sigma(\varphi_i + \mu_0\, \psi_i)\, (\Phi_i + \mu_0'\, \Psi_i)$$

unabhängig von λ verschwindet (§ 2.), so findet man, dass die Glieder der obigen Determinante sich durch vier Grössen so ausdrücken lassen, dass

$$\begin{array}{lll} A_a + \cdots = 0 & A_b + \cdots = -r & A_c + \cdots = t \\ B_a + \cdots = r & B_b + \cdots = -(s+t) & B_c + \cdots = w \\ C_a + \cdots = s & C_b + \cdots = -w & C_c + \cdots = 0. \end{array}$$

Daher ist der Werth der obigen Determinante:

$$(st - rw)\,(s + t).$$

Die gesuchte Gleichung zwischen μ_0 und μ_0' zerfällt also in die für beide Grössen lineare:

$$B_b + \mu_0 B_\beta + \mu_0' B_b + \mu_0 \mu_0' B_\beta = 0, \tag{23}$$

und in die aus $st - rw = 0$ entspringende Gleichung, welche für beide quadratisch ist. Die Gleichung (23) liefert also für jede doppeltberührende Ebene den Punkt der Doppelcurve, in welchem sich die in der Ebene liegenden Erzeugenden noch treffen, und für jeden Punkt der Doppelcurve die Ebene der durch ihn gehenden Erzeugenden. Die andere Gleichung hingegen liefert die beiden Punkte, in denen die Doppelcurve von dieser doppelt berührenden Ebene μ_0 ausserdem noch getroffen wird, und in welchem die Erzeugenden der Ebene sich mit dem in der Ebene liegenden Kegelschnitte treffen; oder sie giebt die beiden doppelt berührenden Ebenen, welche durch einen Punkt μ_0' der Doppelcurve ausserdem noch gehen, und welche durch je eine der ihm angehörigen Erzeugenden gehen und die von ihm aus an die Fläche gelegten Tangentenkegel zweiter Ordnung berühren. Es ist schon oben bemerkt, dass die erste Beziehung keine andere ist, als die zwischen Punkten und den ihnen in Bezug auf den Complex zugeordneten Ebenen (§ 3.).

§ 7.

Die Abbildung der Doppelcurve.

Ich kehre zu der Abbildung der Oberfläche zurück, und zwar betrachte ich diejenige, bei welcher jedem *Punkte* der Oberfläche ein Punkt der Abbildung entspricht:

$$\varrho\, x_i = \nu \varphi_i + \mu \psi_i. \tag{24}$$

Ich werde die Abbildung der Doppelcurve aufsuchen, d. h. die Beziehung zwischen λ, μ, ν, welche eintreten muss, damit ein zweites System λ', μ', ν' existire, welches dieselben Verhältnisse der x liefere wie jenes. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur zu bemerken, dass nach dem Obigen die Punkte der Doppelcurve durch die Gleichungen (22)

$$\left\{\begin{array}{l} A_x + \mu_0' \mathsf{A}_x = 0 \\ B_x + \mu_0' \mathsf{B}_x = 0 \\ C_x + \mu_0' \Gamma_x = 0 \end{array}\right. \tag{25}$$

gegeben sind. Trägt man die Werthe (24) der x hier ein, so erhält man

$$
(26)\qquad \begin{cases} (\nu A_\varphi + \mu A_\psi) + \mu_0' (\nu \mathsf{A}_\varphi + \mu \mathsf{A}_\psi) = 0 \\ (\nu B_\varphi + \mu B_\psi) + \mu_0' (\nu \mathsf{B}_\varphi + \mu \mathsf{B}_\psi) = 0 \\ (\nu C_\varphi + \mu C_\psi) + \mu_0' (\nu \Gamma_\varphi + \mu \Gamma_\psi) = 0. \end{cases}
$$

Multiplicirt man diese Gleichung beziehungsweise mit ν^2, $\nu\lambda$, λ^2 und addirt, so erhält man

$$
(\nu \Sigma \varphi_i \Phi_i + \mu \Sigma \psi_i \Phi_i) + \mu_0' (\nu \Sigma \varphi_i \Psi_i + \mu \Sigma \psi_i \Psi_i) = 0,
$$

eine Gleichung, welche wegen der Gleichungen (5) identisch erfüllt ist; man kann daher eine der Gleichungen (26) auslassen, etwa die mittlere. Setzt man nun für die φ, ψ ihre Werthe ein, und bemerkt, dass wegen (5)

$$
\begin{aligned} A_a &= 0\,,\ A_\alpha = 0\,,\ \mathsf{A}_a = 0\,,\ \mathsf{A}_\alpha = 0 \\ C_c &= 0\,,\ C_\gamma = 0\,,\ \Gamma_c = 0\,,\ \Gamma_\gamma = 0, \end{aligned}
$$

so zeigt sich, dass man die erste Gleichung (26) durch λ, die letzte durch ν dividiren kann, und es bleibt also:

$$
27)\qquad \begin{aligned} &\{\nu(\nu A_b + \lambda A_c) + \mu(\nu A_\beta + \lambda A_\gamma)\} + \mu_0' \{\nu(\nu \mathsf{A}_b + \lambda \mathsf{A}_c) + \mu(\nu \mathsf{A}_\beta + \lambda \mathsf{A}_\gamma)\} = 0 \\ &\{\nu(\nu C_a + \lambda C_b) + \mu(\nu C_\alpha + \lambda C_\beta)\} + \mu_0' \{\nu(\nu \Gamma_a + \lambda \Gamma_b) + \mu(\nu \Gamma_\alpha + \lambda \Gamma_\beta)\} = 0. \end{aligned}
$$

Diese Gleichungen geben erstlich, indem man den Parameter μ_0' eliminirt, die *Gleichung der Abbildung der Doppelcurve:*

$$
(28)\qquad \begin{vmatrix} \nu(\nu A_b + \lambda A_c) + \mu(\nu A_\beta + \lambda A_\gamma) & \nu(\nu \mathsf{A}_b + \lambda \mathsf{A}_c) + \mu(\nu \mathsf{A}_\beta + \lambda \mathsf{A}_\gamma) \\ \nu(\nu C_a + \lambda C_b) + \mu(\nu C_\alpha + \lambda C_\beta) & \nu(\nu \Gamma_a + \lambda \Gamma_b) + \mu(\nu \Gamma_\alpha + \lambda \Gamma_\beta) \end{vmatrix} = 0.
$$

Dies ist die Gleichung einer *Curve vierter Ordnung*, welche λ so wie μ nur quadratisch enthält. *Die Curve also hat in den beiden Fundamentalpunkten* ($\lambda = 0$, $\nu = 0$ und $\mu = 0$, $\nu = 0$) *Doppelpunkte.*

Zweitens aber geben die Gleichungen (27) die Erzeugung dieser Curve durch Kegelschnittbüschel. Denn betrachten wir in jenen Gleichungen μ_0' als Parameter, so stellen dieselben zwei projectivisch auf einander bezogene Kegelschnittbüschel dar,

$$
(29)\qquad \begin{cases} K + \mu_0' K' = 0 \\ L + \mu_0' L' = 0. \end{cases}
$$

Dieselben haben zwei feste Punkte, die Fundamentalpunkte der Abbildung, zu gemeinschaftlichen Grundpunkten, und zwei Kegelschnitte der Büschel schneiden sich daher ausserdem noch in einem beweglichen Punktepaare, welches dann einen Punkt μ_0' der Doppelcurve abbildet. Jedes der Büschel (29) hat ausser den Fundamentalpunkten noch zwei einfache Punkte der Curve (28) zu Grundpunkten; Punkte der Curve (28), denn da deren Gleichung die Form

$$
KL' - LK' = 0
$$

annimmt, so wird dieselbe erfüllt durch $K=0$, $K'=0$, und durch $L=0$, $L'=0$.

Schreibt man, nach ν, λ, μ geordnet, die Gleichungen (27) in der Form:

$$(30)\qquad \begin{aligned} P\lambda\mu + Q\lambda\nu + R\mu\nu + S\nu^2 &= 0 \\ P'\lambda\mu + Q'\lambda\nu + R'\mu\nu + S'\nu^2 &= 0, \end{aligned}$$

wo dann die Coefficienten lineare Functionen von μ_0' sind, so erhält man durch Combination der Gleichungen:

$$\nu\,\{(PQ'-QP')\,\lambda + (PR'-RP')\,\mu + (PS'-SP')\,\nu\} = 0.$$

Der eine Factor ist die Verbindungslinie der *festen* Punkte, in welchen die Kegelschnitte (30) sich schneiden; der andere giebt also die Verbindungslinie der beweglichen, d. h. zweier Punkte der Abbildung, welche zusammen einen Punkt der Doppelcurve darstellen. Bezeichnet man also durch ξ, η, ζ Liniencoordinaten in der Bildebene, so hat man für die Coordinaten der Verbindungslinien der die Curve vierter Ordnung constituirenden Punktepaare:

$$\begin{aligned} \sigma\xi &= PQ' - QP' \\ \sigma\eta &= PR' - RP', \\ \sigma\zeta &= PS' - SP', \end{aligned}$$

wo σ ein unbestimmter Factor ist. Die Verhältnisse der ξ, η, ζ sind also quadratischen Functionen von μ_0' gleich, oder *die Verbindungslinien der Punktepaare umhüllen einen Kegelschnitt.*

Die Tangenten dieses Kegelschnitts stellen Curven dritter Ordnung dar, welche auf der Fläche liegen, und einen wirklichen Doppelpunkt besitzen, also eben sein müssen. Jede solche muss sich daher mit einer Geraden zu einem ebenen Schnitt ergänzen, und da in der Abbildung hierdurch nur zwei Gerade gegeben werden, so muss die Abbildung des Schnitts durch die Linie $\nu=0$ ergänzt werden, welche nur einen Punkt, und zwar einen ganz beliebig gewählten, der Fläche darstellt. Diese ebenen Schnitte gehen also durch den beliebig gewählten Punkt (P) der Fläche und durch je eine Erzeugende, oder, was dasselbe ist, sie sind die Tangentenebenen des von P an die Fläche gelegten Tangentenkegels. Die Curven dritter Ordnung, welche in den Tangentenebenen dieses Kegels liegen, werden durch die Tangenten des oben erwähnten Kegelschnittes (K) abgebildet; um zu der Bedeutung der Punkte des Kegelschnitts K zu gelangen, bemerke man Folgendes. Je zwei benachbarte Tangentenebenen des Kegels schneiden sich in einem Strahl, welcher Seite des Kegels ist, der von P ausgehend zwei unendlich nahe Erzeugende trifft und dann noch einen Punkt der Oberfläche (Q) bestimmt. In diesem Punkte Q müssen sich zwei aufeinanderfolgende unter jenen Curven dritter Ordnung schneiden, und *der Kegelschnitt K bildet also den Ort der Punkte Q*

ab. Der Kegelschnitt K trifft die Linie $v = 0$ zweimal; dem entsprechend fällt zweimal ein Punkt Q in den Punkt P hinein. Legt man nämlich in P die Tangentenebene der Fläche, so schneidet dieselbe die Fläche noch in einer durch P gehenden Curve dritter Ordnung, und da diese einen Doppelpunkt hat, so kann man von P nur zwei Tangenten PR, PR' an dieselbe legen. Diese sind die durch P gehenden Doppeltangenten der Oberfläche; in R, R' schneiden sie zwei unendlich nahe Erzeugende, sind also Seiten des oben betrachteten Kegels, und zugleich rückt der vierte Schnittpunkt des Strahls und der Fläche nach P.

Der Kegelschnitt K repräsentirt eine Raumcurve sechster Ordnung mit einem Doppelpunkte in P; man hat also den Satz:

Wenn man von einem beliebigen Punkte P der Fläche Tangenten an dieselbe zieht, so schneidet jede derselben sie noch in einem bestimmten Punkte Q. Der Ort der Punkte Q ist eine Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlecht $p = 0$, mit einem wirklichen Doppelpunkte in P.

Diesem Satze steht dualistisch der folgende gegenüber:

Durch jede Tangente eines durch eine Erzeugende gehenden ebenen Schnitts der Fläche geht noch eine Tangentenebene, welche nicht in einem Punkte des Schnitts berührt. Diese Ebenen bilden eine abwickelbare Fläche sechster Classe vom Geschlecht $p = 0$, welche die Ausgangsebene zur Doppeltangentenebene hat.

§ 8.

Construction der Abbildung.

Man kann nun in der Bildebene von einer beliebig gegebenen Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten ausgehen, und in der Voraussetzung, dass sie die Abbildung der Doppelcurve sei, das System der Abbildungen ebener Schnitte construiren. Zu diesem Zwecke muss man nur die Punktepaare der Curve vierter Ordnung zunächst definiren, wozu die Gleichungen (28), (29) augenblicklich führen.

Bezeichnen wir der Kürze wegen die Doppelpunkte der Curve vierter Ordnung durch M, N; wählen wir ferner auf der Curve zwei vorläufig beliebige feste Punkte P, Q. Durch alle vier legt man ein System von Kegelschnitten; jeder Kegelschnitt des Systems trifft die Curve noch in einem weitern Punktepaare R, S. Diese Punktepaare R, S können bei gehöriger Wahl von P, Q als die Bilder der Punkte der Doppelcurve betrachtet werden.

Durch eines der Paare R, S und durch M, N nämlich lege man einen weitern Kegelschnitt, welcher die Curve vierter Ordnung in $P'Q'$ schneide. Man kann zeigen, dass P, Q, M, N und P', Q', M, N

die Grundpunkte zweier Büschel von Kegelschnitten sind, welche sich ausserdem nur noch im Punktepaare R, S schneiden.

Um dies einzusehen, gehen wir auf die elliptischen Integrale zurück, welche durch die Curve vierter Ordnung begründet werden. Bezeichnen wir die den Punkten entsprechenden Integrale erster Gattung durch dieselben Buchstaben, wie die Punkte, so müssen wir nur für jeden der Doppelpunkte zwei Integralwerthe, MM', NN' einführen, welche den in ihnen vereinigten Punkten entsprechen. Legen wir durch die Doppelpunkte M, N eine Curve n^{ter} Ordnung, so ist die Summe der ihrem Schnittpunkte mit der Curve vierter Ordnung entsprechenden Integrale erster Gattung gleich dem n-fachen einer gewissen Constante k, und umgekehrt ist es, um ein solches Schnittpunktsystem zu charakterisiren, hinreichend, dass die Integralsumme diesen Werth habe (vgl. Crelle's Journal Bd. 63 p. 197). Da aber die Gerade M, N nur in diesen Punkten trifft, so ist schon

$$M + M' + N + N' = k,$$

und für die übrigen Schnittpunkte wird die Integralsumme gleich $(n - 1)\,k$. Für die ausserdem durch P, Q gehenden Kegelschnitte ist also

$$P + Q + R + S = k, \tag{1}$$

und die Paare R, S sind durch diese Gleichung definirt. Aber für *ein* Paar R, S ist auch

$$P' + Q' + R + S = k, \tag{2}$$

also

$$P + Q = P' + Q',$$

und die Gleichung (2) besteht also für alle Paare R, S; alle Paare R, S liegen also mit P', Q' auf einem durch M, N gehenden Kegelschnitt.

Macht man M, N zu zwei Ecken eines Coordinatendreiecks und bezeichnet man die Coordinaten durch λ, μ, ν, wie oben, so haben die durch $MNPQ$ oder $MNP'Q'$ bestimmten Büschel die Form (29) oder (30); die Verbindungsstrahlen der Paare umhüllen also auch einen Kegelschnitt.

Sollen nun die Punktepaare R, S die Punkte der Doppelcurve der behandelten Fläche darstellen, so muss ein dreifach unendliches System von Bildern ebener Schnitte existiren, d. h. von Curven dritter Ordnung, welche durch N gehen, in M einen Doppelpunkt haben, und die Curve vierter Ordnung ausserdem in drei Punktepaaren R, S schneiden. Sind R, S; $R'\,S'$; R'', S'' diese Punktepaare, so muss man haben:

$$2\,(M + M') + N + N' + R + S + R' + S' + R'' + S'' = 3k, \tag{3}$$

oder, was nach dem Vorigen dasselbe ist:

(4) $$M + M' + 2(N + N') + 3(P + Q) = 3k.$$

Die Punkte P, Q sind also die Berührungspunkte einer Curve dritter Ordnung, welche einfach durch M geht, N dagegen zum Doppelpunkte hat, und die Curve vierter Ordnung in jenen Punkten dreipunktig berührt.

Solcher Curven giebt es neun einfach unendliche Schaaren; denn während P beliebig gewählt werden kann, gehören zu einem gewählten P noch neun Punkte Q, welche durch die Dreitheilung der elliptischen Functionen gefunden werden, und zwischen denen analoge Beziehungen bestehen, wie zwischen den Wendepunkten eine Curve dritter Ordnung. Eine Lösung dieser Aufgabe müssen wir als gefunden voraussetzen, und also ein Punktepaar P, Q gefunden; die übrigen (P', Q') derselben Lösung angehörigen findet man dann wie oben angegeben.

Statt diesen Weg einzuschlagen, hätte man auch, von der Gleichung (3) ausgehend, die Paare R, S direct definiren können; denn da

$$R + S = R' + S' = R'' + S'',$$

so kann man an Stelle von (3) auch setzen

$$2(M + M') + N + N' + 3(R + S) = 3k.$$

Die Paare R, S werden also genau so gefunden, wie die Paare P, Q, nur dass die Punkte M, N ihre Rolle vertauscht haben. Die hierbei auftretenden Curven dritter Ordnung, welche in einem Punktepaare R, S dreipunktig berühren, stellen offenbar die Schnitte der *Schmiegungsebenen der Doppelcurve* mit der abgebildeten Fläche dar.

Es bleibt nun übrig zu zeigen, dass das System der Curven dritter Ordnung, welche M zum Doppelpunkt, N zum einfachen Punkte haben, und welche ausserdem in drei Punktepaaren R, S schneidet, ein System mit drei linearen Parametern ist; wodurch dann die angegebene Configuration als Bild einer Fläche der behandelten Art erkannt wird. Diesen Beweis führt man folgendermassen.

Gehen wir von einer der Curven dritter Ordnung aus, welche in M einen Doppelpunkt, in N einen einfachen Punkt haben, und welche in einem Punktepaare R, S dreipunktig berühren. Die Gleichung dieser Curve sei $\varphi = 0$. Ich lege nun eine beliebige Curve gleicher Art, welche aber in R, S nur zweipunktig berührt, und daher nothwendig in einem andern Punktepaare trifft. Sei $\psi = 0$ die Gleichung dieser zweiten Curve. Alle Curven gleicher Art, welche in R, S berühren, gehen dann durch die neun Schnittpunkte von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, und haben also die Gleichungsform $\varphi + \lambda\,\psi = 0$.

Ich lege ferner eine analoge Curve $\chi = 0$, welche nur einfach durch R, S, aber noch durch das Paar R', S' geht, in welchem $\varphi + \lambda\psi = 0$ trifft. Alle andern Curven, welche dieselbe Eigen-

schaft haben, müssen dann durch die sämmtlichen Schnittpunkte von $\chi=0$ mit $\varphi+\lambda\,\psi=0$ gehen, und haben also die Gleichungsform $\varphi+\lambda\psi+\mu\chi=0$. Von einer beliebigen Curve dieser Art können wir fordern, dass sie, ausser durch R, S und R', S' durch ein beliebiges drittes Paar R'', S'' geht. Legen wir nun endlich eine analoge Curve $\vartheta=0$ durch R', S' und R'', S'', so geht jede andere, welche dieser Forderung genügt, durch die Schnittpunkte von

$$\vartheta=0 \text{ mit } \varphi+\lambda\,\psi+\mu\chi=0,$$

und hat also die Form

$$\varphi+\lambda\,\psi+\mu\chi+\nu\vartheta=0.$$

Die allgemeinste Curve dieser Art geht, wie man sieht, durch drei beliebige Punktepaare, und es sind also in dieser Form mit drei linearen Parametern überhaupt alle in Frage stehenden Curven enthalten. Es ist damit bewiesen, dass dieses System die ebenen Schnitte einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve dritten Grades darstellt.

§ 9.

Zusammenfallende Punktepaare. Die Paare P, Q.

Legt man durch P, Q, M, N Kegelschnitte, so schneiden dieselben die Curve vierter Ordnung immer in Paaren R, S. Unter diesen Kegelschnitten giebt es vier, welche berühren, für welche also die Punkte eines Paares einander unendlich nahe rücken; diese vier Kegelschnitte werden durch die Zweitheilung der elliptischen Functionen gefunden, indem für sie, wenn Π den gemeinschaftlichen Werth der Integrale R, S bezeichnet:

$$P+Q+2\,\Pi=k.$$

Diese vier Punkte stellen die vier Punkte der Doppelcurve dar, in welchen die Tangentenebenen zusammenfallen, so dass jeder durch einen Punkt gelegte ebene Schnitt in ihm einen Rückkehrpunkt erhält.

Bezeichnet man durch J, J' die Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale, so sind die diesen vier Punkten entsprechenden Integrale:

$$\Pi\;=\frac{k-P-Q}{2}$$
$$\Pi_1=\frac{k-P-Q}{2}+\frac{J}{2}$$
$$\Pi_2=\frac{k-P-Q}{2}+\frac{J'}{2}$$
$$\Pi_3=\frac{k-P-Q}{2}+\frac{J+J'}{2}.$$

Daher hat man mit Hinweglassung ganzer Perioden:

(1) $$\Pi + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + 2P + 2Q = 2k.$$

Die vier Punkte Π *liegen also auf einer Curve dritter Ordnung, welche durch* M, N *geht und in* P, Q *berührt;* womit der Lage eines dieser Punkte durch die übrigen gegeben ist.

Man kann aus diesem Satze einen entsprechenden für die Fläche vierter Ordnung ableiten, indem man zunächst die Paare P, Q geometrisch definirt. Die Kegelschnitte, welche durch M, N und ein gewisses Paar R, S gehen, sind Bilder der ebenen Curven dritter Ordnung, welche mit je einer Erzeugenden einen ebenen Schnitt bilden, und durch einen festen Punkt der Doppelcurve gelegt sind. Diese Curven dritter Ordnung treffen die Doppelcurve immer noch in den beiden Punkten, welche mit den Schnittpunkten einer Erzeugenden auf der Doppelcurve vereinigt liegen; während die Bilder jener Curven das Bild der Doppelcurve in den Paaren P, Q treffen. *Die Paare* P, Q *sind also die Bilder der Punktepaare, welche mit den Schnittpunkten einer Erzeugenden auf der Doppelcurve vereinigt liegen.*

Hiernach sagt z. B. die Gleichung (4) des § 8., durch welche die P, Q definirt werden, den Satz aus:

Es giebt ein System von Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlecht $p = 0$ *auf der Fläche (abgebildet durch Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in* M*), welche jede Erzeugende zweimal, jeden Kegelschnitt der Schaar einmal treffen, und welche je in den Schnittpunkten einer Erzeugenden mit der Doppelcurve die letztere dreipunktig berühren, an jenen Stellen aber den weitern Verlauf in demjenigen Theile der Fläche nehmen, in welchem die betreffende Erzeugende n i c h t liegt.*

Sodann aber giebt die Gleichung (1) dieses § den Satz:

Durch jeden Punkt der Fläche (in der Abbildung $v = 0$*) kann man eine Curve sechster Ordnung vom Geschlechte* $p = 1$ *legen, welche jede Erzeugende und jeden Kegelschnitt zweimal trifft, in den Durchschnitten einer Erzeugenden mit der Doppelcurve ganz wie im vorigen Satze, aber nur zweipunktig, berührt, und durch die vier ausgezeichneten Punkte der Doppelcurve hindurchgeht.*

Nun bemerke man noch Folgendes. Wenn man ein Paar R, S mit M verbindet, so erhält man die Bilder der beiden durch den entsprechenden Punkt gehenden Erzeugenden. Sie schneiden die Curve vierter Ordnung noch in zwei Punkten R', R'', und durch die ihnen entsprechenden Punkte der Doppelcurve muss auch noch der Kegelschnitt der Schaar gehen, welcher mit den Erzeugenden sich zu einem ebenen Schnitte ergänzt. *Die Punkte* S', S'', *welche* R', R'' *zu Paaren ergänzen, liegen also mit* N *in einer Geraden,* dem Bilde des genannten Kegelschnitts. Man erweist dieses auch leicht durch Betrachtung der Integrale.

Wenn man nun ein Paar Π, Π mit M verbindet, so erhält man

die Bilder zweier zusammenfallenden Erzeugenden. Es entstehen so die vier besonderen Erzeugenden, deren Herr Cremona erwähnt. Jedes Paar unendlich naher Geraden ΠM schneidet die Curve vierter Ordnung noch in zwei unendlich nahen Punkten R', R'', denen dann auch zwei unendlich nahe Punkte S', S'' entsprechen. Letztere aber liegen mit N in einer Geraden, und man hat also den Satz:

Die Verbindungslinie von M mit einem zusammenfallenden Punktepaar Π schneidet die Curve vierter Ordnung noch in einem Punkte R, welcher mit dem Berührungspunkte einer von N an die Curve gezogenen Tangente ein Paar bildet.

Die Gleichung vierten Grades, welche die Punkte Π liefert, erhält man aus den Gleichungen (2) des § 1, wenn man die Bedingung aufstellt, dass die Ausdrücke der x sich nicht ändern, sobald man an den λ, μ, ν passend gewählte unendlich kleine Aenderungen anbringt. Man erhält dann sofort die Gleichung:

$$0 = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu},$$

welche in der That vom vierten Grade ist.

§ 10.

Curven, welche auf der Fläche liegen.

Es ist sehr leicht, sich eine Uebersicht der Curven zu verschaffen, welche die Fläche enthält. Da der durch ν dargestellte Punkt in keiner Weise ausgezeichnet ist, so genügt es, diejenigen Curven zu betrachten, welche nicht durch diesen Punkt gehen. Eine solche Curve mag sich in der Abbildung durch eine Curve m^{ter} Ordnung darstellen, für welche M ein $a$facher, N ein $b$facher Punkt ist. Man hat dann nothwendig

$$m = a + b.$$

Die Ordnung der zugehörigen Raumcurve aber ist:

$$n = 3m - 2a - b = a + 2b.$$

Ferner ist, wenn wir von wirklichen Doppelpunkten absehen, welche die Curve m^{ter} Ordnung, und damit auch die Curve n^{ter} Ordnung, noch annehmen kann (wirkliche Doppelpunkte, die nur vermöge der Doppelcurve sich bilden, erniedrigen das Geschlecht nicht), das Geschlecht der fraglichen Curve:

$$p = \frac{m-1 \,.\, m-2}{2} - \frac{a \,.\, a-1}{2} - \frac{b \,.\, b-1}{2} = (a-1)(b-1),$$

und endlich die Zahl der in einer solchen Curvenart auftretenden willkürlichen Constanten (Grad der einem Curvensystem anhaftenden Unendlichkeit):

$$q = ab + a + b.$$

Hiernach erhält man für die niedrigsten Curven die folgende Tafel:

$n=a+2b$	a	b	$m=a+b$	$p=(a-1)(b-1)$	$q=ab+a+b$
1	1	0	1	0	1
2	0	1	1	0	1
3	1	1	2	0	3
4	2	1	3	0	5
5	1	2	3	0	5
5	3	1	4	0	7
6	2	2	4	1	8
9	4	1	5	0	9

Ueberhaupt giebt es von einer ungeraden Ordnung $2k+1$ die folgenden k Arten:

a	b	m	p	q
1	k	$k+1$	0	$2k+1$
3	$k-1$	$k+2$	$2(k-2)$	$4k-1$
5	$k-2$	$k+3$	$4(k-3)$	$6k-7$
. . .	. . .	. . .	. . . . .	. . . .
$2k-1$	1	$2k$	0	$4k-1$,

von gerader Ordnung $2k$ aber die $k-1$ Arten:

a	b	m	p	q
2	$k-1$	$k+1$	$k-2$	$3k-1$
4	$k-2$	$k+2$	$3(k-3)$	$5k-6$
6	$k-3$	$k+3$	$5(k-4)$	$7k-15$
. . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . . .
$2k-2$	1	$2k-1$	0	$4k-3$

Bezüglich des ersten Falls macht nur die *erste* Ordnung, bezüglich des zweiten die *zweite* eine Ausnahme; weil die Curven erster Ordnung ($m=1$) die einzigen sind, welche Punkte besitzen, deren Vielfachheit der Ordnung der Curve gleich kommt; nur bei dieser sind also die Fälle $a=0$, $b=m$ und $b=0$, $a=m$ nicht auszuschliessen.

§ 11.

Berührungspunkte der doppeltberührenden Ebenen.

Die Berührungspunkte doppelt berührender Ebenen bilden sich folgendermassen ab. Jede doppelt berührende Ebene enthält ausser

zwei durch denselben Punkt gehenden Erzeugenden einen Kegelschnitt der Schaar. Werden die erstern durch die Strahlen MR, MS abgebildet, welche das Bild der Doppelcurve noch in R', R'' schneiden, so verbindet die den letztern abbildende Gerade den Punkt N mit den zu R', R'' gehörigen Punkten S', S''. Die Geraden MRR' und MSR'' scheiden $NS'S''$ noch in zwei Punkten K, L, den Bildern der Berührungspunkte der doppelt berührenden Ebene.

Auf jedem Kegelschnitte der Schaar giebt es zwei solcher Punkte; daher auch auf demjenigen, welcher durch M abgebildet wird; die Curve der Paare K, L muss also in M einen Doppelpunkt haben. Ebenso aber enthält jede Erzeugende zwei solcher Punkte, weil sie zwei doppelt berührenden Ebenen angehört. Also schneidet auch jeder von M ausgehende Strahl die Curve der Paare K, L in zwei Punkten und in L hat dieselbe einen Doppelpunkt. *Die Ortscurve der Paare K, L ist also eine Curve vierter Ordnung, welche M, N zu Doppelpunkten hat, wie die Abbildung der Doppelcurve selbst. Die Berührungscurve der doppelt berührenden Ebenen ist eine Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlechte $p = 1$. (Analog umhüllen die in den Punkten der Doppelcurve berührenden Tangentenebenen der Fläche eine abwickelbare Fläche sechster Classe vom Geschlecht $p = 1$).*

Es ist leicht, die Gleichung für die Abbildung dieser Curve direct aufzustellen. Die Abbildung des Schnitts einer doppelt berührenden Ebene mit der Fläche zerfällt in zwei von M ausgehende Strahlen und einen von N ausgehenden. Sind also u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten einer solchen Ebene, und setzen wir für den Augenblick $v = 1$, so muss, identisch für λ und μ, die Gleichung bestehen:

$$(u_a + \lambda\, u_b + \lambda^2 u_c) + \mu\, (u_\alpha + \lambda\, u_\beta + \lambda^2 u_\gamma) = K \cdot (\mu - \mu_0)\, (\lambda - \lambda_1)\, (\lambda - \lambda_2).$$

Es ist also, indem man $\mu = \mu_0$ setzt, und die Coefficienten der Potenzen von λ einzeln verschwinden lässt (vgl. § 6.):

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_a + \mu_0\, u_\alpha &= 0 \\ u_b + \mu_0\, u_\beta &= 0 \\ u_c + \mu_0\, u_\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man aber $\lambda = \lambda_1$, oder $\lambda = \lambda_2$, so erhält man (vgl. § 5.):

$$(2) \qquad \begin{aligned} u_a + \lambda_1\, u_b + \lambda_1{}^2 u_c &= 0 \qquad & u_\alpha + \lambda_1\, u_\beta + \lambda_1{}^2\, u_\gamma &= 0 \\ u_a + \lambda_2\, u_b + \lambda_2{}^2 u_c &= 0 \qquad & u_\alpha + \lambda_2\, u_\beta + \lambda_2{}^2\, u_\gamma &= 0; \end{aligned}$$

Gleichungen, von denen zwei durch (1) aus den andern beiden folgen. Die gesuchte Curve ist der Ort der Punktepaare $\mu_0 \lambda_1$ und $\mu_0 \lambda_2$; man erhält ihre Gleichung, indem man aus den Gleichungen

$$u_a + \mu u_\alpha = 0 \;\;,\;\; u_b + \mu u_\beta = 0 \;\;,\;\; u_c + \mu u_\gamma = 0$$

und aus einer der Gleichungen

$$u_a + \lambda u_b + \lambda^2 u_c = 0 \;\;,\;\; u_\alpha + \lambda u_\beta + \lambda^2 u_\gamma = 0$$

die u eliminirt. Setzt man an Stelle der letztern die Verbindung

$$(u_a + \varkappa u_\alpha) + \lambda(u_b + \varkappa u_\beta) + \lambda^2(u_c + \varkappa u_\gamma) = 0,$$

so giebt die Elimination zunächst:

$$(a+\mu\alpha\,,\ b+\mu\beta\,,\ c+\mu\gamma\,,\ (a+\varkappa\alpha) + \lambda\,(b+\varkappa\beta) + \lambda^2(c+\varkappa\gamma)) = 0,$$

oder wenn man nach λ ordnet und durch $\mu - \varkappa$ dividirt:

$$(a\,,\alpha\,,b + \mu\beta\,,c + \mu\gamma) - \lambda\,(a + \mu\alpha\,,b\,,\beta\,,c + \mu\gamma)$$
$$+ \lambda^2\,(a + \mu\alpha\,,b + \mu\beta\,,c\,,\gamma) = 0,$$

was die gesuchte Gleichung ist. Sie stellt in der That eine Curve vierter Ordnung dar, welche, wenn man mit v wieder homogen macht, bei $\lambda = 0$, $v = 0$ und bei $\mu = 0$, $v = 0$ Doppelpunkte hat.

Die Abbildung der Doppelcurve und diese zweite Curve schneiden sich ausser in den Doppelpunkten M, N noch in acht Punkten. *Die Doppelcurve und die Berührungscurve der doppelt berührenden Ebenen haben also acht Punkte gemein; aber dieselben zerfallen in zwei Gruppen von vier Punkten. Die ersten vier Punkte sind die vier Punkte* Π *der Doppelcurve, in welchen die beiden Tangentenebenen der Fläche zusammenfallen. Die andern sind die vier ausgezeichneten Punkte der Doppelcurve, welche die Eigenschaft haben, dass in jedem derselben die Curve von einer der durch ihn gehenden Erzeugenden berührt wird.*

Was die ersteren betrifft, so geht durch jede der ausgezeichneten Erzeugenden E, in welchem zwei Erzeugende einander unendlich nahe rücken, ausser der längs derselben berührenden noch eine zweite doppelt berührende Ebene; das in ihr liegende Linienpaar besteht aus jener Erzeugenden und einer zweiten, welche erstere auf der Doppelcurve, aber nicht in dem ausgezeichneten Punkte P schneidet. In dieser Ebene liegt ein Kegelschnitt, welcher, da der Schnitt einen Rückkehrpunkt in P aufweisen muss, die Gerade E in P berührt. In P ist also ein Durchschnitt der Ebene mit der Doppelcurve und ein wirklicher Berührungspunkt vereinigt.

Was das zweite System angeht, so giebt es vier Erzeugende E', welche die Doppelcurve in Punkten P' berühren; ihre Bilder sind die vier von M an die Curve vierter Ordnung gezogenen Tangenten. Durch jeden Punkt P' geht eine zweite Erzeugende E'', und in der Ebene $E'\,E''$ liegt ein Kegelschnitt, welcher durch den zweiten auf E' liegenden Punkt der Doppelcurve, also abermals durch P' geht; die Ebene $E'\,E''$ berührt also im Punkte P' den einen Mantel der Fläche, und P' gehört also auch der Berührungscurve der doppelt berührenden Ebenen an.

Göttingen, den 25. Januar 1870.

Des substitutions de la forme

$$\Theta(r) \equiv \varepsilon\left(r^{n-2} + a r^{\frac{n-3}{2}}\right)$$

pour un nombre n premier de lettres.

Par Franc. Brioschi à Milan.

1°. La congruence:

(1) $$\Theta \equiv \varepsilon\,(r^{2\mu-1} + a r^{\mu-1}) \pmod{n}$$

où $\mu = \frac{n-1}{2}$, donne pour la puissance $m^{ième}$ de Θ:

(2) $$\Theta^m \equiv \varepsilon^m\,[L_m\,r^{2\mu-m} + a\,M_m r^{\mu-m}]$$

étant:

(3) $$2\,L_m \equiv (1+a)^m + (1-a)^m\ ;\ 2aM_m \equiv (1+a)^m - (1-a))^m.$$

Si l'on fait $m=\mu$, la relation (2), à cause de $\Sigma\Theta^\mu \equiv 0$ donne:

(4) $$M_\mu \equiv 0$$

et par conséquent:

(5) $$(1+a)^\mu \equiv (1-a)^\mu \equiv L_\mu\ \ ;\ \ \Theta^\mu \equiv \varepsilon^\mu\,L_\mu\,r^\mu.$$

Cela posé, des relations (3) on déduit:

(6) $$L_{\mu+m} \equiv L_\mu\,L_m\ \ ;\ \ M_{\mu+m} \equiv L_\mu\,M_m$$

et:

(7) $$(1-a^2)^m\,L_{\mu-m} \equiv L_\mu\,L_m\ \ ;\ \ (1-a^2)^m\,M_{\mu-m} \equiv -\,L_\mu\,M_m$$

lesquelles, en observant que $L_1 = M_1 = 1$, nous donnent:

(8) $$L_{\mu-1} + M_{\mu-1} \equiv 0\quad (1-a^2)\,L_{\mu-1} \equiv L_\mu.$$

2°. L'expression:

$$\Theta(\Theta) \equiv \varepsilon\left(\Theta^{n-2} + a\,\Theta^{\frac{n-3}{2}}\right)$$

au moyen des relations (2), (6), (8) se réduit à:

$$\Theta(\Theta) \equiv L_{\mu-1}\,[(L_\mu - \varepsilon^\mu a^2)\,r + a\,(\varepsilon^\mu - L_\mu)\,r^{\mu+1}]$$

ou en supposant:

(9) $$L_\mu \equiv \varepsilon^\mu$$

on aura:

$$\Theta(\Theta) \equiv r \qquad \text{et} \qquad \Theta^\mu \equiv r^\mu.$$

Donc les substitutions de la forme (1), dans lesquelles on suppose pour les nombres a, ε des valeurs satisfaisantes les congruences (4), (9), sont douées des propriétés suivantes:

I°. En faisant sur la substitution Θ la même substitut ion on obtient la fonction primitive.

II°. Les valeurs de r et de Θ sont ensemble des résidus ou des non résidus quadratiques.

3me. En posant:

$$h_m \equiv \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \cdots (2m-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \cdots 2(m-1)}$$

on démontre très-facilement que:

$$\Theta(\alpha\Theta + \beta) \equiv$$
$$\varepsilon \sum_{m=1}^{m=\mu} (-1)^{m-1} \left[m\alpha^\mu \Theta^\mu + (-1)^\mu (m+\mu)\beta^\mu + a h_m \right] \Theta^{\mu-m} \alpha^{\mu-m} \beta^{\mu-1}$$

ou en substituant les valeurs de Θ^μ, $\Theta^{\mu-m}$ données par les relations (2), (10) on obtient:

$$(10) \quad \Theta(\alpha\Theta+\beta) \equiv \varepsilon^{\mu+1} \sum_{m=1}^{m=\mu} (-1)^{m-1} \varepsilon^m \left[P_m + Q_m r^\mu \right] r^m \alpha^{\mu-m} \beta^{m-1}$$

étant:

$$P_m \equiv m\alpha^\mu L_{\mu-m} + a\, [(-1)^\mu (m+\mu)\beta^\mu + a h_m]\, M_{\mu-m}$$
$$Q_m \equiv m\alpha^\mu a\, M_{\mu-m} + [(-1)^\mu (m+\mu)\beta^\mu + a h_m]\, L_{\mu-m}.$$

Mais si dans la fonction Θ l'on pose $r+p$ au lieu de r, p étant une indéterminée, on arrive après quelques transformations à:

$$(11) \qquad \Theta(r+p) \equiv$$
$$(-1)^\mu \varepsilon \sum_{m=0}^{m=\mu-1} (-1)^{m-1} [(\mu-m) r^\mu - (-1)^\mu (m+1) p^\mu + a h_{\mu-m}] r^m p^{\mu-m-1}$$

par conséquent la congruence:

$$(12) \qquad \Theta(\alpha\Theta+\beta) \equiv A\Theta(r+p) + C$$

sera vérifiée lorsque:

I°. $\varepsilon(P_\mu r^\mu + Q_\mu)\beta^{\mu-1} \equiv \varepsilon A(\mu r^\mu - (-1)^\mu p^\mu + a h_\mu) p^{\mu-1} - (-1)^\mu C.$

II°. $\varepsilon^{\mu+m} (P_m + Q_m r^\mu) \alpha^{\mu-m} \beta^{m-1} \equiv$

$$(-1)^\mu A\, [(\mu-m)\, r^\mu - (-1)^\mu (m+1) p^\mu + a h_{\mu-m}]\, p^{\mu-m-1}$$

pour $m = 1, 2, \ldots \mu-1$. Chacune de ces conditions se décompose en deux en comparant les coefficients de r^μ et de r^0. La première donne les deux suivantes:

$$\mu A p^{\mu-1} \equiv P_\mu \beta^{\mu-1} \;;\; \varepsilon A(a h_\mu - (-1)^\mu p^\mu) p^{\mu-1} - (-1)^\mu C \equiv \varepsilon Q_\mu \beta^{\mu-1};$$

mais évidemment:

$$P_\mu \equiv \mu\alpha^\mu \;;\; h_\mu \equiv (-1)^{\mu-1} \;;\; Q_\mu \equiv (-1)^{\mu-1}(a + \beta^\mu);$$

on aura donc:

(13) $A p^{\mu-1} \equiv \alpha^\mu \beta^{\mu-1}$; $C \equiv \varepsilon\,[\beta^\mu - \alpha^\mu p^\mu - a\,(\alpha^\mu - 1)]\,\beta^{\mu-1}$.

Analoguement de la deuxième on déduira:

$$(14) \quad \begin{aligned} &\varepsilon^{\mu+m} Q_m p^m \equiv (-1)^\mu (\mu - m)\,\alpha^m \beta^{\mu-m} \\ &\varepsilon^{\mu+m} P_m p^m \equiv -\,[a h_{m+1} + (m+1)\,p^\mu]\,\alpha^m \beta^{\mu-m} \end{aligned}$$

et pour $m = \mu - 1$, à cause de la première des (13), on obtiendra:

(15) $A \equiv (-1)^\mu\,\varepsilon Q_{\mu-1}\,\alpha\beta^{\mu-2}$; $p \equiv -3\varepsilon\,(1 - a^2)\,\alpha\beta^{n-2}$.

En substituant la valeur trouvée de p dans la première des (14) on a:

$$(-1)^\mu (\mu - m)\,\beta^\mu \equiv (-1)^m . 3^m . \varepsilon^{\mu+2m} (1 - a^2)^m Q_m;$$

mais en se rappelant les relations (7) on démontre que:

$(1 - a^2)^m Q_m \equiv \varepsilon^\mu\,[-m\alpha^\mu a M_m + ((-1)^\mu (m + \mu)\,\beta^\mu + a h_m)\,L_m]$,

par conséquent:

$$(-1)^\mu (\mu - m)\,\beta^\mu \equiv$$
$$(-1)^m . 3^m \varepsilon^{2m} \left\{ -m\alpha^\mu a M_m + [(-1)^\mu (m + \mu)\,\beta^\mu + a h_m)\,L_m \right\}.$$

Cette condition se décompose évidemment à son tour dans les deux suivantes:

$$(-1)^m 3^m \varepsilon^{2m} (2m - 1)\,L_m + (2m + 1) \equiv 0$$
$$h_m L_m - m\alpha^\mu M_m \equiv 0.$$

Pour $m = 1$ ces relations se réduisant à:

$$\varepsilon^2 \equiv 1 \quad ; \quad \alpha^\mu \equiv 1;$$

on aura $\varepsilon \equiv \pm 1$ et α résidu quadratique (mod. n); de plus:

$$(16) \quad \begin{aligned} &(-1)^m\ 3^m\ (2m - 1)\,L_m + (2m + 1) \equiv 0 \\ &(-1)^m\ 3^m\ (2m - 1)\,M_m + 2h_{m+1} \equiv 0. \end{aligned}$$

La seconde des congruences (14) nous donnera analoguement les deux:

$$(17) \quad (-1)^m\ 3^m\ (2m - 1)\,M_m - (-1)^\mu\,2h_{m+1} \equiv 0$$
$$(-1)^m 3^m [m L_m - a^2 h_m M_m] + (-1)^\mu 3^\mu \varepsilon^\mu (m + 1) \equiv 0$$

la première desquelles comparée avec la seconde des (16) donne la condition $\mu - 1 = \frac{n-3}{2}$ pair.

Les conditions à vérifier pour la subsistance de la relation (12) sont donc les deux (16) et la:

$$(18) \quad (-1)^m 3^m (m L_m - a^2 h_m M_m) - 3^\mu \varepsilon^\mu (m + 1) \equiv 0$$

pour $m = 1, 2 \ldots \mu - 1$. Or en posant dans la seconde des (16) $m = 2$ on a:

$$27\,M_2 + 2h_3 \equiv 0 \quad , \quad \text{mais } M_2 \equiv 2 \quad , \quad h_3 \equiv \frac{1.3.5}{2.4}$$

en conséquence on aura:

$$2.3.7.11 \equiv 0 \quad (\text{mod. } n)$$

c'est-à-dire la seconde des conditions ne peut être satisfaite que dans les deux cas de $n = 7$, $n = 11$.

Mais en faisant $m = 2$ dans la première des (16) et $m = 1$ en (18) on obtient:

$$a^2 \equiv 4 \ , \ \varepsilon \equiv -1 \ (\text{mod. } 7) \quad ; \quad a^2 \equiv 9 \ , \ \varepsilon \equiv 1 \ (\text{mod. } 11)$$

on aura donc, pour $n = 7$

$$A \equiv 2\alpha\beta^1 \quad ; \quad p \equiv -2\frac{\alpha}{\beta} \quad ; \quad C \equiv -2\beta^5 \ (\text{mod. } 7)$$

et pour $n = 11$

$$A \equiv -2\alpha\beta^4 \quad ; \quad p \equiv 2\frac{\alpha}{\beta} \quad ; \quad C \equiv 2\beta^9 \quad (\text{mod. } 11).$$

On arrive de cette manière au théorème suivant:

Les substitutions de la forme (1) ne peuvent satisfaire aux relations (10), (12), c'est-à-dire ne peuvent être des substitutions conjuguées, que dans les deux cas de $n = 7$, $n = 11$.

Pour $n = 7$ en posant:

$$\Theta(r) \equiv -(r^5 \pm 2r^2)$$

on a:

$$\Theta(\Theta) \equiv r, \ \Theta(\alpha\Theta + \beta) \equiv 2\alpha\beta^1\Theta\left(r - 2\frac{\alpha}{\beta}\right) - 2\beta^5 \ (\text{mod. } 7);$$

et pour $n = 11$, si

$$\Theta(r) \equiv r^9 \pm 3r^4$$

on trouve que:

$$\Theta(\Theta) \equiv r \ , \ \Theta(\alpha\Theta + \beta) \equiv -2\alpha\beta^8\,\Theta\left(r + 2\frac{\alpha}{\beta}\right) + 2\beta^9 \ (\text{mod. } 11);$$

α étant résidu quadratique dans les deux cas.

On aura donc pour $n = 7$ un système de $4 \,.\, 6 \,.\, 7$ substitutions conjuguées*), et les fonctions invariables par ce système ne pourront avoir que trente valeurs**), et pour $n = 11$ un système de 6. 10. 11 substitutions conjuguées, et une fonction de onze lettres invariables par le même système ne pourra avoir que 60480 valeurs.

---

*) Hermite. Sur les fonctions de sept lettres. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Novembre 1863.

**) Kronecker. Notiz über Gleichungen des siebenten Grades. Monatsbericht der Akademie zu Berlin. 1858.

Zweite Note bezüglich der Moduln einer Classe von algebraischen Gleichungen.

Von A. Brill in Darmstadt.

Das Nachfolgende ist ein Auszug aus einem Schreiben vom 11. Juni 1870 an Herrn Cremona, das veranlasst wurde durch die *„osservazioni intorno al numero dei moduli delle equazione etc.“*, welche er in Gemeinschaft mit Herrn Casorati der Mailänder Akademie am 13. Mai dess. J. vorgelegt hatte. Herr Cremona giebt darin die Transformation der von Herrn Clebsch und Gordan (Theorie der Abelschen Functionen) aufgestellten Normalform $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung für die Gleichung einer Curve mit gegebenem Geschlecht p auf die von Riemann*) aufgestellte Form für die Fälle $p=4,\ 5,\ 6$; von denen der erstere in meiner ersten Note gleicher Ueberschrift**) bereits früher abgehandelt ist. Die Schlussweise ist wesentlich geometrisch.

Nachstehendes enthält in Kurzem eine andere Begründung der von Herrn Cremona gegebenen Resultate. Ich habe für $p=6$ und 7 auf algebraischem Wege die Existenz solcher Transformationsausdrücke nachgewiesen, welche nur für resp.

$$\left[\frac{p+2}{2}\right]=4 \quad \text{und} \quad \left[\frac{p+3}{2}\right]=5$$

Punkte der Curve Null und unendlich werden***).

— — Wenn man die Riemann'sche Normalform als Zwischenglied der Transformation einer Curve 7. Ordnung mit neun Doppelpunkten auf die von Herrn Cremona angegebene Form, eine Curve sechster Ordnung mit vier Doppelpunkten, benutzt, so bemerkt man zunächst, dass sich die letztere auf die Riemann'sche Form mittelst einer direct umkehrbaren Transformation zweiter Ordnung, wie dieselbe früher Herr Cremona näher betrachtet hat, bringen lässt.

Und zwar kann man allgemein die Riemann'sche Normalform

für gerade p auf eine Curve p^{ter} Ord. mit zwei $\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-2\right)-1$ fachen

für ungerade p auf eine Curve $p+1^{\text{ter}}$ Ordn. mit zwei $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-1$ fachen

*) Journal Crelle-Borchardt, Bd. 54, § 13.

**) Diese Annalen, Bd. I. pag. 401.

***) Vgl. Riemann, § 5.

Punkten (und übrigens Doppelpunkten) transformiren. Denn setzt man

$$\text{für gerade } p \qquad \mu = \frac{p}{2} + 1,$$

$$\text{für ungerade } p \qquad \mu = \frac{p+3}{2},$$

und betrachtet eine Raumcurve $2\mu^{\text{ter}}$ Ordnung mit resp.

$$\begin{Bmatrix} (\mu - 1)(\mu - 3) \\ (\mu - 2)^2 \end{Bmatrix}$$

wirklichen Doppelpunkten, welche auf einem Hyperboloid liegt und jede Erzeugende desselben in μ Punkten schneidet, so kann man sich dieselbe auf verschiedene Arten entstanden denken, wie aus Folgendem erhellt. Setzt man zunächst die Existenz einer solchen voraus, und projicirt man dieselbe auf eine Ebene von einem beliebigen Punkte des Hyperboloids aus, welcher nicht auch ein Punkt der Curve ist, so entsteht eine ebene Curve $2\mu^{\text{ter}}$ Ordnung mit

$$\begin{Bmatrix} (\mu - 1)(\mu - 3) \\ (\mu - 2)^2 \end{Bmatrix}$$

Doppelpunkten und zwei μfachen Punkten. Beide Curven entsprechen alsdann einander eindeutig, man kann also auch umgekehrt die Raumcurve durch diese Projection aus der ebenen erzeugt denken. Projicirt man dagegen von einem Doppelpunkte der Raumcurve selbst aus, so entsteht eine ebene Curve $2\mu - 2^{\text{ter}}$ Ordnung mit

$$\begin{Bmatrix} (\mu - 1)(\mu - 3) - 1 \\ (\mu - 2)^2 - 1 \end{Bmatrix}$$

Doppelpunkten und zwei $\mu - 2$fachen Punkten. Beide ebene Abbildungen entsprechen einander eindeutig. Für $p = 6$ $(\mu = 4)$ kommt einerseits eine Curve achter Ordnung mit drei Doppel- und zwei vielfachen Punkten, andererseits eine Curve sechster Ordnung mit $2+2=4$ Doppelpunkten.

Um nun auch eine Curve siebenter Ordnung mit neun Doppelpunkten in jene Curve achter Ordnung überzuführen, bediene man sich folgender Transformationsformeln:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \psi \cdot \chi' : \psi' \cdot \chi : \chi \cdot \chi',$$

wo die ψ und χ, Null gesetzt, Curven vierter Ordnung bedeuten, welche sich alle in den neun Doppelpunkten der zu transformirenden Curve siebenter Ordnung schneiden, und von denen ψ und ψ' sich noch in sechs weiteren Punkten $x', x'', . \, x^{(6)}$ der Curve siebenter Ordnung, χ und χ' in sechs anderen ebensolchen $y', y'' \, . \, . \, y^{(6)}$ schneiden. Ist es möglich, zwei solcher Büschel von Curven vierter Ordnung ausfindig zu machen (welche sich also je in $18 + 6 = 24$ Punkten der Curve siebenter Ordnung schneiden), so hat die allgemeine Curve:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$$

für alle Werthe der α mit der Curve siebenter Ordnung 48 Punkte gemeinschaftlich, sie schneidet sie also in noch acht beweglichen (von den α abhängigen) Punkten, von denen vier den Transformationscurven $y_1=0$ und $y_3=0$, die vier anderen den Curven $y_2=0$ und $y_3=0$ gemeinsam sind, so dass*) die durch Transformation entstehende Curve von der achten Ordnung und mit zwei vierfachen (und übrigens drei Doppel-) Punkten begabt ist.

Es bleibt nun der Nachweis zu liefern, dass man immer mehrere solcher Büschel von Curven vierter Ordnung finden kann, welche sich ausser in den neun Doppelpunkten der Curve siebenter Ordnung noch in sechs weiteren Punkten derselben schneiden.

Nimmt man ausser den neun Doppelpunkten zu Basispunkten noch zwei beliebig gewählte Punkte der Curve siebenter Ordnung $f(x)=0$, so bleiben noch drei Bestimmungsstücke für eine Curve vierter Ordnung willkürlich. Die Curven, welche durch diese 11 Punkte gehen, haben alsdann die Gleichungsform:

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \alpha_3 \varphi_3 x + \alpha_4 \varphi_4(x) = 0$$

oder kurzweg $$\psi(x) = 0,$$

wo das eingeklammerte (x) statt (x_1, x_2, x_3) steht.

Die φ sind beliebig angenommene, durch die 11 Punkte gehende feste Curven vierter Ordnung. Sollen die Curven des Büschels durch noch vier weitere Punkte $x', x'', x''', x^{(4)}$ von $f=0$ gehen und ausserdem noch einen willkürlichen Parameter enthalten, so müssen unter den Gleichungen:

$$f(x^{(i)}) = 0 \quad ; \quad \psi(x^{(i)}) = 0$$
$$i = 1, 2, 3, 4$$

irgend zwei der Gleichungen $\psi=0$ für beliebige α eine identische Folge der beiden anderen sein, d. h. die Unterdeterminanten erster Ordnung der aus den $\varphi_k(x^{(i)})$ gebildeten viergliedrigen Determinante müssen sämmtlich verschwinden.

Um einzusehen, dass die vier $x^{(i)}$ immer in der Weise wählbar sind, dass dies geschieht, setze man neben $f(x)=0$:

$$\varphi_1(x) : \varphi_2(x) : \varphi_3(x) : \varphi_4(x) = z_1 : z_2 : z_3 : z_4 .$$

Diese z kann man dann ansehen als Coordinaten einer Raumcurve, welche der Curve $f(x)=0$ eindeutig entspricht. Ihr Grad ist gleich der Anzahl der nicht allen φ gemeinsamen Schnittpunkte eines φ mit $f(x)=0$, oder $= 7 \cdot 4 - 18 - 2 = 8$; $p=6$, also der Rang $=26$. Das Verschwinden der Unterdeterminanten für vier Werthepaare $x^{(i)}$,

---

*) S. meine Note, Bd. I. pag. 401 der Annalen.

also für die entsprechenden $z^{(i)}$ sagt dann aus, dass vier Punkte der Curve achter Ordnung auf einer Geraden liegen. Die vier solchen Punkten z entsprechenden x auf $f(x) = 0$ haben alsdann die Eigenschaft, dass von den Curven des Systems $\psi = 0$ noch eine einfach unendliche Schaar durch sie hindurch geht. Nach Herrn Cayley*) giebt es aber fünf Gerade, welche eine Raumcurve achter Ordnung, deren Rang $= 26$ ist, in vier Punkten treffen. Damit ist der Nachweis der Existenz solcher Transformationscurven geliefert, wie sie oben gefordert wurden. — —

Die gleichen Betrachtungen, nur mit veränderten Zahlen, erledigen auch den Fall $p = 7$. Man nehme auf der Normalcurve achter Ordnung mit 14 Doppelpunkten zu Basispunkten eines Curvenbüschels fünfter Ordnung ausser den 14 Doppelpunkten noch drei beliebige an, und bestimme die Lage der übrigen zwei noch verfügbaren Schnittpunkte des Büschels so, dass noch zwei weitere solche auf die Curve achter Ordnung fallen. Dies führt auf die Aufgabe, zu einer Raumcurve neunter Ordnung, deren Rang $= 30$ ist, Gerade durch vier Punkte zu construiren. Solcher giebt es nach den Formeln von Herrn Cayley 21. Zwei derselben genügen für die Aufstellung der Transformationscurven.

---

*) On skew surfaces, Philos. Trans. 1863.

Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projectivische Erzeugung.

Von Th. Reye in Zürich.

1. Während die Geometrie der ebenen Curven von Alters her die Mathematiker lebhaft beschäftigt hat, ist die Geometrie der Curven auf einer *beliebigen* algebraischen Fläche bis in die neueste Zeit hinein auffallend vernachlässigt worden, weshalb auch unsere Kenntnisse über die Raumcurven noch sehr beschränkt sind. Ausser den allgemeinen Sätzen über ihre Krümmung und denjenigen, welche sich durch centrale Projection dieser Curven mittelst der Plücker'schen Formeln ergeben, wissen wir äusserst wenig von ihnen. Nur die Raumcurven dritter und vierter Ordnung sind genauer untersucht worden; sie lassen das Gebiet der gewundenen Curven als eine wahre Fundgrube merkwürdiger geometrischer Wahrheiten erscheinen. Für die ebenen Curven und die algebraischen Flächen hat die Polarentheorie viele schöne Ergebnisse geliefert; auf die Raumcurven ist sie kaum noch angewendet worden. Auch die Jacobi'schen Sätze*) über die Durchdringungscurven und Schnittpunkte von zwei oder drei algebraischen Flächen sind bis jetzt, abgesehen von den schönen Berührungssätzen, die Herr Clebsch auf analytischem Wege daraus abgeleitet hat**), für die Geometrie noch sehr wenig ausgebeutet worden; während doch die analogen Sätze über die Schnittpunkte ebener Curven zu fundamentalen Eigenschaften dieser Curven, namentlich zu ihrer projectivischen Erzeugung geführt haben.

2. In der vorliegenden Arbeit will ich eine Anzahl neuer Sätze über die algebraischen Flächen und ihre Schnittcurven entwickeln, für welche die erwähnten Sätze Jacobi's den Ausgangspunkt bilden. Des Zusammenhanges wegen leite ich mehrere der von Jacobi durch Rechnung gewonnenen Resultate (namentlich die Sätze 6., 7. und 12. unten) im ersten § noch einmal ab, und zwar in Verbindung mit einigen anderen durch rein geometrische Betrachtungen. Dieselben werden sehr vereinfacht durch Einführung gewisser Zahlensymbole, von denen das einfachste $N(n)$ in derselben Bedeutung schon von Herrn Cre-

---

*) Jacobi im Crelle-Borchardt'schen Journal, Bd. 15. p. 299.

**) Clebsch im Crelle-Borchardt'schen Journal, Bd. 63. p. 222.

mona*) benutzt worden ist. Als bekannt setze ich in §§ 1. und 2. voraus die Anzahl der Punkte, durch welche eine Fläche n^{ter} Ordnung bestimmt ist, ferner den Satz, dass die Schnittlinie von zwei Flächen n^{ter} Ordnung mit jedem ausser ihr gelegenen Punkte durch eine dritte Fläche n^{ter} Ordnung verbunden werden kann, und dass drei Flächen von den Ordnungen n, p und q, welche nicht durch eine und dieselbe Linie gehen, allemal $n.p.q$ Punkte gemein haben, welche jedoch auch theilweise oder alle imaginär sein oder zusammenfallen können.

3. Wie in einer früheren Arbeit bezeichne ich der Kürze wegen:
mit F^n, $F_1{}^n$, $F_2{}^n$ beliebige Flächen n^{ter} Ordnung,
mit $C^{n.p}$, $C_1{}^{n.p}$ oder $C_2{}^{n.p}$ die Schnittlinie einer F^n mit einer F^p,
mit $[n, p, q]$ die $n.p.q$ Schnittpunkte von drei Flächen F^n, F^p, F^q, welche nicht durch eine und dieselbe Linie gehen.

So z. B. bedeutet $C^{n.1}$ eine ebene Curve n^{ter} Ordnung, und $[2, 2, 3]$ die zwölf Schnittpunkte von zwei F^2 mit einer F^3. *Die $C^{n.p}$ ist von der $n.p^{\text{ten}}$ Ordnung;* denn sie hat mit einer Ebene F^1 im Allgemeinen $n.p$ Punkte $[n, p, 1]$ gemein. *Eine $C^{n.p}$ hat mit einer F^q, die durch keinen Theil von $C^{n.p}$ hindurchgeht, $n.p.q$ Punkte $[n, p, q]$ gemein* (2.), von welchen jedoch in etwa vorhandenen Berührungspunkten der $C^{n.p}$ mit F^q je zwei sich vereinigen. *Wenn eine $C^{n.p}$ und eine $C^{n.q}$ auf einer und derselben F^n liegen, so haben sie ebenfalls $n.p.q$ gemeinschaftliche Punkte,* falls nicht ein Theil von $C^{n.p}$ zugleich zu $C^{n.q}$ gehört. *Wenn drei Flächen F^n, F^p, F^q mehr als $n.p.q$ gemeinschaftliche Punkte besitzen, so müssen sie durch eine und dieselbe Linie gehen* (2.).

Ich bezeichne ferner:
mit $N(n)$ die Anzahl willkürlich angenommener Punkte, durch welche ein F^n bestimmt ist,
mit $N\left(\frac{n}{p}\right)$ die Anzahl der Punkte einer F^p, durch welche eine auf F^p liegende $C^{n.p}$ bestimmt ist,
mit $N\left(\frac{n}{p,q}\right) = N\left(\frac{n}{q,p}\right)$ die Anzahl der Punkte einer $C^{p.q}$, durch welche eine Gruppe $[n, p, q]$ von Schnittpunkten der $C^{p.q}$ mit einer F^n bestimmt ist.

Dass im Allgemeinen $N\left(\frac{n}{p}\right)$ von $N\left(\frac{p}{n}\right)$ und $N\left(\frac{p}{p,q}\right)$ von $N\left(\frac{p}{n,q}\right)$ verschieden ist, wird schon durch die Bezeichnung angedeutet. Dagegen kann eine Punktengruppe $[n, p, q]$ auch durch $[p, n, q]$, $[p, q, n]$ u. s. w., und eine $C^{p.q}$ durch $C^{q.p}$ bezeichnet werden.

---

*) Cremona in den Preliminari di una Theoria geometrica delle Superficie, pag. 19 fg.

§ 1.

Bestimmung der Zahlen $N(n)$, $N\left(\frac{n}{p}\right)$ und $N\left(\frac{n}{p,q}\right) = N\left(\frac{n}{q,p}\right)$.

4. *Eine F^n ist bekanntlich bestimmt durch:*

$$N(n) = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{2 \cdot 3} - 1$$

willkürlich angenommene Punkte, durch welche sie gehen soll. So kann durch 9 Punkte eine F^2, durch 19 eine F^3, durch 34 beliebige Punkte eine F^4 gelegt werden. *Wenn von diesen $N(n)$ Punkten irgend $N(n) - N(n-p)$ auf einer F^p angenommen werden und $n > p$ ist, so zerfällt F^n in F^p und diejenige F^{n-p}, welche durch die übrigen $N(n-p)$ Punkte bestimmt ist.* Da nämlich F^p und F^{n-p} zusammen ein F^n ausmachen, so würden im entgegengesetzten Falle mehrere F^n durch die $N(n)$ Punkte gehen, was nur bei besonderer gegenseitiger Lage der Punkte möglich ist. — Beliebige $N(n) - 1$ Punkte können mit jedem anderen Punkte des Raumes im Allgemeinen durch eine einzige F^n verbunden werden; aber je zwei dieser F^n schneiden sich in einer $C^{n \cdot n}$, welche durch die $N(n) - 1$ Punkte geht und ebenfalls mit jedem nicht auf ihr liegenden Punkte durch eine F^n verbunden werden kann (2.). Alle durch die $N(n) - 1$ Punkte gelegten F^n gehen folglich durch $C^{n \cdot n}$; oder:

5. *Durch $N(n) - 1$ willkürlich angenommene Punkte ist eine $C^{n.n}$ bestimmt, welche auf allen durch jene Punkte gelegten F^n enthalten ist und mit jedem ausser ihr gelegenen Punkte durch eine einzige F^n verbunden werden kann.* Die Gesammtheit aller dieser F^n wird ein *Flächenbüschel n^{ter} Ordnung* genannt, und $C^{n \cdot n}$ heisst die *Knotenlinie, Grundcurve oder Basis* des Büschels. Von einer beliebigen F^p wird $C^{n \cdot n}$ in einer Punktengruppe $[n, n, p]$, der Flächenbüschel aber in einem *Curvenbüschel np^{ter} Ordnung* geschnitten, welcher alle durch die Punkte $[n, n, p]$ gehenden $C^{n \cdot p}$ von F^p enthält. Durch jeden von den $[n, n, p]$ verschiedenen Punkt der F^p geht nämlich eine einzige Curve des Büschels, denn gingen zwei hindurch, so würden diese beiden $C^{n \cdot p}$ mehr als $n.n.p$ Punkte gemein haben, was unmöglich ist. *Zwei $C^{n \cdot p}$, welche auf derselben F^p liegen, schneiden sich* (3.) *in einer Punktengruppe $[n, n, p]$, welche mit jedem andern Punkte der F^p durch eine einzige neue $C^{n \cdot p}$ verbunden werden kann.* Denn zwei durch die beiden $C^{n \cdot p}$ gelegte F^n schneiden sich in einer $C^{n \cdot n}$, welche mit jedem ausser ihr gelegenen Punkte von F^p durch eine einzige F^n verbunden werden kann.

6. Wenn von den $N(n) - 1$ Punkten, durch welche eine $C^{n \cdot n}$ bestimmt ist, irgend $N(n) - N(n-p) - 1$ auf einer F^p angenommen werden und $n > p$ ist, so zerfällt $C^{n \cdot n}$ in eine auf F^p lie-

gende $C^{n \cdot p}$ und eine $C^{n \cdot (n-p)}$, welche durch die übrigen $N(n-p)$ Punkte geht und auf einer durch letztere bestimmten F^{n-p} liegt. Denn diejenige F^n, welche diese $C^{n \cdot n}$ mit einem beliebigen Punkte von F^p verbindet, zerfällt (4.) in F^p und F^{n-p}, und wird von jeder anderen durch die $N(n)-1$ Punkte gehenden F^n in einer $C^{n \cdot p}$ und einer $C^{n \cdot (n-p)}$ geschnitten, die zusammen die $C^{n \cdot n}$ ausmachen. Durch die $N(n) - N(n-p) - 1$ auf F^p angenommen Punkte geht übrigens nur eine $C^{n \cdot p}$; denn gingen zwei hindurch, so könnten deren Schnittpunkte mit jedem beliebigen Punkte von F^p durch eine neue $C^{n \cdot p}$ verbunden werden (5.), sodass durch $N(n) - N(n-p)$ willkürlich gewählte Punkte der F^p eine $C^{n \cdot p}$ gelegt werden könnte. Dieses steht aber im Widerspruch mit (4.), wonach jede F^n, welche durch

$$N(n) - N(n-p)$$

willkürlich angenommene Punkte einer F^p gelegt wird, in F^p und eine F^{n-p} zerfällt, also keineswegs eine Schnittlinie $C^{n \cdot p}$ mit F^p erzeugt. Setzen wir der Formel für $N(n)$ gemäss $N(n-p) = 0$ für $n = p$, so folgt hieraus und aus (5.):

$$N\left(\frac{n}{p}\right) = N(n) - N(n-p) - 1 \qquad \text{für } n \geqq p.$$

D. h.: *Für $n \geqq p$ wird auf einer F^p durch:*

$$N\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{(n+1).(n+2).(n+3) - (n-p-1).(n-p-2).(n-p-3)}{2.3} - 1$$

willkürlich angenommene Punkte dieser Fläche eine $C^{n \cdot p}$ bestimmt, durch welche jede diese Punkte enthaltende F^n hindurchgeht. Die $C^{n \cdot p}$ kann folglich mit $N(n-p)+1$ beliebigen Punkten des Raumes durch eine F^n verbunden werden. So ist z. B. eine $C^{n \cdot 1}$ durch $\frac{n.(n+3)}{2}$ Punkte der Ebene bestimmt, eine $C^{n \cdot 2}$ durch $n.(n+2)$ Punkte einer F^2, eine $C^{n \cdot 3}$ durch $\frac{3n.(n+1)}{2}$ beliebige Punkte einer F^3.

7. Ganz anders fällt die Zahl $N\left(\frac{n}{p}\right)$ aus, wenn $n < p$ ist; denn weil in diesem Falle durch $N(n)$ beliebige Punkte der F^p eine einzige F^n gelegt werden kann, welche kein Stück von F^p enthält, so ergiebt sich:

$$N\left(\frac{n}{p}\right) = N(n) \qquad \text{für } n < p.$$

Lassen wir den in (4.) angegebenen Werth von $N(n)$ auch für negative Zahlen n gelten, so stimmen die beiden Werthe von $N\left(\frac{n}{p}\right)$ nur innerhalb der Grenzen $p > n \geqq p - 3$ überein.

Unsere in (3) gegebene Definition des Symboles $N(n)$ hat aber nur für positive Zahlen n einen Sinn; wir können deshalb für negative Werthe von $n-p$ den Werth des Symboles $N(n-p)$ willkürlich festsetzen. Damit nun die beiden für $N\left(\frac{n}{p}\right)$ gefundenen Aus-

drücke durch einen einzigen ersetzt werden können, bestimme ich: *Es werde* $N(n-p) = -1$ *angenommen für* $n < p$; für beliebige positive ganze Zahlen n und p ergiebt sich dann:

$$N\left(\frac{n}{p}\right) = N(n) - N(n-p) - 1.$$

Wir werden später Symbole von der Form $N\left(\frac{n-q}{p}\right)$ benutzen, in welchen auch q eine positive Ganzzahl bedeutet. Ich definire dieselben allgemein durch die Gleichung:

$$N\left(\frac{n-q}{p}\right) = N(n-q) - N(n-q-p) - 1 \text{ für } q \lesseqgtr n,$$

woraus sich sofort ergiebt:

$$N\left(\frac{n-q}{p}\right) = 0 \text{ für } n = q \text{ und } N\left(\frac{n-q}{p}\right) = -1 \text{ für } n < q.$$

8. *Durch eine* $C^{n \cdot p}$ *kann, wenn* $n < p$ *ist, nur eine einzige* F^n *gelegt werden;* denn zwei F^n können sich nicht in einer $C^{n \cdot p}$, sondern nur in einer $C^{n \cdot n}$ schneiden. — *Wenn für* $n > p$ *durch eine* $C^{n \cdot p}$ *zwei* F^n *gelegt werden, so schneiden sich dieselben noch in einer* $C^{n.(n-p)}$, *welche durch* $N(n-p)$ *ihrer Punkte und durch die* $C^{n \cdot p}$ *völlig bestimmt ist* (6.). Die Curven $C^{n \cdot p}$ und $C^{n.(n-p)}$ bilden zusammen eine $C^{n \cdot n}$ und schneiden sich (3.) in einer Punktengruppe $[n, p, n-p]$. Legen wir durch $C^{n \cdot p}$ noch eine dritte F^n, so schneidet diese die beiden ersteren noch in zwei $C^{n \cdot (n-p)}$, welche (3.) eine Punktengruppe $[n, n-p, n-p]$ gemein haben. Also: *Drei* F^n, *welche durch eine* $C^{n \cdot p}$ *gehen und nicht demselben Flächenbüschel angehören, schneiden sich noch in* $n.(n-p).(n-p)$ *Punkten* $[n, n-p, n-p]$, *und letztere sind bestimmt, wenn* $N(n-p) - 1$ *von ihnen nebst* $C^{n \cdot p}$ *gegeben werden. Die drei* $C^{n \cdot (n-p)}$, *in welchen die drei* F^n *sich paarweise schneiden, liegen auf drei* F^{n-p}, *und diese gehören einem durch die* $N(n-p) - 1$ *Punkte bestimmten und durch die Punkte* $[n, n-p, n-p]$ *gehenden Flächenbüschel* $n-p^{\text{ter}}$ *Ordnung an.* Von diesem Satze ist der specielle Fall sehr bekannt, in welchem drei F^2 durch einen und denselben Kegelschnitt gehen; nämlich die F^2 schneiden sich paarweise in noch drei Kegelschnitten, deren Ebenen durch eine und dieselbe Gerade gehen.

9. Sei auf einer F^p eine $C^{p \cdot q}$ gegeben und sei $q \leq n$. Nehmen wir alsdann von den $N\left(\frac{n}{p}\right)$ Punkten, durch welche auf F^p eine $C^{p.n}$ bestimmt wird, beliebige $N\left(\frac{n}{p}\right) - N\left(\frac{n-q}{p}\right)$ auf $C^{p \cdot q}$ an, so zerfällt $C^{p \cdot n}$ in $C^{p \cdot q}$ und eine durch die übrigen $N\left(\frac{n-q}{p}\right)$ bestimmte $C^{p.(n-q)}$. Also: *Jede* F^n, *welche durch:*

$$N\left(\frac{n}{p}\right) - N\left(\frac{n-q}{p}\right) = N(n) - N(n-p) - N(n-q) - N(n-q-p)$$
$$= N\left(\frac{n}{q}\right) - N\left(\frac{n-p}{q}\right)$$

willkürlich angenommene Punkte einer $C^{p \cdot q}$ hindurchgeht, muss alle Punkte dieser Curve enthalten. Wenn F^n und F^p sich in einer $C^{p \cdot q}$ schneiden, so haben sie ausserdem eine $C^{p \cdot (n-q)}$ mit einander gemein. Da im ersten Satze p und q mit einander vertauscht werden können, so gilt derselbe auch dann, wenn $q > n \geqq p$ ist. Nur dann hat er keinen Sinn, wenn $q > n$ und zugleich $p > n$ ist; denn durch $N(n)+1$ willkürlich angenommene Punkte kann keine F^n hindurchgehen, auch kann $C^{p \cdot q}$ in diesem Falle unmöglich auf einer F^n liegen und Bestandtheil einer $C^{n \cdot q}$ oder $C^{p \cdot n}$ sein.

10. *Durch $N\left(\frac{n}{p}\right) - 1$ beliebige Punkte einer F^p ist auf dieser Fläche eine Punktengruppe $[n, n, p]$, mithin auch deren übrigen*

$$n \,.\, n \,.\, p - N\left(\frac{n}{p}\right) + 1$$

Punkte bestimmt. Nämlich die $N\left(\frac{n}{p}\right) - 1$ Punkte können mit jedem willkürlich angenommenen Punkte der F^p durch eine einzige $C^{n \cdot p}$ verbunden werden (6.) und (7.); dasselbe gilt aber von den Punkten $[n, n, p]$, in welchen zwei solche $C^{n \cdot p}$ sich schneiden (5.). Jene durch die $N\left(\frac{n}{p}\right) - 1$ Punkte gehenden $C^{n \cdot p}$ müssen deshalb mit den Curven des durch die $[n, n, p]$ gehenden Curvenbüschels np^{ter} Ordnung zusammenfallen. — Die Punkte $[n, n, p]$ werden die *Grundpunkte, Knotenpunkte oder Basis* des Curvenbüschels genannt, weshalb wir auch sagen können: *Ein Curvenbüschel np^{ter} Ordnung auf einer F^p ist durch $N\left(\frac{n}{p}\right) - 1$ willkürlich angenommene Punkte seiner Basis bestimmt;* jede durch diese Punkte gelegte $C^{n \cdot p}$ von F^p geht noch durch

$$n.n.p - N\left(\frac{n}{p}\right) + 1$$

andere feste Grundpunkte. Wenn von den $N\left(\frac{n}{p}\right) - 1$ Punkten irgend $N\left(\frac{n}{p}\right) - N\left(\frac{n-q}{p}\right) - 1$ auf einer $C^{p \cdot q}$ angenommen werden und $q < n$ ist, so zerfällt eine jener $C^{n \cdot p}$ offenbar in $C^{p \cdot q}$ und diejenige $C^{p \cdot (n-q)}$, welche durch die übrigen $N\left(\frac{n-q}{p}\right)$ Punkte gelegt werden kann, und es ergiebt sich der Satz:

11. *Wenn von den Grundpunkten $[n, n, p]$ eines auf einer F^p enthaltenen Curvenbüschels np^{ter} Ordnung beliebige*

$$N\left(\frac{n}{p}\right) - N\left(\frac{n-q}{p}\right) - 1$$

auf einer $C^{p \cdot q}$ angenommen werden, so zerfallen sie für $q < n$ in zwei Punktengruppen $[n, p, q]$ und $[n, p, n-q]$, von denen die erstere auf $C^{p \cdot q}$ liegt. Wir können einen Theil dieses wichtigen Satzes zu dem folgenden Satze erweitern: *Alle F^n, welche durch*

$$N\left(\frac{n}{p}\right) - N\left(\frac{n-q}{p}\right) - 1$$

willkürlich angenommene Punkte einer gegebenen $C^{p \cdot q}$ *gelegt werden, schneiden diese Curve noch in ganz bestimmten*

$$n \cdot p \cdot q - N\left(\frac{n}{p}\right) + N\left(\frac{n-q}{p}\right) + 1$$

anderen Punkten, welche mit jenen zusammen eine Punktengruppe $[n, p, q]$ *ausmachen.* Nämlich für $q < n$ ist dieser Satz in dem vorhergehenden enthalten, wie sofort zu erkennen ist, wenn durch $C^{p \cdot q}$ eine F^p gelegt wird; denn je zwei durch die

$$N\left(\frac{n}{p}\right) - N\left(\frac{n-q}{p}\right) - 1$$

Punkte gelegte F^n schneiden die F^p in einer Gruppe $[n, n, p]$, von welcher $n.p.q$ Punkte auf $C^{p \cdot q}$ liegen. Für $q > n$ wird die Anzahl der auf $C^{p \cdot q}$ angenommenen Punkte $= N\left(\frac{n}{p}\right)$, und alle jene F^n schneiden folglich (6. und 7.) die F^p in einer und derselben $C^{n \cdot p}$, welche mit $C^{p \cdot q}$ die Punktengruppe $[n, p, q]$ gemein hat. Für $q = n$ endlich wird die Zahl der auf $C^{p \cdot q} = C^{p \cdot n}$ angenommenen Punkte gleich $N.\left(\frac{n}{p}\right) - 1$, und diese Punkte bestimmen (10.) auf F^p die Basis $[n, p, q] = [n, p, n]$ eines Curvenbüschels np^{ter} Ordnung, zu welchem auch $C^{p \cdot q} = C^{p \cdot n}$ gehört. Zu beachten ist noch, dass für $p > n$ und $q > n$ nur eine einzige F^n durch die auf $C^{p \cdot q}$ angenommenen Punkte gelegt werden kann, weil deren Anzahl in diesem Falle $= N(n)$ wird.

12. Wir haben in (3.) mit $N\left(\frac{n}{p\,,\,q}\right) = N\left(\frac{n}{q\,,\,p}\right)$ die Anzahl von willkürlich angenommenen Punkten einer $C^{p \cdot q}$ bezeichnet, durch welche auf $C^{p \cdot q}$ eine Punktengruppe $[n, p, q]$ bestimmt ist. Der soeben bewiesene Satz lässt sich deshalb auch so aussprechen:

$$N\left(\frac{n}{p\,,\,q}\right) = N\left(\frac{n}{p}\right) - N\left(\frac{n-q}{p}\right) - 1 = N\left(\frac{n}{q}\right) - N\left(\frac{n-p}{q}\right) - 1$$

willkürlich angenommene Punkte einer $C^{p \cdot q}$ *bestimmen auf dieser Curve eine einzige Punktengruppe* $[n, p, q]$. Zugleich folgt aus (9.): *Eine* F^n *geht durch eine gegebene* $C^{p \cdot q}$, *sobald sie* $N\left(\frac{n}{p\,,\,q}\right) + 1$ *willkürlich auf* $C^{p \cdot q}$ *angenommene Punkte enthält.*

In dem Ausdrucke für $N\left(\frac{n}{p\,,\,q}\right)$, welcher sich auch auf die Form:

$$N\left(\frac{n}{p\,,\,q}\right) = N(n) - N(n-p) - N(n-q) + N(n-p-q) - 1$$

bringen lässt, bedeuten n, p, q beliebige positive ganze Zahlen. Je nach ihrer relativen Grösse finden wir mit Berücksichtigung von (7.) für $N\left(\frac{n}{p\,,\,q}\right)$ die Werthe:

$$N\binom{n}{p\,,\,q} = N(n) = \frac{(n+1).(n+2).(n+3)}{2.3} - 1 \text{ für } p > n \text{ und } q > n,$$

$$N\binom{n}{p\,,\,q} = N\binom{n}{q} = N(n) - N(n-q) - 1 \text{ für } p > n \geqq q,$$

$$N\binom{n}{p\,,\,q} = N(n) - N(n-p) - N(n-q) - 2 \text{ für } p+q > n \geqq p \geqq q,$$

$$N\binom{n}{p\,,\,q} = p \cdot q \cdot \frac{2n-p-q+4}{2} - 1 \text{ für } n \geqq p+q-3.$$

Ist eine der Zahlen p, q grösser als n, so kann man sie im Symbole

$$N\binom{n}{p\,,\,q}$$

einfach fortlassen. — Aus der letzten Formel folgt für $n = p + q > q$ die nützliche Gleichung:

$$N(n) = N(n-p) + N(p) + p \cdot (n-p) \cdot \frac{n+4}{2}.$$

13. Beispielsweise finden wir

$$N\binom{4}{7\,,\,3} = N\binom{4}{3} = 30;$$

werden also durch 30 beliebige Punkte einer $C^{7\cdot 3}$ irgend welche F^4 gelegt, so schneiden diese einander und die Curve noch in 54 anderen Punkten, welche mit jenen 30 eine Gruppe [4, 7, 3] bilden. Die $C^{7\cdot 3}$ liegt auf jeder F^4, welche durch 31 willkürlich auf $C^{7\cdot 3}$ angenommene Punkte hindurchgeht. — Für $q = 1, 2, 3$ finden wir beiläufig:

$$N\binom{n}{p,1} = \frac{n.(n+3)}{2} \quad ; \quad N\binom{n}{p,2} = n.(n+2);$$

$$N\binom{n}{p,3} = \frac{3n.(n+1)}{2} \text{ für } p > n;$$

$$N\binom{n}{p,1} = p \cdot \frac{2n-p+3}{2} - 1; \quad N\binom{n}{p,2} = p.(2n-p+2) - 1;$$

$$N\binom{n}{p,3} = 3p \cdot \frac{2n-p+1}{2} - 1 \text{ für } p \leqq n.$$

Wir werden später das Symbol

$$N\binom{n-r}{p,q}$$

auch für den Fall $n - r \leqq 0$ benutzen, und setzen deshalb fest, dass für alle positiven ganzen Zahlen n, p, q, r die Gleichung

$$N\binom{n-r}{p,q} = N\binom{n-r}{p} - N\binom{n-r-q}{p} - 1$$

gelten soll. Alsdann wird

$$N\binom{n-r}{p,q} = 0 \text{ für } n = r, \text{ und } N\binom{n-r}{p,q} = -1 \text{ für } n < r.$$

14. Für $n = p = q$ wird

$$N(n-p) = N(n-q) = 0 \text{ und } N\binom{n}{n\,,\,n} = N(n) - 2;$$

d. h.: *Eine Punktengruppe* $[n, n, n]$ *ist durch* $N(n) - 2$ *beliebige*

von ihren Punkten bestimmt und kann mit je zwei anderen Punkten des Raumes durch eine F^n verbunden werden, mit je einem beliebigen Punkte aber (5.) *durch eine $C^{n.n}$, durch welche ein Büschel von F^n hindurchgeht.* Die Gesammtheit aller durch die Punkte $[n, n, n]$ gehenden F^n und $C^{n.n}$ wird ein *Flächenbündel oder Flächennetz n^{ter} Ordnung* genannt. Je zwei $C^{n.n}$ des Bündels können durch eine F^n desselben verbunden werden, und je zwei seiner F^n schneiden sich in einer $C^{n.n}$ des Bündels. Die Punkte $[n, n, n]$ heissen die *Grundpunkte, Knotenpunkte oder Basis* des Flächenbündels, und letzterer ist somit durch $N(n) - 2$ willkürlich angenommene Grundpunkte bestimmt.

§ 2.

Die Punktengruppe $[n, p, q]$ und die durch sie gelegten algebraischen Flächen und Curven.

15. Um für $n > p > q$ eine Punktengruppe $[n, p, q]$ zu construiren, kann man von derselben zunächst $N(q)$ Punkte willkürlich annehmen; dieselben bestimmen eine F^q, auf welcher $[n, p, q]$ liegt. Auf F^q können sodann

$$N\left(\frac{p}{q}\right) - N(q) = N\left(\frac{p}{p-q, q}\right) \text{ oder } q \cdot (p-q) \cdot \frac{p+4}{2} - 1$$

andere Punkte beliebig angenommen werden, welche mit den $N(q)$ ersten eine auf F^q liegende und durch die Gruppe $[n, p, q]$ gehende $C^{p.q}$ bestimmen. Wählt man endlich auf $C^{p.q}$ noch beliebige

$$N\left(\frac{n}{p, q}\right) - N\left(\frac{p}{q}\right)$$

neue Punkte, so bestimmen diese (12.) mit den vorher angenommenen $N\left(\frac{p}{q}\right)$ Punkten die Gruppe $[n, p, q]$. Letztere ist also bei der Bestimmung einer F^q für $N(q)$ willkürlich gewählte Punkte zu zählen, bei der Bestimmung einer F^p oder F^n dagegen für

$$N\left(\frac{p}{q}\right) \text{ resp. } N\left(\frac{n}{p, q}\right)$$

willkürliche Punkte. Oder: *Durch eine Punktengruppe $[n, p, q]$ kann, wenn $n > p > q$ ist, eine einzige F^q gelegt werden, sowie eine einzige auf F^q enthaltene $C^{p.q}$. Die Gruppe kann mit*

$$N(p) - N\left(\frac{p}{q}\right) = N(p-q) + 1$$

beliebigen Punkten des Raumes durch eine F^p verbunden werden, alle solche F^p aber schneiden sich in jener $C^{p.q}$; sie kann mit

$$N(n) - N\left(\frac{n}{p, q}\right)$$

beliebigen Punkten des Raumes durch *eine* F^n, und mit

$$N\binom{n}{q} - N\binom{n}{p,q} = N\binom{n-p}{q} + 1$$

beliebigen Punkten von F^q durch eine $C^{n.q}$ verbunden werden. — Aehnliche Sätze erhält man für $n = p > q$ und $n > p = q$; so kann für $n \geq p$ durch eine Gruppe $[n, p, p]$ eine einzige $C^{p.p}$ gelegt werden, welche auf allen durch $[n, p, p]$ gehenden F^p enthalten ist.

16. *Eine $C^{n.p}$ und eine $C^{n.q}$, welche eine Punktengruppe $[n, p, q]$ mit einander gemein haben, können durch eine F^n verbunden werden.* Bei dem Beweise dürfen wir unbeschadet seiner Allgemeinheit annehmen, dass $p \geq q$ sei. Wenn nun $n < p$ ist, so kann durch $C^{n.p}$ eine einzige F^n gelegt werden (2.), durch $[n, p, q]$ aber eine einzige $C^{n.q}$, welche mit der gegebenen identisch sein und auf F^n liegen muss (15.). Ist dagegen $n \geq p \geq q$, so zählen die Punkte $[n, p, q]$ bei der Bestimmung einer F^n für mindestens

$$N(n) - N(n-p) - N(n-q) - 2$$

willkürlich gewählte Punkte (12.), weil $N(n-p-q) \geq -1$ ist; verbinden wir also $C^{n.p}$ mit $N(n-p)+1$ beliebigen Punkten von $C^{n.q}$ durch eine F^n, was ausführbar ist (6.), so enthält F^n im Ganzen mindestens

$$N(n) - N(n-q) - 1 = N\binom{n}{q}$$

willkürlich gewählte Punkte der $C^{n.q}$, muss also durch diese Curve hindurchgehen. *Ist $n \geq p+q$, so können die Curven $C^{n.p}$ und $C^{n.q}$ sogar mit $N(n-p-q)+1$ willkürlichen Punkten des Raumes durch eine F^n verbunden werden*, und je zwei dieser F^n schneiden sich noch in einer $C^{n.(n-p-q)}$, welche durch $C^{n.p}$, $C^{n.q}$ und $N(n-p-q)$ Punkte völlig bestimmt ist (8.).

17. *Sind auf einer F^q durch eine Punktengruppe $[n, p, q]$ irgend drei $C^{n.q}$ gelegt, und ist $n > p$, so schneiden sich diese drei Curven paarweise in je $n.(n-p).q$ neuen Punkten $[n, n-p, q]$. Durch diese drei Gruppen $[n, n-p, q]$ können auf F^q drei $C^{(n-p).q}$ gelegt werden, welche einem auf F^q liegenden Curvenbüschel $(n-p).q^{\text{ter}}$ Ordnung angehören, also sich in einer und derselben Punktengruppe $[n-p, n-p, q]$ schneiden müssen.* Verbinden wir nämlich die drei $C^{n.q}$ mit einer durch die Punkte $[n, p, q]$ gehenden $C^{n.p}$ durch drei F^n, so gelten für diese die Sätze von (8.), woraus sich die vorstehenden sofort ergeben. — Legen wir z. B. für $[n, p, q] = [3, 1, 2]$ durch die sechs Schnittpunkte einer F^2 mit einer $C^{3.1}$ irgend drei F^3, so schneiden dieselben paarweise die F^2 noch in drei Gruppen von je zwölf Punkten $[3, 2, 2]$, welche durch drei, zu einem und demselben Curvenbüschel gehörige $C^{2.2}$ verbunden werden können. — Einen Theil des obigen, sehr allgemeinen Satzes können wir auch wie folgt aussprechen: *Wenn von den Punkten $[n, n, q]$ irgend $n.p.q$ eine Gruppe*

$[n, p, q]$ *bilden, so bilden die übrigen eine Gruppe* $[n, n-p, q]$. Derselbe ist übrigens auch in (11.) enthalten und zugleich ein besonderer Fall des folgenden Satzes:

18. *Wenn von den Punkten einer Gruppe* $[n, p, q]$ *irgend* $r.p.q$ *eine Gruppe* $[r, p, q]$ *bilden, so bilden die übrigen eine Gruppe* $[n-r, p, q]$. Nämlich für $p = n$ geht dieser Satz in den vorhergehenden über. Um ihn für die übrigen Fälle zu beweisen, legen wir durch $[n, p, q]$ drei Flächen F^n, F^p, F^q, und durch $[r, p, q]$ eine F^r; zugleich dürfen wir $p \geqq q$ annehmen, weil p und q mit einander vertauscht werden können. Ist nun *erstens* $p > n$, so hat F^n mit der Schnittlinie $C^{r \cdot q}$ von F^r und F^q mehr als $r.n.q$, nämlich alle Punkte $[r, p, q]$ gemein; von denselben können wir $N\left(\frac{p}{r,q}\right)$ als willkürlich auf $C^{r \cdot q}$ angenommene Punkte betrachten, und da

$$N\left(\frac{p}{r,q}\right) > N\left(\frac{n}{r,q}\right)$$

ist wegen $p > n$, so muss F^n durch $C^{r \cdot q}$ hindurchgehen (12.). Die Flächen F^n und F^q haben folglich ausserdem eine $C^{(n-r) \cdot q}$ gemein (9.), und letztere wird von F^p in der genannten Punktengruppe $[n-r, p, q]$ geschnitten. — Ist *zweitens* $n \geqq p + r \geqq q + r$, so seien $C^{p \cdot n}$, $C^{q \cdot n}$ und $C^{r \cdot n}$ die Schnittlinien von F^n mit F^p, F^q und F^r. Die $C^{r \cdot n}$ kann alsdann mit $C^{p \cdot n}$ und $N(n-p-r) + 1$ willkürlichen Punkten des Raumes durch eine neue F_1^n verbunden werden (16.), und ebenso mit $C^{q \cdot n}$ und $N(n-q-r) + 1$ beliebigen Punkten durch eine F_2^n. Die Flächen F_1^n und F_2^n gehen durch alle Punkte $[n, p, q]$, weil $C^{p \cdot n}$ und $C^{q \cdot n}$ diese Punkte enthalten; sie schneiden sich in $C^{r \cdot n}$ und folglich noch in einer $C^{(n-r) \cdot n}$, und eine durch letztere gelegte F^{n-r} hat offenbar mit F^p und F^q die im Satze erwähnte Gruppe $[n-r, p, q]$ gemein. — Ist endlich *drittens* $n > p$ und zugleich $n < p + r$, so berechnen wir r_1 und n_1 aus den Gleichungen $n + r_1 = p + r = n_1$, und ergänzen F^n durch eine beliebige F^{r_1} zu einer F^{n_1}. Diese F^{n_1} geht durch die Punkte $[r, p, q]$, und ihre übrigen Schnittpunkte mit F^p und F^q bilden, weil $n_1 = p + r \geqq q + r$ ist, nach dem eben Bewiesenen eine Gruppe $[n_1 - r, p, q]$. Zu dieser gehört auch die Gruppe $[r_1, p, q]$, in welcher F^p und F^q von F^{r_1} geschnitten werden; und da $n_1 - r = p$ ist, so muss nach dem zuerst erledigten Falle die Gruppe $[n_1 - r, p, q]$ zerfallen in $[r_1, p, q]$ und eine Gruppe $[n_1 - r - r_1, p, q] = [n - r, p, q]$. Offenbar aber bildet die letztere mit $[r, p, q]$ zusammen die Gruppe $[n, p, q]$. W. z. b. w.

19. Der soeben bewiesene Satz (18.) enthält sehr allgemeine und merkwürdige Eigenschaften der algebraischen Flächen und ihrer Durchdringungscurven. Wir können ihn auch folgendermassen aussprechen: *Wenn eine* $C^{p \cdot q}$ *und eine* F^n *sich in einer Punktengruppe* $[r, p, q]$ *schneiden, so haben sie ausserdem eine Gruppe* $[n-r, p, q]$ *mit einan-*

der gemein. Für ebene Curven sind einige ganz specielle Fälle dieses Satzes bereits von Herrn Chasles ausgesprochen und bewiesen worden; z. B. der folgende*): „Wenn auf einer ebenen Curve n^{ter} Ord- „nung die $p.p$ Knotenpunkte eines Curvenbüschels p^{ter} Ordnung lie- „gen, so schneidet jede Curve des letzteren die $C^{1 \cdot n}$ noch in $(n-p).p$ „Punkten, durch welche eine Curve $(n-p)^{ter}$ Ordnung gelegt werden „kann.“ Wir erhalten diesen Fall für $r=p$ und $q=1$. — In einer früheren Arbeit habe ich folgenden Satz aufgestellt, der gleichfalls aus dem obigen sich ergiebt: „Wird durch n Schnittpunkte einer F^{n+1} „mit einer Geraden irgend eine $C^{1 \cdot n}$ gelegt, so begegnet diese der „F^{n+1} noch in $n.n$ Punkten $[n, n, 1]$; legen wir durch letztere eine „$C^{n \cdot n}$, so wird F^{n+1} von dieser Curve noch in $n.n.n$ Punkten $[n,n,n]$ „geschnitten; und jede durch die $[n, n, n]$ gelegte $C^{n \cdot n}$ begegnet der „F^{n+1} in $n.n$ neuen Punkten $[n, n, 1]$, welche in einer Ebene liegen.“ Der letzte Theil des Satzes ist auch in dem folgenden enthalten: *Wenn eine F^{n+p} eine Gruppe $[n, n, n]$ enthält, so wird sie von jeder durch letztere gelegten $C^{n \cdot n}$ noch in einer Gruppe $[n, n, p]$ geschnitten; alle solche Gruppen können demnach mit $N(p) - N\left(\frac{p}{n,n}\right)$ festen Punkten von F^{n+p} durch je eine F^p verbunden werden.* Wir werden später (36.) sehen, dass bei passender Wahl jener festen Punkte die so construirten F^p einen Flächenbündel p^{ter} Ordnung bilden, dessen Knotenpunkte $[p, p, p]$ auf F^{n+p} liegen, und dass F^{n+p} als Erzeugniss dieses und des Bündels n^{ter} Ordnung $[n, n, n]$ betrachtet werden kann.

20. *Durch eine Punktengruppe $[r, p, q]$ kann keine F^n gelegt werden, wenn n kleiner ist als die drei Zahlen r, p, q.* Denn legen wir durch die Gruppe eine $C^{p \cdot q}$ und durch diese eine F^p, so müsste eine durch $[r, p, q]$ gehende F^n die $C^{p \cdot q}$ enthalten, weil die gemeinschaftlichen Punkte $[r, p, q]$ für $N\left(\frac{r}{p,q}\right)$, also wegen $r > n$ für mehr als $N\left(\frac{n}{p,q}\right)$ willkürliche Punkte von $C^{p \cdot q}$ zu zählen sind. Die F^p und F^n würden sich also in $C^{p \cdot q}$ schneiden, was für $n < q$ unmöglich ist; denn $C^{p \cdot q}$ kann keinen Theil von $C^{p \cdot n}$ bilden, wenn $n < q$ ist. — *Durch eine Punktengruppe $[r, p, q]$ können für $n > r$ unendlich viele und für $n = r$ mindestens eine F^n gelegt werden,* wie schon daraus erhellt, dass eine durch $[r, p, q]$ gelegte F^r mit jeder beliebigen F^{n-r} eine solche F^n ausmacht.

21. Wenn nun durch eine Gruppe $[r, p, q]$ eine F^n gelegt werden kann, so fragt sich, für wie viele willkürlich angenommene (oder „*unabhängige*“) Punkte diese Gruppe bei der Bestimmung von F^n zu zählen ist? Wir wollen diese gesuchte Zahl mit

*) Chasles in den Compt. Rend. 1857, T. 45. p. 1061.

$$N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)+1$$

bezeichnen; ihre Definition ist auch in folgendem Satze enthalten: *Eine Punktengruppe* $[r, p, q]$ *kann mit* $N(n) - N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right) - 1$ *willkürlich angenommenen Punkten des Raumes durch eine einzige* F^n *verbunden werden.* Für unsere Zwecke ist jedoch die folgende Definition von $N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)$ bequemer, welche auch in dem Falle einen Sinn behält, wenn durch die Gruppe $[r, p, q]$ keine F^n gelegt werden kann: *Durch* $N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)$ *Punkte einer Gruppe* $[r, p, q]$ kann eine F^n *gelegt werden, welche nicht durch alle übrigen Punkte von* $[r, p, q]$ *hindurchgeht; jede* F^n *aber, welche durch* $N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)+1$ *willkürlich angenommene Punkte der Gruppe* $[r, p, q]$ *gelegt wird, geht durch alle Punkte derselben.* Wenn alle Punkte $[r, p, q]$ bei der Bestimmung einer F^n als willkürlich angenommene betrachtet werden dürfen, so muss

$$N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)+1 = r\cdot p\cdot q$$

sein; im andern Falle ist:

$$N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)+1 < r.p.q.$$

22. Auf Grund der bisherigen Sätze finden wir für $N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)$ den Werth:

$$N\left(\frac{n}{p,\,q}\right) - N\left(\frac{n-r}{p,\,q}\right) - 1.$$

Zum Beweise legen wir durch die Gruppe $[r, p, q]$ eine $C^{p\cdot q}$ und unterscheiden drei Fälle. Ist *erstens* $n < r$, so wird

$$N\left(\frac{n-r}{p,\,q}\right) = -1 \text{ und obiger Ausdruck } = N\left(\frac{n}{p,\,q}\right);$$

wir wissen aber bereits, dass durch beliebige $N\left(\frac{n}{p,q}\right)$ Punkte einer $C^{p\cdot q}$ eine F^n gelegt werden kann, welche die $C^{p\cdot q}$ noch in $n.p.q - N\left(\frac{n}{p,q}\right)$ völlig bestimmten anderen Punkten schneidet, und offenbar geht diese F^n wegen $n.p.q < r.p.q$ nicht durch alle Punkte $[r, p, q]$, ausgenommen wenn sie durch $N\left(\frac{n}{p,\,q}\right)+1$ willkürliche Punkte von $C^{p\cdot q}$ und folglich durch $C^{p\cdot q}$ selber gelegt wird. Ist *zweitens* $n = r$, so wird

$$N\left(\frac{n}{p,\,q}\right) - N\left(\frac{n-r}{p,\,q}\right) - 1 = N\left(\frac{n}{p,\,q}\right) - 1$$

und die Gruppe $[r, p, q]$ wird eine $[n, p, q]$; verbinden wir aber

$$N\left(\frac{n}{p,\,q}\right) - 1$$

Punkte dieser Gruppe mit einem beliebigen Punkte P von $C^{p\cdot q}$ durch eine F^n, so schneidet diese die $C^{p\cdot q}$ in einer neuen Gruppe $[n, p, q]$,

welche nur dann mit der gegebenen identisch ist, wenn auch P zu $[r, p, q]$ gehört (12.). Ist endlich *drittens* $n > r$, so schneidet jede durch $[r, p, q]$ gelegte F^n die $C^{p \cdot q}$ noch in einer Gruppe $[n-r, p, q]$, welche durch $N\binom{n-r}{p,q}$ willkürlich gewählte Punkte von $C^{p \cdot q}$ bestimmt ist; verbinden wir also $N\binom{n-r}{p,q} + 1$ beliebige Punkte von $C^{p \cdot q}$ mit irgend

$$N\binom{n}{p,q} - N\binom{n-r}{p,q} - 1$$

Punkten der Gruppe $[r, p, q]$ durch eine F^n, welche die $C^{p \cdot q}$ in einer Gruppe $[n, p, q]$ schneidet, so kann diese F^n nur dann durch alle Punkte $[r, p, q]$ gehen, wenn die $N\binom{n-r}{p,q} + 1$ Punkte entweder irgend einer Gruppe $[n-r, p, q]$ angehören oder einer von ihnen in der Gruppe $[r, p, q]$ liegt. Die Gleichung:

$$N\binom{n}{r,p,q} = N\binom{n}{p,q} - N\binom{n-r}{p,q} - 1$$

ist damit bewiesen.

23. Mit Rücksicht auf (12.) finden wir:

$$N\binom{n}{p,q} - N\binom{n-r}{p,q} = N\binom{n}{p} - N\binom{n-q}{p} - N\binom{n-r}{p} + N\binom{n-r-q}{p},$$

und hierin können q und r (und ebenso p und r) mit einander vertauscht werden. Wir erhalten deshalb auch:

$$N\binom{n}{r,p,q} = N\binom{n}{p,r} - N\binom{n-q}{p,r} - 1 = N\binom{n}{q,r} - N\binom{n-p}{q,r} - 1.$$

Uebrigens ergiebt sich schon aus der Definition des Symboles

$$N\binom{n}{r,p,q},$$

dass in demselben, so gut wie in $[r, p, q]$ die Zahlen r, p, q mit einander vertauscht werden dürfen. Beachtenswerth ist, dass die für die Zahlen

$$N\binom{n}{r,p,q}, \quad N\binom{n}{p,q} \text{ und } N\binom{n}{p}$$

gefundenen Ausdrücke der Form nach übereinstimmen, wodurch ihre Berechnung sehr erleichtert wird. — Beispielsweise ergiebt sich, dass bei der Bestimmung einer F^6 die 125 Punkte $[5, 5, 5]$ nur für 72, und die 64 Punkte $[4, 4, 4]$ nur für 54 willkürlich gewählte Punkte gelten. Die 27 Punkte $[3, 3, 3]$ können mit 11 beliebigen Punkten des Raumes durch eine F^4 verbunden werden; ebenso die 60 Punkte $[3, 4, 5]$ mit 33 beliebigen Punkten durch eine F^6, sodass sie für 50 unabhängige Punkte zu zählen sind.

24. Für $n \geqq p + q + r - 3$ wird (12.):

$N\binom{n}{p,q}=p\cdot q\cdot\frac{2n-p-q+4}{2}-1$ und $N\binom{n-r}{p,q}=p\cdot q\cdot\frac{2(n-r)-p-q+4}{2}-1$;
folglich ist

$$N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)+1=p.q.r \text{ für } n\geqq p+q+r-3.$$

In allen übrigen Fällen jedoch finden wir

$$N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)+1<p.q.r.$$

Also: *Eine Gruppe* $[r,\,p,\,q]$ *ist bei der Bestimmung einer* F^n *für* $r.p.q$ *oder für weniger als* $r.p.q$ *unabhängige Punkte zu zählen, je nachdem* $n\geqq p+q+r-3$ *ist oder nicht.* = Besonders hervorzuheben sind noch folgende Werthe von $N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)$:

$$N\left(\frac{n}{r,p,q}\right)=N\binom{n}{p,q}=N\binom{n}{p}-N\binom{n-q}{p}-1 \text{ für } r>n\geqq p\geqq q,$$

$$N\left(\frac{n}{r,p,q}\right)=N\binom{n}{q}=N(n)-N(n-q)-1 \text{ für } r\geqq p>n\geqq q,$$

$$N\left(\frac{n}{r,p,q}\right)=N(n)=\frac{(n+1)\,.\,(n+2)\,.\,(n+3)}{2.3}-1 \text{ für } r\geqq p\geqq q>n.$$

Im Symbole $N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)$ kann man also ebenso, wie im $N\binom{n}{p,q}$ und $N\binom{n}{p}$, diejenigen von den Zahlen r, p, q, welche grösser als n sind, fortlassen.

25. *Wenn von einer Punktengruppe* $[n,\,p,\,q]$ *irgend*

$$N\left(\frac{n}{r,p,q}\right)+1$$

Punkte auf einer F^r *liegen und bei der Bestimmung einer* F^n *als unabhängige Punkte betrachtet werden können, und wenn* $n>r$ *ist, so zerfällt die Gruppe in eine auf* F^r *enthaltene* $[r,\,p,\,q]$ *und eine* $[n-r,\,p,\,q]$. Zum Beweise legen wir durch $[n,\,p,\,q]$ eine $C^{p\cdot q}$, welche von F^r in einer Gruppe $[r,\,p,\,q]$ geschnitten wird; da nun F^n von dieser Gruppe

$$N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)+1$$

Punkte enthält, so wird F^n im Allgemeinen (21.) durch alle Punkte von $[r,\,p,\,q]$ hindurchgehen, wie unser Satz behauptet. Nur wenn die

$$N\left(\frac{n}{r,\,p,\,q}\right)+1$$

Punkte bei der Bestimmung einer F^n nicht alle als willkürlich angenommene Punkte der Gruppe $[r, p, q]$ betrachtet werden dürfen, wenn sie also in $[r, p, q]$ eine besondere gegenseitige Lage haben, oder auch wenn F^r alle Punkte $[n, p, q]$ und folglich auch $C^{p\cdot q}$ enthält, gilt der Satz nicht.

— Wenn z. B. von 64 Punkten [4, 4, 4] irgend 13 in einer Ebene liegen, so enthält dieselbe noch drei jener Punkte, und die übrigen 48 Punkte bilden eine Gruppe [3, 4, 4]; es ist ja ohnehin bekannt, dass alle $C^{1.4}$, welche durch 13 beliebige Punkte einer Ebene gehen, sich noch in drei bestimmten Punkten schneiden müssen. Dennoch aber erleidet der Satz eine Ausnahme, wenn die 13 Punkte mit irgend drei Punkten einer Geraden eine Gruppe [1, 4, 4] bilden; denn ich finde (50.), dass *jede* $C^{1.4}$, welche alsdann durch 12 derselben hindurchgeht, auch den 13ten enthalten muss, dass also diese 13 Punkte bei der Bestimmung einer F^4 nur für 12 unabhängige Punkte der Gruppe [1, 4, 4] zu zählen sind.

26. Wenden wir unsern Satz (25.) an auf eine Punktengruppe [2, 3, 4], so ergiebt sich

$$N\left(\frac{4}{1,2,3}\right)+1=6 \text{ und } N\left(\frac{3}{1,2,4}\right)+1=7;$$

d. h.: „Liegen von den Punkten [2, 3, 4] irgend sechs in einer Ebene, „so bilden die übrigen 18 eine Gruppe [2, 3, 3]; liegen sieben in einer „Ebene, so enthält diese noch einen achten Punkt, und die übrigen „16 bilden eine Gruppe [2, 2, 4].“ Ebenso scheint die Gleichung

$$N\left(\frac{2}{1,3,4}\right)+1=6$$

zu folgendem Satze zu führen: „Wenn von den Punkten [2, 3, 4] „irgend sechs in einer Ebene liegen, so enthält dieselbe noch sechs „von jenen Punkten, und auch die übrigen 12 bilden eine Gruppe „[1, 3, 4].“ Allein dieser Satz ist *falsch* und nicht unter dem allgemeinen Satze enthalten, weil sechs in einer Ebene liegende Punkte von [2, 3, 4] bei der Bestimmung einer F^2 nur für fünf unabhängige Punkte gezählt werden dürfen; denn sie liegen auf einer $C^{1.2}$, und F^2 geht durch $C^{1.2}$, wenn sie fünf Punkte von $C^{1.2}$ enthält.

§ 3.

Projectivische Erzeugung algebraischer Flächen und ihrer Schnittlinien.

27. Wir setzen in diesem § den Begriff der projectivischen Verwandtschaft und einige elementare Sätze über dieselbe als bekannt voraus. Zwei Flächenbündel [*n*, *n*, *n*] und [*p*, *p*, *p*] von den Ordnungen *n* und *p* können *collinear-projectivisch* auf einander bezogen werden, sodass jeder F^n des ersteren eine F^p des letzteren entspricht, und jeder auf F^n liegenden $C^{n.n}$ des ersteren eine auf F^p liegende $C^{p.p}$ des letzteren. Jedem Flächen- oder Curvenbüschel von [*n*, *n*, *n*] entspricht dann ein zu ihm projectivischer Flächen- resp. Curven-

büschel von $[p, p, p]$. Sind $F_1^n = 0$, $F_2^n = 0$, $F_3^n = 0$ die analytischen Gleichungen von drei beliebigen Flächen des ersten Bündels, und $F_1^p = 0$, $F_2^p = 0$, $F_3^p = 0$ diejenigen der entsprechenden Flächen des zweiten, so sind:

$$\lambda_1 F_1^n + \lambda_2 F_2^n + \lambda_3 F_3^n = 0 \text{ und } \lambda_1 F_1^p + \lambda_2 F_2^p + \lambda_3 F_3^p = 0$$

die Gleichungen von je zwei einander entsprechenden (oder homologen) Flächen der Bündel, wenn den Constanten λ_1, λ_2, λ_3 willkürliche Werthe ertheilt werden. Setzt man $\lambda_3 = 0$, so stellen dieselben Gleichungen zwei homologe Flächen der beiden Büschel $F_1^n F_2^n$ und $F_1^p F_2^p$ dar.

28. Zwei Flächenbündel $[n, n, n]$ und $[p, p, p]$ sind *reciprok-projectivisch* auf einander bezogen, wenn jeder F^n des ersteren eine $C^{p \cdot p}$ des letzteren entspricht und jeder auf F^n liegenden $C^{n \cdot n}$ des ersteren eine durch $C^{p \cdot p}$ gehende F^p des letzteren. Jedem Flächen- oder Curvenbüschel von $[n, n, n]$ entspricht ein zu ihm projectivischer Curven- resp. Flächenbüschel von $[p, p, p]$. Wenn zwei Bündel auf einen dritten projectivisch bezogen sind, so sind sie auch zu einander projectivisch, und zwar collinear oder reciprok, je nachdem sie dem dritten gleichartig oder ungleichartig verwandt sind. Um zwei Flächenbündel reciprok auf einander zu beziehen, kann man zwei Flächenbüschel des einen auf zwei Curvenbüschel des anderen projectivisch beziehen, so jedoch, dass der gemeinschaftlichen Fläche der beiden ersteren die gemeinschaftliche Curve der beiden letzteren entspricht; dadurch ist die reciproke Verwandtschaft der Bündel völlig festgestellt.

29. *Zwei projectivische Flächenbüschel* n^{ter} *und* p^{ter} *Ordnung erzeugen eine* F^{n+p}, *welche die Schnittlinien von je zwei homologen Flächen, sowie die Knotenlinien der beiden Büschel enthält.* Sind nämlich

$$\lambda_1 F_1^n + \lambda_2 F_2^n = 0 \text{ und } \lambda_1 F_1^p + \lambda_2 F_2^p = 0$$

die Gleichungen homologer Flächen der Bündel, also auch diejenigen ihrer Schnittlinie, so finden wir für den Ort der letzteren durch Elimination von λ_1 und λ_2 die Gleichung:

$$F_1^p \,.\, F_2^n - F_2^p \,.\, F_1^n = 0,$$

also eine Gleichung $n + p^{\text{ten}}$ Grades. Da diese Gleichung auch befriedigt wird, wenn $F_1^n = F_2^n = 0$ gesetzt wird, so liegt auf der durch sie dargestellten F^{n+p} auch die Knotenlinie des Büschels

$$\lambda_1 F_1^n + \lambda_2 F_2^n = 0.$$

Die beiden Flächenbüschel werden von einer F^q in zwei projectivischen Curvenbüscheln $n \,.\, q^{\text{ter}}$ und $p \,.\, q^{\text{ter}}$ Ordnung geschnitten, welche die Schnittlinie $C^{(n+p)q}$ der Flächen F^{n+p} und F^q mit einander erzeugen. Da auch umgekehrt zwei auf F^q liegende projectivische Curven-

büschel stets als Schnitte der F^q mit zwei projectivischen Flächenbüscheln betrachtet werden können, so erhalten wir den Satz:

30. *Zwei projectivische Curvenbüschel $n.q^{\text{ter}}$ und $p.q^{\text{ter}}$ Ordnung, welche auf einer F^q liegen, erzeugen eine $C^{(n+p).q}$; dieselbe enthält die Schnittpunkte homologer Curven sowie die Knotenpunkte der Büschel.* Ebenso ergiebt sich der folgende: *Ein Curvenbüschel $n.q^{\text{ter}}$ Ordnung auf einer F^q und ein zu ihm projectivischer Flächenbüschel p^{ter} Ordnung erzeugen eine $C^{(n+p).q}$, welche alle Schnittpunkte homologer Elemente der beiden Büschel enthält.* Die so erzeugte $C^{(n+p).q}$ enthält eine Gruppe $[n, n, q]$, eine Gruppe $[p, p, q]$ und unendlich viele Gruppen $[n, p, q]$. Ich werde unten beweisen, dass nicht jede beliebige $C^{(n+p).q}$ durch zwei projectivische Curvenbüschel $n.q^{\text{ter}}$ und $p.q^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden kann.

31. *Wenn eine $C^{(n+p).q}$ eine Punktengruppe $[n, n, q]$ enthält, so kann sie durch zwei projectivische Curvenbüschel $n.q^{\text{ter}}$ und $p.q^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden, von denen der erstere die Punkte $[n, n, q]$ zur Basis hat.* Legen wir durch $C^{(n+p).q}$ eine F^q und auf dieser durch $[n, n, q]$ zwei Curven $C^{n.q}$ und $C_1^{n.q}$, so schneiden (18.) die letzteren unsere $C^{(n+p).q}$ noch in zwei Punktengruppen $[n, p, q]$ und $[n, p, q]_1$. Die Gruppe $[n, p, q]$ können wir mit

$$N\left(\frac{p}{q}\right) - N\left(\frac{p}{n,\, q}\right) = N\left(\frac{p-n}{q}\right) + 1$$

willkürlich angenommenen Punkten von $C^{(n+p).q}$ durch eine auf F^q liegende $C^{p.q}$ verbinden, welche die $C^{(n+p).q}$ in $[n, p, q]$ und folglich ausserdem in einer Gruppe $[p, p, q]$ schneidet. Da nun die Curven $C_1^{n.q}$ und $C^{p.q}$ zusammen eine von der gegebenen verschiedene $C^{(n+p).q}$ ausmachen, so bilden die vier Gruppen $[n, p, q]_1$, $[n, n, q]$, $[n, p, q]$ und $[p, p, q]$ zusammen eine Gruppe $[n + p, n + p, q]$; und weil von dieser die Punkte $[n, n, q]$ und $[n, p, q]$ als Schnittpunkte von $C^{(n+p).q}$ und $C^{n.q}$ eine Gruppe $[n, n + p, q]$ ausmachen, so bilden die übrigen Punkte $[p, p, q]$ und $[n, p, q]_1$ eine Gruppe $[p, n + p, q]$ und liegen demnach auf einer $C_1^{p.q}$. Ebenso kann jede neue Gruppe $[n, p, q]_2$ von $C^{(n+q).q}$, welche mit $[n, n, q]$ auf einer $C_2^{n.q}$ liegt, mit $[p, p, q]$ durch eine $C_2^{p.q}$ verbunden werden. Beziehen wir nun die Curvenbüschel $[n, n, q]$ und $[p, p, q]$ projectivisch so auf einander, dass den drei Curven $C^{n.q}$, $C_1^{n.q}$, $C_2^{n.q}$ die resp. Curven $C^{p.q}$, $C_1^{p.q}$, $C_2^{p.q}$ entsprechen, so erzeugen sie eine $C^{(n+p).q}$, welche mit der gegebenen identisch ist, weil sie mit ihr $(n + p)\ (n + p)\ q + n\ p\ q$ Punkte gemein hat, nämlich die Gruppen $[n+p, n+p, q]$ und $[n, p, q]_2$.

32. Wenn eine $C^{(n+p).q}$ als Erzeugniss von zwei Curvenbüscheln $n.q^{\text{ter}}$ und $p.q^{\text{ter}}$ Ordnung betrachtet werden kann, so will ich deren Knotenpunkte $[n, n, q]$ und $[p, p, q]$ zwei *Gegengruppen* der Curve nennen. *Jede Punktengruppe $[n, p, q]$ von $C^{(n+p).q}$, welche mit der*

einen Gruppe $[n, n, q]$ *auf einer* $C^{n \cdot q}$ *liegt, kann mit der Gegengruppe* $[p, p, q]$ *durch eine* $C^{p \cdot q}$ *verbunden werden* (31.). Ist die Gruppe $[n, n, q]$ gegeben, so können von der Gegengruppe $[p, p, q]$, wie soeben bemerkt wurde,

$$N\left(\frac{p-n}{q}\right)+1$$

Punkte willkürlich angenommen werden. Da diese Zahl positiv oder Null ist, je nachdem $p \geq n$ oder $p < n$ ist, so ergiebt sich: *Zu einer Gruppe* $[n, n, q]$ *auf einer* $C^{(n+q) \cdot q}$ *können unendlich viele Gegengruppen* $[p, p, q]$ *oder nur eine solche auf der Curve construirt werden, je nachdem* $p \geq n$ *oder* $p < n$ *ist.* — Wenn auf $C^{(n+p) \cdot q}$ eine Gruppe $[n, p, q]$ gegeben ist und man legt durch letztere eine F^n und eine F^p, so schneiden diese Flächen die Curve in zwei Gegengruppen $[n, n, q]$ und $[p, p, q]$.

33. Die Frage, ob jede $C^{(n+p) \cdot q}$ durch zwei projectivische Curvenbüschel $n.q^{\text{ter}}$ und $p.q^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden kann, ist jetzt auf die folgende zurückgeführt: *Kann auf jeder* $C^{(n+p) \cdot q}$ *eine Gruppe* $[n, n, q]$ *oder* $[n, p, q]$ *construirt werden?* Wir müssen diese Frage und damit auch die erstere *verneinen*, wie sich am leichtesten an speciellen Fällen erkennen lässt. Wenn nämlich für $n = 1$ und $1 + p = p_1$ auf jeder $C^{p_1 \cdot q}$ eine Gruppe $[1, 1, q]$ läge, d. h. wenn jede $C^{p_1 \cdot q}$ eine $q - 1$fache Secante (d. h. eine sie in q Punkten schneidende Gerade) besässe, so müsste für $p_1 < q$ diese Secante auf der die Curve enthaltenden F^{p_1} liegen; wir würden so den Satz erhalten, dass jede F^{p_1} eine Gerade enthielte, was für $p_1 > 3$ gewiss nicht allgemein richtig ist. Also: *Die* $C^{(n+p) \cdot q}$, *welche von zwei auf einer* F^q *liegenden, projectivischen Curvenbüscheln* $n \,.\, q^{\text{ter}}$ *und* $p \,.\, q^{\text{ter}}$ *Ordnung erzeugt wird, darf nicht immer als die allgemeine Durchdringungscurve von* F^q *mit einer* F^{n+p} *aufgefasst werden.* Daraus schliessen wir weiter: *Zwei projectivische Flächenbüschel* n^{ter} *und* p^{ter} *Ordnung erzeugen eine* **specielle** *Fläche* $n + p^{\text{ter}}$ *Ordnung;* jedoch für $n + p = 2$ oder 3 erleidet dieser letzte Satz Ausnahmen.

34. *Zwei reciproke Flächenbündel* n^{ter} *und* p^{ter} *Ordnung erzeugen eine* F^{n+p}, *welche durch die Knotenpunkte* $[n, n, n]$ *und* $[p, p, p]$ *beider Bündel hindurchgeht und alle Schnittpunkte homologer Elemente der Bündel enthält.* Bezeichnen wir den erzeugten geometrischen Ort vorläufig mit Φ, so muss Φ mit jeder F^n des ersten Bündels eine durch die $[n, n, n]$ gehende $C^{(n+p) \cdot n}$ gemein haben, wie sich (30.) sofort ergiebt, wenn wir uns F^n durch eine $C^{n \cdot n}$ des Bündels $[n, n, n]$ beschrieben denken. Ebenso wird Φ von jeder F^p des zweiten Bündels in einer $C^{(n+p) \cdot p}$ geschnitten. Sei nun (was anzunehmen gestattet ist) $n \geq p$ und seien $C^{(n+p) \cdot n}$ und $C_1^{(n+p) \cdot n}$ die beiden Schnittlinien von Φ mit zwei Flächen F^n und F_1^n des ersten Bündels; dann haben

diese Curven die Punkte $[n, n, n]$, ausserdem aber diejenigen Punkte $[n, n, p]$ gemein, in welchen die Schnittlinie von [illegible] und F_1^n der ihr entsprechenden F^p des zweiten Bündels begegnet. Weil aber diese Punkte $[n, n, n]$ und $[n, n, p]$ zusammen eine Gruppe $[n, n, n+p]$ ausmachen als Schnittpunkte von $C^{(n+p).n}$ mit F_1^n, so können $C^{(n+p).n}$ und $C_1^{(n+p).n}$ (16.) für $n > p$ durch eine einzige, und für $n = p$ mit einem beliebigen Punkte A des Raumes durch eine einzige F^{n+p} verbunden werden. Wir wählen im letzteren Falle A auf unserem Orte Φ und behaupten, dass in beiden Fällen Φ mit F^{n+p} identisch ist. Denn jede beliebige F^p von $[p, p, p]$, welche für $n = p$ auch den Punkt A enthält, schneidet die Flächen Φ und F^{n+p} in zwei $C^{(n+p).p}$, welche mehr als $(n+p).(n+p).p$ Punkte gemein haben und folglich identisch sind; nämlich diese Curven gehen beide durch die $(n+p).2n.p$ Schnittpunkte von F^p mit $C^{(n+p).n}$ und $C_1^{(n+p).n}$ und für $n = p$ ausserdem durch den Punkt A. Die Flächen Φ und F^{n+p} haben folglich alle ihre Punkte mit einander gemein.

35. Wenn eine F^{n+p} als Erzeugniss von zwei reciproken Flächenbündeln n^{ter} und p^{ter} Ordnung betrachtet werden kann, so will ich wieder die Knotenpunkte $[n, n, n]$ und $[p, p, p]$ der Bündel zwei *Gegengruppen* nennen. *Jede Gruppe $[n, n, p]$ von F^{n+p}, welche mit der einen Gruppe $[n, n, n]$ auf einer $C^{n.n}$ liegt, kann mit der Gegengruppe $[p, p, p]$ durch eine F^p verbunden werden.* — Wenn auf einer F^{n+p} eine Gruppe $[n, n, n]$ gegeben ist, so können auf ihr unendlich viele Gruppen $[n, n, p]$, $[n, p, p]$ und $[p, p, p]$ construirt werden. Denn jede durch $[n, n, n]$ gelegte $C^{n.n}$ schneidet (18.) die F^{n+p} noch in einer Gruppe $[n, n, p]$; eine durch letztere gehende $C^{n.p}$ hat mit F^{n+p} noch eine Gruppe $[n, p, p]$ gemein, und eine durch diese $[n, p, p]$ gelegte $C^{p.p}$ begegnet der F^{n+p} noch in einer Gruppe $[p, p, p]$. Zugleich folgt aus (16.), dass von den drei auf einander folgenden Curven $C^{n.n}$, $C^{n.p}$ und $C^{p.p}$ die beiden ersten durch eine F^n und die beiden letzten durch eine F^p verbunden werden können. Von grossem Interesse ist nun die Frage, ob jede Gruppe $[p, p, p]$ der Fläche F^{n+p}, zu welcher wir auf diese Art von der Gruppe $[n, n, n]$ aus gelangen, im obigen Sinne als Gegengruppe von $[n, n, n]$ betrachtet werden kann. Durch die folgenden Untersuchungen wird diese Frage eine *bejahende* Antwort erhalten.

36. *Wenn eine F^{n+p} eine Punktengruppe $[n, n, n]$ enthält, so kann sie durch zwei reciproke Flächenbündel n^{ter} und p^{ter} Ordnung erzeugt werden, von denen der erstere die Gruppe $[n, n, n]$ zur Basis hat.* Wir construiren auf die soeben (35.) angegebene Weise von $[n, n, n]$ ausgehend die drei Gruppen $[n, n, p]$, $[n, p, p]$ und $[p, p, p]$ auf F^{n+p}; von diesen können die beiden ersteren mit $[n, n, n]$ durch eine F^n und mit $[p, p, p]$ durch eine F^p verbunden werden (35.), und

wir wollen die Schnittlinien von F^{n+p} mit F^n und F^p durch $C^{(n+p).n}$ und $C^{(n+p).p}$ bezeichnen. Wir legen noch durch $[n, n, n]$ und $[n, n, p]$ auf F^{n+p} eine $C_1^{(n+p).n}$; dieselbe schneidet die $C^{(n+p).p}$ in $[n, n, p]$ und folglich ausserdem in einer Gruppe $[n, p, p]_1$. Auf Grund dieser Constructionen wollen wir unseren Satz beweisen, indem wir zeigen, dass die Punkte $[n, n, n]$ und $[p, p, p]$ als Knotenpunkte der verlangten Flächenbündel, also als zwei Gegengruppen betrachtet werden können. Da wir von $[p, p, p]$ auf analoge Art zu $[n, n, n]$ gelangen können, wie von $[n, n, n]$ zu $[p, p, p]$, so können diese Punktengruppen beim Beweise mit einander vertauscht werden, und wir dürfen deshalb $n \geqq p$ annehmen.

37. Die Gruppen $[n, p, p]$ und $[n, p, p]_1$ können (31.) als Gegengruppen von $[n, n, n]$ benutzt werden, wenn wir die Curven $C^{(n+p).n}$ und $C_1^{(n+p).n}$ durch je zwei projectivische Curvenbüschel $n.n^{\text{ter}}$ und $p.n^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen wollen. Die beiden hierbei entstehenden Curvenbüschel von $[n, n, n]$ bezeichnen wir mit $B\,(C^{n.n})$ und $B_1\,(C^{n.n})$, die ihnen entsprechenden aber mit $B\,(C^{p.n})$ und $B_1\,(C^{p.n})$. Bei Erzeugung von $C^{(n+p).p}$ durch zwei projectivische Curvenbüschel $n.p^{\text{ter}}$ und $p.p^{\text{ter}}$ Ordnung können ferner die Punkte $[n, n, p]$ und $[p, p, p]$ als Gegengruppen benutzt werden; und weil $[n, p, p]$ und $[n, p, p]_1$ mit $[n, n; p]$ auf zwei F^n liegen, so können diese Gruppen mit $[p, p, p]$ durch zwei Curven $C^{p.p}$ verbunden werden. Wir können (16.) diese beiden $C^{p.p}$ mit den Curven der resp. Büschel $B(C^{p.n})$ und $B_1\,(C^{p.n})$ durch Flächen p^{ter} Ordnung verbinden, und erhalten so zwei Flächenbüschel $B\,(F^p)$ und $B_1\,(F^p)$, von welchen jene Curvenbüschel Schnitte sind und welche folglich auch zu den resp. Curvenbüscheln $B(C^{n.n})$ und $B_1\,(C^{n.n})$ projectivisch sein müssen. Die gemeinschaftlichen Elemente von diesen Curven- und jenen Flächenbüscheln gehen durch $[n, n, p]$ und entsprechen demnach einander; die Flächenbündel $[n, n, n]$ und $[p, p, p]$ sind folglich (28.) durch jene projectivischen Flächen- und Curvenbüschel reciprok auf einander bezogen und erzeugen (34.) eine F_1^{n+p}. Mit der gegebenen Fläche F^{n+p} hat F_1^{n+p} die Curven $C^{(n+p).n}$ und $C_1^{(n+p).n}$ sowie die Gruppe $[p, p, p]$ gemein, woraus folgt, dass beide Flächen zusammenfallen. Denn wenn $n > p$ ist, können $C^{(n+p).n}$ und $C_1^{(n+p).n}$ nur durch eine einzige F^{n+p} verbunden werden; ist aber $n = p$, so können sie mit einem ausser ihnen gelegenen Punkte, z. B. einem Punkte von $[p, p, p]$ durch nicht mehr als eine F^{n+p} verbunden werden (16.). Unser Satz (36.) ist somit bewiesen.

38. *Legen wir für $n > p$ durch eine auf der Fläche F^{n+p} gegebene $[n, n, n]$ beliebige $C^{n.n}$, und verbinden wir deren übrigen Schnittpunkte $[n, n, p]$ mit F^{n+p} unter einander durch je eine F^p, so bilden alle diese F^p einen Flächenbündel p^{ter} Ordnung, dessen Knotenpunkte*

$[p, p, p]$ auf F^{n+p} liegen; derselbe ist zum Bündel $[n, n, n]$ reciprok und erzeugt mit diesem die F^{n+p}. Es muss nämlich zu $[n, n, n]$ eine Gegengruppe $[p, p, p]$ auf F^{n+p} geben, und dieselbe kann mit jeder der genannten Gruppen $[n, n, p]$ durch eine F^p verbunden werden. Für $n > p$ kann aber durch jede $[n, n, p]$ nur eine einzige F^p gelegt werden, woraus der Satz folgt. — Ist z. B. für $n > 1$ auf einer F^{n+1} eine Gruppe $[n, n, n]$ gegeben, so schneidet jede durch $[n, n, n]$ gelegte $C^{n \cdot n}$ die Fläche in $n . n$ Punkten einer Ebene; alle so construirten Ebenen gehen durch einen Punkt $[1, 1, 1]$ der F^{n+1} und erzeugen mit dem Bündel $[n, n, n]$ diese Fläche (vgl. 19.).

39. *Ist auf einer F^{n+p} eine Gruppe $[n, n, n]$ gegeben, so können zu derselben unendlich viele Gegengruppen $[p, p, p]$ oder* (38.) *nur eine solche auf F^{n+p} construirt werden, je nachdem $n \leqq p$ oder $n > p$ ist. Von der Gegengruppe $[p, p, p]$ können nämlich $N(p-n) + 1$ Punkte willkürlich auf F^{n+p} angenommen werden.* Bestimmen wir auf F^{n+p} eine Gruppe $[n, n, p]$, welche mit $[n, n, n]$ auf einer $C^{n \cdot n}$ liegt, so kann diese $[n, n, p]$ mit der Gegengruppe $[p, p, p]$ durch eine F^p verbunden werden. Wir können dieselbe zunächst mit

$$N(p) - N\left(\frac{p}{n,n}\right)$$

beliebigen Punkten von F^{n+p} durch eine F^p verbinden, also auch durch eine auf F^{n+p} liegende $C^{(n+p) \cdot p}$. Diese wird von einer durch die $[n, n, p]$ gelegten F^n noch in einer Gruppe $[n, p, p]$ geschnitten; und verbinden wir diese $[n, p, p]$ mit

$$N\left(\frac{p}{p}\right) - N\left(\frac{p}{n,p}\right) = N(p-n) + 1$$

von den zuerst angenommenen

$$N(p) - N\left(\frac{p}{n,n}\right)$$

Punkten durch eine $C^{p \cdot p}$, so schneidet (35.) $C^{p \cdot p}$ die $C^{(n+p) \cdot p}$ in der gesuchten Gegengruppe $[p, p, p]$. Für $n \leqq p$ ist

$$N(p) - N\left(\frac{p}{n,n}\right) > N\left(\frac{p}{p}\right) - N\left(\frac{p}{n,p}\right),$$

und deshalb ist für $n \leqq p$ die Gegengruppe $[p, p, p]$ durch $N(p-n) + 1$ auf F^{n+p} angenommene Punkte noch nicht völlig bestimmt; denn die F^p, durch welche diese Gruppe mit $[n, n, p]$ verbunden werden kann, ist durch die $N(p-n) + 1$ Punkte nicht genügend bestimmt. Ist z. B. auf einer $F^{n+p} = F^{2+2} = F^4$ eine Gruppe $[2, 2, 2]$ gegeben, so kann von der Gegengruppe $[p, p, p] = [2, 2, 2]$ ein Punkt A willkürlich auf F^4 angenommen werden; die übrigen sieben Punkte derselben liegen auf einer $C^{2 \cdot 2}$, welche in A einen Doppelpunkt hat (s. diese Annalen Bd. I pag. 463), und einer von ihnen kann noch auf $C^{2 \cdot 2}$ willkürlich angenommen werden.

40. Die wichtige Aufgabe: *„Eine gegebene F^{n+p} durch zwei reciproke Flächenbündel n^{ter} und p^{ter} Ordnung zu erzeugen"*, ist durch die bisherigen Untersuchungen (36.) auf die folgende zurückgeführt: *„Auf „einer gegebenen F^{n+p} eine Gruppe $[n, n, n]$ zu construiren."* Da jeder Punkt als eine Gruppe $[1, 1, 1]$, d. h. als Schnittpunkt von drei Ebenen betrachtet werden kann, so haben wir ohne Weiteres den Satz: *Jede F^s kann durch zwei reciproke Flächenbündel erster und $s - 1^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden*, und zwar kann der Knotenpunkt des ersteren Bündels ganz beliebig auf F^s angenommen werden. Ebenso lässt sich leicht beweisen: *Jede F^s kann für $s > 2$ durch zwei reciproke Flächenbündel 2^{ter} und $s - 2^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden.* Denn man schneide die F^s durch eine F^2 in einer $C^{2 \cdot s}$, und ziehe an diese aus einem ausser ihr gelegenen Punkte vier Secanten, so schneiden letztere die $C^{2 \cdot s}$ und folglich auch die F^s in acht Punkten $[2, 2, 2]$. Dass für $s > 2$ vier solche Secanten existiren, ergiebt sich aus folgendem Satze, dessen Beweis ich übergehen darf: „An eine $C^{2 \cdot s}$ können aus einem „beliebigen ausserhalb gelegenen Punkte im Allgemeinen $s . (s - 1)$ „Secanten gezogen werden, welche auf einer Kegelfläche $s - 1^{\text{ter}}$ Ord-„nung liegen." Wir haben auf diese Art zwei verschiedene Constructionen der allgemeinen Fläche s^{ter} Ordnung mittelst reciproker Flächenbündel niederer Ordnung aufgestellt. Zugleich ergiebt sich (31.):

41. *Jede $C^{2 \cdot s}$ kann für $s > 2$ auf unzählig viele Arten durch zwei projectivische Curvenbüschel 2.2^{ter} und $2.(s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden.* — Die F^{p+n}, welche von zwei reciproken Flächenbündeln p^{ter} und n^{ter} Ordnung erzeugt wird, darf nur dann als die allgemeine Fläche $p + n^{\text{ter}}$ Ordnung betrachtet werden, wenn sich auf jeder beliebigen F^{p+n} eine Gruppe $[n, n, n]$ nachweisen lässt. Bis jetzt ist mir dieser Nachweis nicht gelungen. Jede F^{n+p}, welche eine $C^{n \cdot n}$ enthält, kann offenbar durch reciproke Flächenbündel n^{ter} und p^{ter} Ordnung erzeugt werden, noch einfacher jedoch auf folgende Art:

42. *Wenn eine F^{n+p} eine $C^{n \cdot n}$ enthält, so kann sie durch zwei projectivische Flächenbüschel n^{ter} und p^{ter} Ordnung erzeugt werden, von denen der erstere die $C^{n \cdot n}$ zur Knotenlinie hat*).* Nämlich F^{n+p} hat (9.) mit jeder durch $C^{n \cdot n}$ gelegten F^n noch eine $C^{n \cdot p}$ und mit einer durch $C^{n \cdot p}$ gelegten F^p noch eine $C^{p \cdot p}$ gemein; diese $C^{p \cdot p}$ aber kann als Knotenlinie des Flächenbüschels p^{ter} Ordnung gewählt werden. Zum Beweise nehmen wir $q > n + p$ und construiren eine beliebige F^q, welche von F^{n+p} in einer $C^{(n+p) \cdot q}$ und von $C^{n \cdot n}$ und $C^{p \cdot p}$ in den Gruppen $[n, n, q]$ und $[p, p, q]$ geschnitten wird. Die $C^{(n+p) \cdot q}$ kann

*) Diesen Satz hat zuerst Herr Chasles in den Comptes Rendus 1857, T. 45 pag. 1066 aufgestellt und auf andere Art bewiesen.

dann durch zwei projectivische Curvenbüschel $n.q^{\text{ter}}$ und $p.q^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden (31. und 32.), welche die Gruppen $[n, n, q]$ und $[p, p, q]$ zur Basis haben, und diese Curvenbüschel können (16.) mit $C^{n \cdot n}$ und $C^{p \cdot p}$ durch zwei Flächenbüschel n^{ter} und p^{ter} Ordnung verbunden werden, welche ebenfalls projectivisch sind. Je zwei homologe Flächen F^n, F^p dieser Büschel haben mit $C^{(n+p) \cdot q}$ ausser den resp. Gruppen $[n, n, q]$ und $[p, p, q]$ noch eine und dieselbe Gruppe $[n, p, q]$ gemein, durch welche wegen $q > n + p$ nur eine einzige $C^{n \cdot p}$ gelegt werden kann (15.), und diese $C^{n \cdot p}$ muss deshalb mit denjenigen drei $C^{n \cdot p}$ zusammenfallen, in welchen F^n und F^p einander und die F^{n+p} schneiden. Also wird F^{n+p} wirklich durch die beiden projectivischen Flächenbüschel erzeugt. — Wenn $n > p$ ist, so wird die Knotenlinie $C^{p \cdot p}$ auf F^{n+p} völlig bestimmt durch $C^{n \cdot n}$; ist aber $n \leq p$, so können von $C^{p \cdot p}$, wenn $C^{n \cdot n}$ gegeben ist, noch

$$N(p) - N\left(\frac{p}{n}\right) = N(p - n) + 1$$

Punkte willkürlich auf F^{n+p} angenommen werden. — *Die Gleichung einer F^{n+p}, welche eine $C^{n \cdot n}$ enthält, kann* (29.) *auf die Form:*

$$F_1^p \cdot F_2^n = F_2^p \cdot F_1^n$$

gebracht werden.

§ 4.

Anwendungen auf die Polarentheorie algebraischer Flächen und Curven.

43. Die erste Polare eines Punktes P in Bezug auf eine F^n ist bekanntlich eine F^{n-1}, welche durch alle Doppelpunkte von F^n hindurchgeht und mit F^n ausserdem alle Punkte gemein hat, deren Berührungsebenen durch P gehen. Die Berührungspunkte aller von P an F^n gezogenen Tangenten liegen demnach auf einer $C^{n \cdot (n-1)}$, wenn F^n keine Doppelcurve enthält. Beschreibt P eine Gerade g, so beschreibt F^{n-1} einen zu g projectivischen Flächenbüschel $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, dessen Knotenlinie $C^{(n-1) \cdot (n-1)}$ durch alle Doppelpunkte von F^n und durch diejenigen Punkte dieser Fläche hindurchgehen muss, deren Berührungsebenen die Gerade g enthalten. Man schliesst daraus: *An eine F^n ohne Doppelcurve können durch eine beliebige Gerade im Allgemeinen $n.(n-1).(n-1)$ Berührungsebenen gelegt werden, und deren Berührungspunkte bilden eine Gruppe $[n, n-1, n-1]$; durch jeden Doppelpunkt von F^n wird jedoch ihre Zahl um zwei erniedrigt*, indem in demselben zwei von den Punkten $[n, n-1, n-1]$ sich vereinigen. — Beschreibt F^n einen Flächenbüschel, so beschreibt die Polare F^{n-1} des Punktes P einen zu jenem Büschel projectivischen Flächenbüschel. Alle von P an die Flächen eines Büschels n^{ter} Ord-

nung gezogenen Tangenten berühren folglich diese Flächen in den Punkten einer F^{2n-1} (29.).

44. Von diesen bekannten Sätzen ausgehend können wir leicht einige wichtige Eigenschaften der $C^{p \cdot q}$ beweisen, die sich auch aus den Cayley-Plücker'schen Formeln, jedoch weniger anschaulich ableiten lassen*). Seien durch $C^{p \cdot q}$ die Flächen F^p und F^q gelegt und in Bezug auf diese die Polaren F^{p-1} und F^{q-1} eines beliebigen Punktes P construirt; dann schneiden sich letztere in einer $C^{(p-1) \cdot (q-1)}$, welche in gewisser Hinsicht als eine Polare von P in Bezug auf $C^{p \cdot q}$ betrachtet werden kann. *Wenn $C^{(p-1) \cdot (q-1)}$ mit $C^{p \cdot q}$ einen Punkt Q gemein hat, so ist die Gerade PQ eine Tangente von $C^{p \cdot q}$ im Punkte Q*; denn (43.) die Berührungsebenen von F^p und F^q im Punkte Q gehen beide durch P, und nur wenn Q ein Doppel- oder Rückkehrpunkt von $C^{p \cdot q}$ ist, kann der Satz leicht angebbare Ausnahmen erleiden. Wenn P eine Gerade g durchläuft, so beschreiben (43.) F^{p-1} und F^{q-1} zwei zu g projectivische Flächenbüschel und folglich (29.) $C^{(p-1) \cdot (q-1)}$ eine F^{p+q-2}, welche von $C^{p \cdot q}$ in einer Gruppe $[p, q, p+q-2]$ geschnitten wird. Die Tangenten dieser Punkte von $C^{p \cdot q}$ müssen nach dem Vorhergehenden die Gerade g schneiden; also: *Durch eine Gerade g können an eine $C^{p \cdot q}$ im Allgemeinen $p.q.(p+q-2)$ Berührungsebenen gelegt werden, und deren Berührungspunkte bilden eine Gruppe $[p, q, p+q-2]$, sind also bestimmt* (12.), *sobald* $p.q.\frac{p+q}{2}-1$ *von ihnen auf $C^{p \cdot q}$ bekannt sind; jeder Doppel- oder Rückkehrpunkt von $C^{p \cdot q}$ erniedrigt jedoch jene Zahl um zwei resp. drei Einheiten*, indem sich in ihm zwei resp. drei von den Punkten $[p, q, p+q-2]$ vereinigen. Wir können auch sagen: *Die abwickelbare Tangentenfläche einer $C^{p \cdot q}$ ist im Allgemeinen vom $p.q.(p+q-2)^{\text{ten}}$ Grade.*

45. Von F^{p-1} wird $C^{p \cdot q}$ in einer Gruppe $[p, q, p-1]$ von Punkten geschnitten, deren Verbindungslinien mit P die F^p berühren. Wenn also eine Gerade PQ sich so um P dreht, dass ein Punkt Q derselben die $C^{p \cdot q}$ beschreibt, so müssen ihre von Q verschiedenen Schnittpunkte mit F^p eine Curve beschreiben, welche die Gruppe $[p, q, p-1]$ enthält, ausserdem aber mit $C^{p \cdot q}$ die Schnittpunkte aller aus P an $C^{p \cdot q}$ gezogenen Secanten gemein hat. Da die Gerade PQ eine $F^{p \cdot q}$ beschreibt, so ist die genannte Curve eine $C^{p \cdot (pq-q)}$ (9.), welche mit $C^{p \cdot q}$ zusammen eine $C^{p \cdot pq}$ ausmacht und die C^{pq} in einer Punktengruppe $[p, q, pq-q]$ schneidet. Und weil diese Punktengruppe die vorhin erwähnte Gruppe $[p, q, p-1]$ enthält, so zerfällt

*) Vgl. Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, Deutsch von Fiedler, Bd. II. pag. 82.

sie in diese und eine Gruppe $[p, q, pq-q-p+1]$. Daraus folgt: *An eine $C^{p\cdot q}$ können aus einem beliebigen Punkte im Allgemeinen*

$$\frac{p\,.\,q\,.\,(p-1)\,.\,(q-1)}{2}$$

Secanten gezogen werden, und deren Schnittpunkte mit $C^{p\cdot q}$ bilden eine Gruppe $[p, q, pq-p-q+1]$. Jeder Doppelpunkt von $C^{p\cdot q}$ vermindert jedoch die Zahl der Secanten um eine Einheit; denn die durch ihn gelegten Geraden können, obgleich sie die Curve in zwei Punkten schneiden, nicht als Secanten von $C^{p\cdot q}$ betrachtet werden, weil diese Punkte zusammenfallen.

46. Die Tangenten einer Raumcurve sind als Grenzfälle der Secanten zu betrachten. Wenn wir aber den letzten Satz auf die $C^{n.(n-1)}$ anwenden wollen, in welcher die Berührungspunkte aller aus einem Punkte P an eine F^n gezogenen Tangenten liegen, so thun wir gut, die durch P gehenden Tangenten der $C^{n.(n-1)}$ von den eigentlichen Secanten zu trennen. Denn jene Tangenten osculiren offenbar die F^n dreipunktig, während jede durch P gehende Secante von $C^{n.(n-1)}$ die F^n in zwei verschiedenen Punkten berührt. Die Berührungspunkte jener osculirenden Tangenten finden wir, indem wir zu P die erste Polare F^{n-2} in Bezug auf F^{n-1} construiren und deren Schnittpunkte $[n, n-1, n-2]$ mit $C^{n.(n-1)}$ bestimmen. Daraus folgt: *An eine F können aus einem beliebigen Punkte P im Allgemeinen*

$$n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)$$

osculirende Tangenten gezogen werden, deren Osculationspunkte eine Gruppe $[n, n-1, n-2]$ ausmachen. Z. B. an eine F^3 können aus einem beliebigen Punkte im Allgemeinen sechs osculirende (oder Inflexions-)Tangenten gezogen werden, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.

47. An die $C^{n.(n-1)}$ können (45.) aus einem beliebigen Punkte im Allgemeinen

$$\frac{n\,.\,(n-1)\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)}{2}$$

Secanten gezogen werden, deren Schnittpunkte mit $C^{n.(n-1)}$ eine Gruppe $[n, n-1, n^2-3n+2]$ bilden. Ist nun P jener Punkt, so gehören zu jenen Secanten nicht weniger als $n.(n-1).(n-2)$ Tangenten von $C^{n.(n-1)}$ (46.). Die übrigen Secanten sind Doppeltangenten von F^n, und für diese ergiebt sich mit Berücksichtigung von (18.): *An eine F^n ohne Doppelcurve können aus einem beliebigen Punkte im Allgemeinen*

$$\frac{n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)}{2}$$

Doppeltangenten gezogen werden, und deren Berührungspunkte bilden

eine Gruppe $[n, n-1, n^2-5n+6]$. Z. B. an eine F^4 können 24 osculirende und 12 Doppeltangenten gezogen werden, deren 24 Berührungspunkte jedesmal auf einer $C^{2 \cdot 3}$ liegen.

§ 5.
Schlussbemerkungen.

48. Zum Schlusse hebe ich noch einige Aufgaben hervor, deren Lösung wünschenswerth sein dürfte. Schon im Laufe der Untersuchung hat sich uns die wichtige Frage aufgedrängt: *Kann auf der allgemeinen* F^{n+p} *eine Punktengruppe* $[n, n, n]$ *construirt werden?* Ich habe nur für $n = 1$ oder 2 und für $p = 1$ oder 2 eine bestimmte, und zwar bejahende Antwort geben können. Die analoge Frage für algebraische Curven ist meines Wissens sogar für ebene Curven noch nicht allgemein gelöst worden, obgleich man bei der projectivischen Erzeugung einer $C^{1 \cdot (n+p)}$ meistens von der Annahme einer Punktengruppe $[1, n, n]$ auf $C^{1 \cdot (n+p)}$ ausgeht, also die Frage ohne Weiteres bejaht. Ich glaube ein umfangreiches und bis jetzt kaum noch betretenes Gebiet der geometrischen Forschung zu bezeichnen, indem ich die allgemeinere Aufgabe aufwerfe: *Diejenigen Punktengruppen* $[p, q, r]$ *anzugeben, welche auf einer* F^n *oder* $C^{n \cdot n}$ *enthalten sind.*

49. Vielleicht muss der Lösung dieser Aufgabe eine genauere Untersuchung über die gegenseitige Lage der Punkte $[p, q, r]$ vorausgehen. Auch von den hierher gehörenden Fragen habe ich in der vorliegenden Arbeit nur wenige der wichtigeren beantworten können. Gar nicht berührt wurden die folgenden: *Wenn von den Punkten einer Gruppe* $[p, q, r]$ *irgend vier in einer Ebene, oder drei in einer Geraden, oder zehn auf einer* F^2 *oder neun auf einer* $C^{2 \cdot 2}$ *etc. liegen, welche gegenseitige Lage haben dann die übrigen?* Ohne Zweifel würde die Beantwortung dieser Fragen wesentliche Erweiterungen unserer geometrischen Kenntnisse enthalten und nicht wenig beitragen zur Schöpfung einer *Geometrie der Punktengruppen* $[p, q, r]$.

50. Wir haben oben (25.) den folgenden, hierher gehörigen Satz benutzt: *Wenn von den 16 Punkten einer Gruppe* $[1, 4, 4]$ *irgend drei in einer Geraden g liegen, so können durch die übrigen 13 Punkte doppelt unendlich viele* $C^{1 \cdot 4}$ *gelegt werden. Nämlich jede* $C^{1 \cdot 4}$, *welche durch 12 derselben hindurchgeht, enthält auch den 13ten Punkt, und je zwei solche* $C^{1 \cdot 4}$ *schneiden sich ausserdem in drei Punkten einer Geraden.* Da eine $C^{1 \cdot 4}$ durch 14 willkürlich angenommene Punkte der Ebene bestimmt ist, so müssen wir beweisen, dass jene 13 Punkte mit je *zwei* beliebigen Punkten P, Q durch eine $C^{1 \cdot 4}$ verbunden werden können, und dass alle durch die 13 Punkte und *einen* beliebigen Punkt P gehenden $C^{1 \cdot 4}$ sich noch in

zwei Punkten schneiden, die mit P in einer Geraden liegen. Zu dem Ende legen wir durch die Gruppe [1, 4, 4] zwei Curven $C^{1.4}$ und $C_1^{1.4}$, von denen die erstere durch P gehen möge. Die Gerade g wird von $C^{1.4}$ in drei von den Punkten [1, 4, 4] geschnitten und ausserdem in einem vierten Punkte A, welchen wir mit P durch eine Gerade g_1 verbinden. Diese g_1 bildet mit $C_1^{1.4}$ zusammen eine $C^{1.5}$, von welcher $C^{1.4}$ in einer Gruppe [1, 4, 5] geschnitten wird. Weil aber vier Punkte dieser Gruppe auf der Geraden g liegen, also eine Gruppe [1, 4, 1] bilden, so bilden die übrigen eine Gruppe [1, 4, 4], und die 13 Punkte, welche die letztere mit der ursprünglich gegebenen Gruppe [1, 4, 4] gemein hat, können folglich mit P durch einen Büschel von $C^{1.4}$ verbunden werden, von dessen Grundpunkten P mit zwei anderen auf der Geraden g_1 liegt. Eine Curve dieses Büschels geht durch Q und muss mit derjenigen zusammenfallen, welche 12 von den 13 Punkten mit den Punkten P *und* Q verbindet. *Auf* $C^{1.4}$ *giebt es unendlich viele Punktentripel, welche mit den 13 Punkten eine Gruppe* [1, 4, 4] *bilden; alle diese Tripel aber liegen in Geraden, welche sich in einem und demselben Punkte* A *von* $C^{1.4}$ *schneiden.*

51. Ganz analog lässt sich der folgende Satz beweisen: „Wenn „von den 18 Punkten [2, 3, 3] irgend vier in einer Ebene liegen, so „können durch die übrigen 14 doppelt unendlich viele $C^{2.3}$ gelegt „werden. Nämlich jede $C^{2.3}$, welche durch 13 derselben hindurch„geht, enthält auch den 14ten Punkt, und je zwei solche $C^{2.3}$ schnei„den sich ausserdem in vier Punkten einer Ebene. Auf jeder solchen „$C^{2.3}$ giebt es unendlich viele Punktenquadrupel, welche mit den 14 „Punkten eine Gruppe [2, 3, 3] bilden; alle diese Quadrupel aber lie„gen in Ebenen, welche sich in einer Secante der $C^{2.3}$ schneiden.“

52. Ich brauche wohl kaum zu erwähnen, dass alle Aufgaben und Sätze aus der Geometrie der Punktengruppen $[p, q, r]$ mit gewissen algebraischen parallel laufen. So ergiebt sich aus (21.) und (22.): *Wenn drei Gleichungen mit drei Unbekannten vom Grade* p, q *und* r *gegeben sind, und eine vierte Gleichung vom Grade* n *aufgestellt werden soll, welche durch die* $p.q.r$ *Auflösungen der drei ersteren befriedigt wird, so erhält man zwischen den Coefficienten dieser vierten Gleichung nicht* $p.q.r$, *sondern nur*

$$N\left(\frac{n}{p,q,r}\right)+1$$

von einander unabhängige Relationen, so lange $n < p+q+r-3$ *ist.* Die Zahl

$$N\left(\frac{n}{p,q,r}\right)+1$$

ist zu berechnen aus der Gleichung:

$$N\left(\frac{n}{p,q,r}\right)+1=N(n)-N(n-p)-N(n-q)-N(n-r)$$
$$+N(n-q-r)+N(n-r-p)+N(n-p-q)$$
$$-N(n-p-q-r),$$

in welcher allgemein zu setzen ist:

$$N(k)=\frac{(k+1)\,.\,(k+2)\,.\,(k+3)}{2\,.\,3}-1 \text{ für } k\geqq 0 \text{ und } N(k)=-1 \text{ für } k<0.$$

Die Zahlen

$$N\left(\frac{n}{p,q,r}\right)+1$$

folgen also einem ziemlich verwickelten Gesetze, obgleich sie in jedem concreten Falle leicht zu berechnen sind.

53. Ebenso ergiebt sich aus (25.): *Wenn drei Gleichungen mit drei Unbekannten vom Grade n, p und q gegeben sind und irgend*

$$N\left(\frac{n}{p,q,r}\right)+1$$

von ihren $n\,.\,p\,.\,q$ Auflösungen einer Gleichung r^{ten} Grades genügen, so kann für $n>r$ die Gleichung n^{ten} Grades durch zwei Gleichungen r^{ten} und $n-r^{\text{ten}}$ Grades ersetzt werden, welche mit den Gleichungen p^{ten} und q^{ten} Grades dieselben $n\,.\,p\,.\,q$ Auflösungen liefern wie die Gleichung n^{ten} Grades. Nur müssen die Relationen, welche durch die

$$N\left(\frac{n}{p,q,r}\right)+1$$

Auflösungen zwischen den Coefficienten der Gleichung n^{ten} Grades hergestellt werden, von einander unabhängig sein, damit keine Ausnahmen eintreten.

Zürich, den 23. August 1869.

Abbildung der Flächen zweiten Grades nach Aehnlichkeit der Flächenelemente.

Von R. Hoppe in Berlin.

Die Aufgabe, eine Fläche auf einer andern nach Aehnlichkeit der Elemente abzubilden, ist selbstverständlich gelöst, sobald man jede derselben allgemein auf einer Ebene abbilden kann, und letztere Aufgabe wiederum, wie Gauss gezeigt hat, sobald eine specielle Abbildung bekannt ist. Sind x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punkts der gegebenen Fläche, und u, v die rechtwinkligen Coordinaten von dessen Abbildung in der Ebene, so sind alle Abbildungen desselben in der Ebene (u_1, v_1) ausgedrückt durch die Relation

$$u_1 + iv_1 = f(u + iv).$$

Von der disponibeln Function f will ich hier nur soweit Gebrauch machen, um die ganze zusammenhängende Fläche ohne Zerreissung oder Deckung der Theile mit durchgehender Stetigkeit des Dimensionsverhältnisses (abgesehen von unvermeidlichen Ausnahmen am Umfang des Bildes einer geschlossenen Fläche) darzustellen.

Die Flächen zweiten Grades haben, und zwar mit Ausnahme von Rotations- und abwickelbaren Flächen ausschliesslich, die Eigenschaft, dass den Bedingungen der Abbildung genügt werden kann, indem man jede Coordinate x, y, z zu einem Product einer Function von u und einer Function von v macht.

Jede centrale Fläche zweiten Grades lässt sich in der Form darstellen:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \alpha_1 \, (\alpha - m) \, (n - \alpha) \\ y^2 &= \beta_1 \, (\beta - m) \, (n - \beta) \\ z^2 &= \gamma_1 \, (\gamma - m) \, (n - \gamma). \end{aligned} \right.$$

Hier möge nun m Function von u, und n von v sein. Die Bedingung der Erhaltung der rechten Winkel, nämlich

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

kommt dann auf die Relation zurück:

$$(2) \qquad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0.$$

Die Bedingung der Proportionalität der Dimensionen, nämlich

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial u^2} = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial v^2} = w^2$$

giebt folgende Gleichung:

$$\left\{\alpha_1 \frac{n-\alpha}{\alpha - m} + \beta_1 \frac{n-\beta}{\beta - m} + \gamma_1 \frac{n-\gamma}{\gamma - m}\right\} \left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)^2 =$$
$$\left\{\alpha_1 \frac{\alpha - m}{n-\alpha} + \beta_1 \frac{\beta - m}{n-\beta} + \gamma_1 \frac{\gamma - m}{n-\gamma}\right\} \left(\frac{\partial n}{\partial v}\right)^2 = w^2.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} G &= \alpha_1\beta\gamma + \beta_1\gamma\alpha + \gamma_1\alpha\beta \\ H &= \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma \\ M &= (\alpha - m)(\beta - m)(\gamma - m) \\ N &= (n-\alpha)(n-\beta)(n-\gamma), \end{aligned}$$

so lautet sie, mit Berücksichtigung von Gleichung (2):

$$\frac{G + Hm}{M}(n-m)\left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)^2 = \frac{G + Hn}{N}(n-m)\left(\frac{\partial n}{\partial v}\right)^2 = w^2$$

und lässt sich durch $G = 0$ oder $H = 0$ erfüllen. Für $H = 0$ wird $x^2 + y^2 + z^2$ constant, ein Fall, den wir bei Seite lassen. Aus $G = 0$ und der Gleichung (2) folgt

$$k\alpha_1 = \alpha(\beta - \gamma)\ ;\ k\beta_1 = \beta(\gamma - \alpha)\ ;\ k\gamma_1 = \gamma(\alpha - \beta).$$

Die Gleichungen (1) lassen sich jetzt mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

identificiren, indem man setzt

$$\alpha = a\ ;\ \beta = b\ ;\ \gamma = c$$
$$k = (b-c)(c-a)(a-b).$$

Die so gewonnene specielle Abbildung der hierzu gehörigen Fläche auf der Ebene ist demnach ausgedrückt durch

$$x^2 = a\,\frac{a-m}{a-b}\,\frac{n-a}{c-a}\ ;\ y^2 = b\,\frac{b-m}{b-c}\,\frac{n-b}{a-b}\ ;\ z^2 = c\,\frac{c-m}{c-a}\,\frac{n-c}{b-c}$$

$$u = \tfrac{1}{2}\int \partial m \sqrt{\frac{-m}{(a-m)(b-m)(c-m)}}\ ;\ v = \tfrac{1}{2}\int \partial n \sqrt{\frac{-n}{(n-a)(n-b)(n-c)}}$$

$$w = \sqrt{n-m}.$$

Bemerkenswerth ist die Beziehung zwischen den Parametern m, n und den Hauptkrümmungsradien der Fläche ϱ_1, ϱ_2. Es ist nämlich:

$$\varrho_1 = m\sqrt{\frac{mn}{abc}}\quad ;\quad \varrho_2 = n\sqrt{\frac{mn}{abc}},$$

woraus sogleich erhellt, dass w nur in den Nabelpunkten verschwinden und nur in unendlich entfernten Punkten unendlich gross werden

kann. Ausserdem erkennt man daran die unveränderlichen Vorzeichen von m und n in jeder Form der Fläche.

Jede solche Abbildung umfasst erst einen Octanten der Fläche. Die Zusammenstellung der Octanten lässt sich an den verschiedenen Flächenformen nur einzeln vornehmen.

Beim *Ellipsoid*, wo

$$a > b > c > 0,$$

ist das Bild des Octanten ein Rechteck $ABCN$, dessen Ecken in gleicher Reihenfolge den drei Scheiteln $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$ und dem Nabelpunkt entsprechen. Wenn m von c bis b variirt, bewegt sich eine Gerade von BA parallel nach CN, und wenn n von b bis a variirt, von AN nach BC.

Wir setzen nun die Octanten zu einem Rechteck zusammen, von dem ein Paar Gegenseiten $AN'ANA$ und $A'N_1'A'N_1A'$ die Seite BC viermal, das andere Paar $AB'A'$ die Seite AB zweimal enthält. Die Punkte A', B', C' entsprechen dann den Gegenscheiteln von A, B, C, die Punkte N, N', N_1, N_1' den Nabelpunkten, und die Parallele $B'C'BCB'$ mitten zwischen dem erstern Paare dem Hauptschnitte in der yz Ebene.

Hier sind die Theile der Fläche noch in doppelter Weise von einander getrennt. Der halbe Hauptschnitt $AB'A'$ bildet zwei Gegenseiten. Ausserdem ist die Fläche in den zwei Normalbogen NAN' und $N_1A'N_1'$ aufgeschlitzt, und jeder von ihnen in zwei Gerade verwandelt, welche von den Nabelpunkten aus nach entgegengesetzten Richtungen gehen.

Zunächst ist es nöthig, durch Einführung periodischer Functionen die Ausdrücke der Coordinaten auf die ganze Figur auszudehnen. Zur Abkürzung sei für einen Modul q

$$\alpha = \frac{\mathrm{H}\frac{\pi}{2}}{\mathrm{H}\left(h+\frac{\pi}{2}\right)}\ ;\quad \beta = \frac{\Theta\frac{\pi}{2}}{\Theta\left(h+\frac{\pi}{2}\right)};\quad \gamma = \frac{\Theta 0}{\Theta h}$$

$$\Delta = \alpha\beta\gamma\sqrt{\left\{\Theta(s+h)\,\Theta(s-h)\,\mathrm{H}\left(h+it+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{H}\left(h-it+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}$$

$$\tau = -\log q\ ;\ f = \frac{\mathrm{H}'h}{\mathrm{H}h}\ ;\ g = h + \tfrac{1}{2}f\tau.$$

Der Modul und der Parameter h sollen durch die Proportionen

$$\alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2 = a : b : c$$

bestimmt sein. Setzt man dann

$$1 - \frac{c}{m} = \left(\frac{\mathrm{H}h\,\mathrm{H}s}{\Theta h\,\Theta s}\right)^2 ;\ 1 - \frac{c}{n} = \left\{\frac{\mathrm{H}h\,\Theta\left(it+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta h\,\mathrm{H}\left(it+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}^2,$$

so wird

$$x = \alpha \sqrt{a}\, \frac{\Theta\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{\Delta} \cdot \frac{\mathrm{H}(it)}{i}$$

$$y = \beta \sqrt{b}\, \frac{\mathrm{H}\left(s + \frac{\pi}{2}\right)\Theta(it)}{\Delta}$$

$$z = \gamma \sqrt{c}\, \frac{\mathrm{H}s\,\Theta\left(it + \frac{\pi}{2}\right)}{\Delta}$$

$$u = fs + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(s-h)}{\Theta(s+h)}$$

$$v = -ft + \frac{i}{2} \log \frac{\mathrm{H}\left(h - it + \frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(h + it + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Im Umfange der Abbildung variirt dann s von $-\pi$ bis π, und t von $-\frac{1}{2}\tau$ bis $\frac{1}{2}\tau$; daher u von $-f\pi$ bis $f\pi$, und v von g bis $-g$.

Eine neue Abbildung soll nun die getrennten Theile wieder nach ihrem ursprünglichen Angrenzen vereinigen, so dass nur der Schlitz von N_1' über A' nach N_1 offen bleibt und den Umfang bildet. Setzt man

$$u_1 + iv_1 = 1 - \sin \frac{u + i(v+g)}{f}, \tag{3}$$

so wird das Rechteck derart verschoben, dass die Gerade $N'AN$ unverändert bleibt, die Winkel $A'AN'$ und $A'AN$ um die Drehpunkte N' und N eine halbe Umdrehung machen, die Schenkel $N'A$ und NA wieder das Mittelstück der Seite AA, die beiden andern Schenkel AA' einander decken, und die Seite $A'A'$ zu einer geschlossenen Curve wird, welche die Abbildung in sich fasst. Es zeigt sich, dass diese Curve eine *Ellipse* ist. Denn, setzt man $v = g$, so erhält man nach Elimination von u zwischen der Doppelgleichung (3):

$$\left(\frac{1-u_1}{\cos \frac{2ig}{f}}\right)^2 + \left(\frac{iv_1}{\sin \frac{2ig}{f}}\right)^2 = 1.$$

Das Dimensionsverhältniss für die neue Abbildung ist

$$w = f \sqrt{\frac{n-m}{\cos \frac{u + i(v+g)}{f} \cos \frac{u - i(v+g)}{f}}}.$$

Der Nenner des Bruchs verschwindet nur, wenn gleichzeitig

$$\cos \frac{u}{f} = 0 \;\; ; \;\; v + g = 0$$

ist, d. i. in N und N', der Zähler in allen vier Nabelpunkten. Dem-

nach bleiben, entsprechend N_1 und N_1', auf der Umgrenzung zwei Punkte

$$u_1 = 1 \pm \cos\frac{2ig}{f} \;;\; v_1 = 0$$

übrig, in denen $w = 0$ ist. Zur Ermittelung des Werthes von w in N und N' sei

$$m = b - m'^2 \;;\; n = b + n'^2$$

gesetzt, wo m' und n' als unendlich klein nur in niedrigster Potenz in Rechnung kommen mögen. Dann wird

$$\frac{\partial u}{\partial m} = \frac{1}{2km'} \;;\; \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2kn'} \;;\; k = \sqrt{\frac{(a-b)(b-c)}{b}}$$

also

$$u = \pm \tfrac{1}{2} f\pi - \frac{m'}{k} \;;\; v = -g + \frac{n'}{k}$$

und der Nenner geht über in

$$\sin\frac{m'-in'}{fk}\sin\frac{m'+in'}{fk} = \frac{m'^2+n'^2}{f^2k^2} = \frac{n-m}{f^2k^2}.$$

Demnach ist in den Abbildungen der Nabelpunkte N und N'

$$w = f^2k = f^2\sqrt{\frac{(a-b)(b-c)}{b}}.$$

Dieselben haben die Coordinaten $u_1 = 0$ und 2 und $v_1 = 0$ und sind die Brennpunkte der umgrenzenden Ellipse.

Beim *einschaligen Hyperboloid*, wo

$$a > b > 0 > c,$$

variirt innerhalb des Octanten m von $-\infty$ bis c, n von b bis a. Die Abbildung ist enthalten zwischen einer Geraden AB entsprechend dem Quadranten des elliptischen Hauptschnitts und zwei unbegrenzten Lothen AD, BE, welche die zwei hyperbolischen Hauptschnitte darstellen. Verlängert man AB und zieht in gleichem Abstande fünf Lothe, unbegrenzt nach beiden Seiten, so stellen die acht, durch die Basis $A'B'ABA'$ begrenzten Parallelräume die Octanten der Fläche, die Basis den ganzen elliptischen Hauptschnitt dar.

Bei Einführung der periodischen Functionen hat man zu setzen

$$\alpha = \frac{\Theta\frac{\pi}{2}}{\mathrm{H}h} \;;\; \beta = \frac{\mathrm{H}\frac{\pi}{2}}{\Theta h} \;;\; \gamma = \frac{\Theta 0}{\mathrm{H}\left(h+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Delta = \alpha\beta\gamma\sqrt{\left\{\mathrm{H}\left(s+h+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{H}\left(s-h+\frac{\pi}{2}\right)\Theta(h+it)\,\Theta(h-it)\right\}},$$

$$f = \frac{\mathrm{H}'\left(h+\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(h+\frac{\pi}{2}\right)} \;;\; g = \frac{2h-f\tau}{\pi}$$

$$\alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2 = a : b : -c$$

$$1 - \frac{b}{m} = \left\{\frac{\Theta\left(h + \frac{\pi}{2}\right)\Theta\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{\Theta h \qquad \Theta s}\right\}^2$$

$$1 - \frac{b}{n} = \left\{\frac{\Theta\left(h + \frac{\pi}{2}\right)}{\Theta h} \quad \frac{\mathrm{H}(it)}{i\mathrm{H}\left(it + \frac{\pi}{2}\right)}\right\}^2,$$

dann findet man:

$$x = \alpha\sqrt{a}\,\frac{\mathrm{H}\left(s + \frac{\pi}{2}\right)\Theta(it)}{\Delta},$$

$$y = \beta\sqrt{b}\,\frac{\Theta\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{\Delta}\,\frac{\mathrm{H}(it)}{i},$$

$$z = \gamma\sqrt{-c}\,\frac{\mathrm{H}s\,\Theta\left(it + \frac{\pi}{2}\right)}{\Delta},$$

$$u = fs + \tfrac{1}{2}\log\frac{\mathrm{H}\left(s - h + \frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(s + h + \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$v = -ft + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(h + it)}{\Theta(h - it)},$$

und zwar wird die ganze Fläche erzeugt, wenn

$$s \text{ von } h - \frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{\pi}{2} - h,$$

und t von $-\tau$ bis τ variirt. Gleichzeitig variirt u von $-\infty$ bis ∞, und v von $-g\pi$ bis $g\pi$.

Eine neue Abbildung hat hier blos die Geraden $t = \tau$ und $t = -\tau$, entsprechend dem halben Hauptschnitt ($y = 0$, $x < 0$) wieder zur Deckung zu bringen. Dies geschieht durch die Substitution

$$u_1 + iv_1 = e^{\frac{u + iv}{g}}.$$

Die fünf Lothe gehen dann in vier Radien über; den elliptischen Hauptschnitt stellt ein Kreis dar, welcher die Abbildungen der Hyperboloidhälften ($z > 0$) und ($z < 0$) beziehungsweise von innen und von aussen begrenzt. Erstere behält ihre natürliche unendliche Ausdehnung; letztere schwindet bei $z = -\infty$ in den Mittelpunkt zusammen. Das Dimensionsverhältniss ist schon bei erster Abbildung durchweg endlich für endliche Punkte, und bleibt es bei der zweiten.

Beim *zweischaligen Hyperboloid*, wo

$$a > 0 > b > c,$$

variirt innerhalb des Octanten m von $-\infty$ bis c, und n von c bis b.

Das Bild des Octanten ist der nach einer Seite hin unbegrenzte Parallelraum $DANE$, wo A den Scheitel, N den Nabelpunkt darstellt. Die Abbildung einer ganzen Schale erhält man, indem man vier solche Figuren um A herum legt. Die Fläche zeigt sich dann von beiden Nabelpunkten an längs dem Schnitt $z = 0$ in positiver Richtung der x aufgeschlitzt, und die Grenzlinie nach beiden Seiten hin um einen Rechten gedreht.

Man hat zu setzen:

$$\alpha = \frac{\Theta 0}{\mathrm{H}\left(h + \frac{\pi}{2}\right)} \; ; \; \beta = \frac{\mathrm{H}\frac{\pi}{2}}{\Theta h} \; ; \; \gamma = \frac{\Theta\frac{\pi}{2}}{\mathrm{H}h},$$

$$\Delta = \alpha\beta\gamma \sqrt{\left\{\mathrm{H}(h+s)\,\mathrm{H}(h-s)\,\Theta(h+it)\,\Theta(h-it)\right\}}$$

$$f = \frac{\Theta'\left(h + \frac{\pi}{2}\right)}{\Theta\left(h + \frac{\pi}{2}\right)} \; ; \; g = 1 - \frac{2h + f\tau}{\pi},$$

$$\alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2 = a : -b : -c,$$

$$1 - \frac{b}{m} = \left\{\frac{\Theta\left(h + \frac{\pi}{2}\right)\,\Theta\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{\Theta h \qquad \Theta s}\right\}^2$$

$$1 - \frac{b}{n} = \left\{\frac{\Theta\left(h + \frac{\pi}{2}\right)}{\Theta h} \; \frac{\mathrm{H}(it)}{i\mathrm{H}\left(it + \frac{\pi}{2}\right)}\right\}^2,$$

und erhält:

$$x = \alpha\sqrt{a}\,\frac{\mathrm{H}\left(s + \frac{\pi}{2}\right)\Theta\left(it + \frac{\pi}{2}\right)}{\Delta},$$

$$y = \beta\sqrt{-b}\,\frac{\Theta s}{\Delta}\,\frac{\mathrm{H}(it)}{i}$$

$$z = \gamma\sqrt{-c}\,\frac{\mathrm{H}s\,\Theta(it)}{\Delta},$$

$$u = fs + \tfrac{1}{2}\log\frac{\mathrm{H}(h-s)}{\mathrm{H}(h+s)},$$

$$v = -ft + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(h-it)}{\Theta(h+it)},$$

wo zur Erzeugung der ganzen Schale s von $-h$ bis h, und t von $-\frac{1}{2}\tau$ bis $\frac{1}{2}\tau$ variiren muss. Gleichzeitig variirt u von $-\infty$ bis ∞, und v von $-\frac{1}{2}g\pi$ bis $\frac{1}{2}g\pi$.

Durch neue Abbildung gemäss der Substitution

$$u_1 + iv_1 = \sin\frac{u + iv}{ig}$$

werden die Schlitze wieder geschlossen, und die Anordnung der Theile der Figur wird die ursprüngliche. Das Dimensionsverhältniss ist jetzt

$$w = g\sqrt{\frac{n-m}{\cos\frac{u+iv}{ig}\cos\frac{u-iv}{ig}}}.$$

Der Nenner verschwindet in beiden Nabelpunkten, d. i. für

$$u = 0\ ;\ \cos\frac{v}{g} = 0\,,$$

wo $m = n = c$ wird. Als Grenzwerth ergiebt die völlig analoge Rechnung wie beim Ellipsoid:

$$w = g^2\sqrt{\frac{(a-c)\,(b-c)}{-c}}.$$

Zur Uebertragung der Lösung auf *Paraboloide* hat man:

$$\frac{x}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\,,\ \frac{y}{\sqrt{a}}\,,\ \frac{z}{\sqrt{a}}\,,\ \frac{u}{\sqrt{a}}\,,\ \frac{v}{\sqrt{a}}\,,\ \frac{\varrho_1}{\sqrt{a}}\,,\ \frac{\varrho_2}{\sqrt{a}}$$

für $x, y, z, u, v, \varrho_1, \varrho_2$ zu substituiren und $a = \infty$ zu setzen. Dann kommt:

$$2x = \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\,,$$

$$x = \frac{m+n-b-c}{2}\,,$$

$$y^2 = \frac{b}{b-c}\,(b-m)\,(n-b)\,,$$

$$z^2 = \frac{c}{b-c}\,(m-c)\,(n-c)\,,$$

$$u = \tfrac{1}{2}\int \partial m\sqrt{\frac{m}{(b-m)\,(m-c)}}\,,$$

$$v = \tfrac{1}{2}\int \partial n\sqrt{\frac{n}{(n-b)\,(n-c)}}\,,$$

$$w = \sqrt{n-m}\,,$$

$$\varrho_1 = m\sqrt{\frac{mn}{bc}}\ ;\quad \varrho_2 = n\sqrt{\frac{mn}{bc}}\,.$$

Beim *elliptischen Paraboloid*, wo

$$b > c > 0,$$

variirt innerhalb des Quadranten m von b bis c, und n von b bis ∞. Die Integrale u, v werden hier reine elliptische Functionen zweiter Gattung; der conjugirte Modul

$$= \sqrt{\frac{b}{c}}\,.$$

Man setze:

$$b : c = \Theta'\frac{\pi}{2} : \Theta'0,$$

$$m = \sqrt{bc} \left\{\frac{\Theta s}{\Theta\left(s+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}^2; \; n = \sqrt{bc} \left\{\frac{\Theta\left(it+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta(it)}\right\}^2$$

$$f = \sqrt{c} \, \frac{\mathrm{H}'' \frac{\pi}{2}}{\Theta^2 0 \;\; \mathrm{H} \frac{\pi}{2}};$$

dann ergiebt sich:

$$y = b \, \frac{\mathrm{H}\left(s+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta\left(s+\frac{\pi}{2}\right)} \, \frac{\mathrm{H}(it)}{i\,\Theta(it)}; \quad z = c \quad \frac{\mathrm{H}s\mathrm{H}\left(it+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta\left(s+\frac{\pi}{2}\right)\Theta(it)},$$

$$u = fs - \sqrt{c} \, \frac{\Theta'\left(s+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta^2 0 \;\; \Theta\left(s+\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$v = -ft + \sqrt{c} \, \frac{\Theta'(it)}{i\,\Theta(it)\,\Theta^2 0}.$$

Lässt man s von $-\pi$ bis π und t von 0 bis $\frac{1}{2}\tau$ variiren, so wird der nach einer Seite hin unbegrenzte, nach der andern durch eine senkrecht schneidende Gerade geschlossene Flächenraum zwischen zwei Parallelen erzeugt, welcher alle vier Quadranten neben einander darstellt. Die Gerade ist die Abbildung des Normalbogens von einem Nabelpunkt zum andern, längs welchem die Fläche auseinander gerissen ist. Um die Theile wieder zu vereinigen, setzen wir

$$u_1 + iv_1 = \sin \frac{u+iv}{f},$$

dann fallen die begrenzenden Parallelen wieder zusammen, der Schlitz schliesst sich, und die Anordnung ist die ursprüngliche. Im Nabelpunkt wird

$$w = f^2 \sqrt{\frac{b-c}{b}}.$$

Beim *hyperbolischen Paraboloid*, wo

$$b > 0 > c,$$

variirt innerhalb des Quadranten m von $-\infty$ bis c, und n von b bis ∞. Setzt man

$$b : -c = \mathrm{H}^4 \frac{\pi}{2} : \Theta^4 0,$$

$$-m = \sqrt{-bc} \left\{\frac{\Theta s}{\mathrm{H}\left(s+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}^2; \; n = \sqrt{-bc} \left\{\frac{\mathrm{H}\left(it+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta(it)}\right\}^2,$$

$$f = \sqrt{-c} \, \frac{\Theta'' \frac{\pi}{2}}{\Theta^2 0 \;\; \Theta \frac{\pi}{2}},$$

so wird

$$y = b\,\frac{\Theta\left(s+\frac{\pi}{2}\right)}{\mathsf{H}\left(s+\frac{\pi}{2}\right)}\,\frac{\mathsf{H}(it)}{i\Theta(it)},$$

$$z = -\,c\,\frac{\mathsf{H}s}{\mathsf{H}\left(s+\frac{\pi}{2}\right)}\,\frac{\Theta\left(it+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta(it)}$$

$$u = fs - \sqrt{-c}\,\frac{\mathsf{H}'\left(s+\frac{\pi}{2}\right)}{\mathsf{H}\left(s+\frac{\pi}{2}\right)\,\Theta^2 0},$$

$$v = -ft + \sqrt{-c}\,\frac{\Theta'(it)}{i\Theta(it)\,\Theta^2 0}.$$

Variirt hier s von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$, und t von $-\frac{1}{2}\tau$ bis $\frac{1}{2}\tau$, so wird die ganze Fläche erzeugt, und die Abbildung liegt ohne Unterbrechung und ohne Unstetigkeit des Dimensionsverhältnisses so um den Scheitel herum, dass die Hauptschnitte sich als zwei rechtwinklig schneidende Gerade darstellen.

Berlin, den 13. November 1869.

Zur Theorie des Potentiales.

Von Carl Neumann in Leipzig.

Es mag die Existenz einer Materie angenommen werden, welche in beliebiger Weise in der *Ebene* ausgebreitet werden kann, und von solcher Beschaffenheit ist, dass die Wirkung zweier Massenpunkte auf einander proportional ist mit dem Product der Massen und umgekehrt proportional mit ihrer gegenseitigen Entfernung. Für diese Materie werden alsdann folgende Sätze gelten:

I. Ist eine gegebene Masse m längs einer Kreisperipherie in solcher Weise vertheilt, dass ihre Dichtigkeit umgekehrt proportional ist mit den Quadraten der von irgend einem *innern* Punkte J nach der Kreisperipherie gezogenen Strahlen, so wird die Wirkung dieser Kreisbelegung auf *äussere* Punkte genau dieselbe sein, als wäre die gegebene Masse m concentrirt im Punkte J.

II. Ist andrerseits die Masse m längs der Kreisperipherie der Art vertheilt, dass ihre Dichtigkeit umgekehrt proportional ist mit den Quadraten der von irgend einem *äussern* Punkte A nach der Kreisperipherie gezogenen Strahlen, so wird die Wirkung dieser Belegung auf *innere* Punkte genau dieselbe sein, als wäre im Punkte A eine Masse concentrirt, deren Grösse $= m \frac{\log a}{\log r}$ ist. Dabei soll unter r der Radius des Kreises, und unter a die Entfernung des Punktes A vom Mittelpunkte des Kreises verstanden werden.

Analoge Sätze gelten übrigens auch für den *Raum*, sobald man nur statt des hier supponirten Anziehungsgesetzes das Newton'sche Gesetz, und statt der Kreisperipherie eine Kugelfläche nimmt. Schon vor längerer Zeit sind diese analogen Sätze des Raumes von mir publicirt worden, [in einer separat erschienenen Schrift: Ueber den stat. Temp.-Zust. einer homog. Kugel. Halle. 1861.]. Es mag daher nur noch bemerkt werden, dass die eben mitgetheilten Sätze I. und II. in die analogen Sätze des Raumes unmittelbar übergehen, sobald man nur die *Quadrate* der von J oder A ausgehenden Strahlen mit den *Cuben* derselben, und gleichzeitig $\frac{\log a}{\log r}$ mit $\frac{r}{a}$ vertauscht.

Analoge Sätze endlich, wie für *Ebene* und *Raum*, existiren auch für eine n^{fach} *ausgedehnte Mannigfaltigkeit.* Auf eine nähere Angabe derselben muss indessen hier, aus Mangel an Raum, verzichtet werden.

Zur Theorie der ebenen Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten.

Von J. C. F. Haase in München.

In der vorliegenden Abhandlung ist ein Gegenstand berührt, dem zuerst Herr **Salmon** in seiner „*Treatise on the higher plane curves*“ (p. 94) seine Aufmerksamkeit gewidmet und den sodann Herr **Clebsch** im 64. Bande des Crelle'schen Journals (pag. 43) eingehender untersucht hat. Derselbe betrifft diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines variabeln Parameters darstellen lassen. Während in der Arbeit des Herrn **Salmon** dieser Parameter eben *nur* Parameter ist, verliert er in der Arbeit des Herrn **Clebsch** diesen Charakter schon zum grossen Theil und wird mehr zur wirklichen Variabeln. Die vorliegende Arbeit sieht in demselben, wenn ich so sagen darf, mehr eine krummlinige Coordinate, die insbesondere ein Mittel an die Hand giebt, die Begriffe der synthetischen Geometrie analytisch zu verwerthen, wie diess in ähnlicher Weise für Kegelschnitte von Herrn **Hesse** in seinen „Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie“ *) (p. 35) geschehen ist.

Die drei ersten Paragraphen enthalten eigentlich nichts Neues, sie sind zum grössten Theil eine Wiederholung der von Hrn. **Clebsch** in der ersten Hälfte der oben citirten Abhandlung vorgeführten Thatsachen, mit dem Unterschiede jedoch, dass die von mir gegebenen Beweise mehr *synthetisch*-analytisch sind. Die folgenden Paragraphen tragen ganz den Stempel rein geometrischer Untersuchungen. Als Hauptresultate haben sich dabei ergeben, dass sich alle Curven n^{ter} Ordnung mit

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Doppel- und Rückkehrpunkten unter gewissen, allerdings sehr beschrän-

---

*) Leipzig. Teubner 1866.

kenden Voraussetzungen, linear construiren lassen, sowie, dass, wenn man solche Curven mit Hülfe zweier ähnlicher Curven von möglichst niedriger Classe construirt, die eine derselben unzweideutig bestimmt ist, ein Umstand, auf welchen eine Eintheilung dieser Curven gegründet werden kann.

§ 1.

Darstellung dieser Curven.

Es seien in homogenen Liniencoordinaten u, v, w die Gleichungen zweier Punkte gegeben:

$$A_0 \equiv a_0\, u + b_0\, v + c_0\, w = 0 \tag{0}$$

$$A_1 \equiv a_1\, u + b_1\, v + c_1\, w = 0, \tag{1}$$

alsdann stellt bekanntlich die Gleichung

$$A_0 + \lambda A_1 = 0 \tag{2}$$

einen Punkt auf der Verbindungsgeraden der Punkte 0 und 1 dar, dessen Lage einzig und allein durch den Werth von λ bedingt ist. Legt man nach und nach dem λ alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ bei, so stellt die Gleichung (2) nach und nach alle Punkte der Verbindungsgeraden 01 dar, und kann deshalb als analytischer Repräsentant eines Punktgebildes aufgefasst werden, dessen Träger die Gerade 01 ist, oder auch als Repräsentant der Geraden 01 selbst. Wir werden dem entsprechend die Gleichung (2) auch bald als Gleichung jenes Punktgebildes, bald als Gleichung der Geraden 01 ansehen.

Betrachten wir nun die Gleichung:

$$A_0 + 2A_1\lambda + A_2\lambda^2 = 0, \tag{3}$$

wo $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen dreier gegebener Punkte sind, so stellt bei constantem λ die Gleichung (3) einen Punkt dar, so zwar, dass verschiedenen Werthen von λ verschiedene Punkte entsprechen; alle diese Punkte liegen aber auf einem und demselben Kegelschnitt*) und mit Rücksicht hierauf mag (3) entweder als Gleichung eines auf dem Kegelschnitt liegenden Punktgebildes, dessen Elemente durch die verschiedenen Werthe von λ bestimmt sind, oder auch als Gleichung des Kegelschnitts selbst angesehen werden.

So weitergehend kann man fragen, welche Bedeutung hat die Gleichung

$$A_0 + \binom{n}{1} A_1\lambda + \cdots + A_n\lambda^n = 0, \tag{4}$$

wo

*) Man vergl. z. B. Hesse: Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie pag. 19. Leipzig. Teubner 1866.

$$A_i \equiv a_i\, u + b_i\, v + c_i\, w,$$

und $\binom{n}{k}$ den $(k+1)^{\text{ten}}$ Binomialcoëfficienten bedeutet.

Jedenfalls stellt bei gegebenen a_i, b_i, c_i und gegebenem λ die Gleichung (4) einen Punkt dar und verschiedenen Werthen von λ werden (im Allgemeinen) verschiedene Punkte entsprechen; ferner ist wahrscheinlich, dass alle diese Punkte auf einer bestimmten Curve liegen und dass man nach und nach die Gleichungen aller dieser Punkte erhält, wenn man λ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt. Nehmen wir diess für den Augenblick als erwiesen an, so wollen wir (4) entweder als Gleichung des auf der Curve liegenden Punktgebildes, dessen einzelne Elemente durch die verschiedenen Werthe von λ bestimmt werden, oder auch als Gleichung der Curve selbst ansehen.

Die Beantwortung der Frage nach der Bedeutung der Gleichung (4) leitet der folgende Satz ein:

> Jede ebene algebraische Curve lässt sich darstellen durch eine Gleichung, deren eine Seite gleich Null ist, und deren andere aus einer Summe von $\mu + 1$ homogenen Functionen ν^{ten} Grades in den Liniencoordinaten u, v, w besteht, die einzelnen Functionen respective multiplicirt mit der nullten, ersten ..., μ^{ten} Potenz eines variabeln Parameters λ.

Diesen Satz kann man folgendermaassen beweisen:

Es seien die Gleichungen gegeben:

$$(5)\qquad \begin{aligned} A_{(mr)} &\equiv a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_0 = 0 \\ B_{(ns)} &\equiv b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + b_0 = 0, \end{aligned}$$

wo die a und b ganze homogene Functionen von ebenen Punktcoordinaten x, y, z sind, respective von den Graden r und s, λ aber ein variabeler Parameter. Legen wir demselben einen bestimmten Werth λ_0 bei, so stellen die Gleichungen (5) zwei Curven dar, und zwar $A_{(mr)} = 0$ eine Curve r^{ter}, $B_{(ns)} = 0$ eine Curve s^{ter} Ordnung. Dieselben schneiden sich in $r.s$ Punkten, deren Coordinaten ans den Gleichungen (5) berechnet werden können. In dieser Weise entsprechen also jedem Werthe von λ $r.s$ Punkte und man kann nach dem geometrischen Orte dieser Punkte fragen. Die (gewöhnliche) Gleichung desselben in homogenen Punktcoordinaten wird erhalten, wenn man aus den beiden Gleichungen (5) λ eliminirt. Das Eliminationsresultat

$$(6)\qquad \begin{array}{r|cccccc|} 1) & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & \cdots & \\ 2) & & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ n+1) & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & \cdots & \\ n+2) & & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

ist in x, y, z im Allgemeinen höchstens von der Ordnung

$$\mu = r \cdot n + s \cdot m^{*}).$$

Der Ort der Durchschnittspunkte der demselben λ entsprechenden Curven $A_{(mr)} = 0$ und $B_{(ns)} = 0$ ist also eine Curve μ^{ter} Ordnung.

Im Folgenden werden wir nicht die Gleichung (6) zu Grunde legen, sondern die Gleichungen (5), wobei dann anzunehmen ist, dass λ nach und nach alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft und dass für jeden Werth von λ die $r \cdot s$ Schnittpunkte bestimmt werden. In diesem Sinne stellen die Gleichungen (5) ebenfalls die durch (6) repräsentirte Curve dar **). Von ihnen ausgehend suchen wir nun die Curve durch eine Gleichung darzustellen, welche die in dem oben ausgesprochenen Satze verlangte Form hat.

Jeder der $r \cdot s$ Schnittpunkte der Curven (5), welche einem bestimmten Werthe von λ entsprechen, hat eine Gleichung von der Form:

$$(7) \qquad xu + vy + zw = 0,$$

wo für x, y, z die aus (5) berechneten Coordinaten des Schnittpunktes zu setzen sind. Man erhält so $r \cdot s$ Gleichungen (7), entsprechend den $r \cdot s$ Durchschnittspunkten der Curven (5). Alle diese Gleichungen denken wir uns mit einander multiplicirt. Die dadurch hervorgehende neue Gleichung:

$$(8) \quad (x_1 u + y_1 v + z_1 w)\,(x_2 u + y_2 v + z_2 w) \ldots (x_{rs} u + y_{rs} v + z_{rs} w) = 0,$$

in welcher x_i, y_i, z_i die Coordinaten des i^{ten} Schnittpunktes der beiden Curven (5) sind, ist symmetrisch in Bezug auf die gemeinschaftlichen Wurzeln x_i, y_i, z_i der beiden Gleichungen (5), lässt sich also rational durch die Coëfficienten dieser Gleichungen ausdrücken. Das Resultat dieser Operation wird die Resultante der Gleichungen (5) und (7) sein, die durch Elimination von x, y, z erhalten werden kann. Diese Gleichung ist in Bezug auf λ vom Grade $\mu = m \cdot s + n \cdot r$; in Bezug auf u, v, w aber vom Grade $\nu = r \cdot s$, hat also die Form:

$$(9) \qquad C_\mu \equiv A_0 + \binom{\mu}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_\mu \lambda^\mu = 0,$$

wo die A homogene Functionen $r \cdot s^{\text{ten}}$ Grades von u, v, w sind. Diese Gleichung muss für jeden Werth von λ in $r \cdot s$ Factoren zerfallen, die lineare Functionen von u, v, w, und irrationale Functionen der gege-

---

*) Man vergleiche Cremona: Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven, übersetzt von M. Curtze pag. 117. Greifswald. C. A. Kochs Verlagsbuchhandlung (Th. Kunike) 1865.

**) Dass umgekehrt jede Curve einer beliebigen Ordnung durch zwei Gleichungen von der Form (5) dargestellt werden können, geht schon daraus hervor, dass man jede (gewöhnliche) Curvengleichung $p(x, y, z) = 0$ ersetzen kann durch die beiden Gleichungen:

$$p(x, \lambda z, z) = 0 \quad \text{und} \quad y - \lambda z = 0.$$

benen Grösse λ sind. Jeder dieser Factoren repräsentirt, gleich Null gesetzt, einen der $r.s$ Punkte, in denen sich die dem gegebenen λ entsprechenden Curven (5) schneiden. Es stellt demnach die Gleichung (9) für jeden Werth von λ die demselben entsprechenden $r.s$ Schnittpunkte der Curven (5) dar, d. h. $r.s$ Punkte der Curve (6), welche der Ort aller dieser Schnittpunkte ist. Indem man λ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt, gelangt man zu allen Punkten der Curve (6). In der Gleichung (9) ist also die Curve (6) so dargestellt, wie es der oben ausgesprochene Satz verlangt.

Umgekehrt ist es nun leicht zu verificiren, dass eine jede Gleichung (9), welche die Eigenschaft besitzt, *für jeden Werth von* λ in ν Factoren zu zerfallen, die in u, v, w linear sind, eine Curve μ^{ter} Ordnung darstellt. Sucht man nämlich die Durchschnittspunkte der durch (9) dargestellten Curve mit einer beliebigen Geraden (u_1, v_1, w_1) zu bestimmen, so muss man die Coordinaten dieser Geraden in (9) einsetzen und dann die λ aufsuchen, welche der Gleichung genügen. Die Zahl derselben ist μ. Setzen wir nun in

$$C_\mu = 0$$

einen der so gefundenen Werthe von λ ein, den wir durch λ_0 bezeichnen wollen, so stellt dieselbe ν Punkte dar, von denen jedenfalls einer auf der Geraden (u_1, v_1, w_1) liegen wird, (indem für die Coordinaten dieser Geraden einer der ν Factoren verschwinden muss, aber im Allgemeinen auch nur dieser eine*). Es entsprechen also den μ Wurzeln λ auch μ Punkte der Curve, die auf der Geraden (u_1, v_1, w_1) liegen, d. h. die Curve ist von der μ^{ten} Ordnung.

Wir wenden uns nun speciell zu den Curven, für welche die A *lineare* Functionen von u, v, w sind. Welcher Art diese Curven sind, lehrt der Satz**):

---

*) Denn würden wir durch den Punkt, von dem wir bestimmt wissen, dass er auf der Geraden (u_1, v_1, w_1) liegt, eine beliebige andere Gerade (u_2, v_2, w_2) legen, so würden die Coordinaten dieser Geraden wieder μ Werthe von λ entsprechen, von denen aber einer wieder λ_0 sein wird, durch welchen dann auch wieder die ν Punkte bestimmt sind, wie oben. Wenn also im Allgemeinen mehr als einer von diesen ν Punkten auf einer Geraden u, v, w liegen würde, so müssten auch auf der *beliebig* durch einen derselben gezogenen Geraden (u_2, v_2, w_2) zwei oder mehrere dieser Punkte liegen, was nicht sein kann.

Man könnte noch daran zweifeln, ob einem einzelnen Punkte auch immer nur ein einzelner Werth von λ entspricht. Jedenfalls entsprechen einem Punkte nur eine endliche Anzahl (ϱ) Werthe von λ und es kann daher die Gerade (u_2, v_2, w_2) immer noch auf unendlich viele Arten so gelegt werden, dass sie durch keinen der $\varrho(\nu - 1)$ mit obigem Punkte verbundenen Punkt hindurchgeht.

**) Dieser Satz, sowie dessen Beweis ist entnommen der „Theorie der Abel'schen Functionen von A. Clebsch und P. Gordan." Leipzig. Teubner 1866.

Hat eine ebene Curve n^{ter} Ordnung

$$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}$$

(also möglichst viele) Doppel- und Rückkehrpunkte, so ist dieselbe darstellbar durch eine Gleichung von der Form

$$A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \binom{n}{2} A_2 \lambda^2 + \cdots + A_n \lambda^n = 0,$$

wo die A lineare homogene Functionen von u, v, w sind, λ aber ein variabeler Parameter ist.

Die gegebene Curve habe die (gewöhnliche) Gleichung $C_n = 0$. Durch die

$$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}$$

Doppel- und Rückkehrpunkte derselben und durch $2n - 3$ weitere Punkte derselben legen wir einen Curvenbüschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, was möglich ist, weil

$$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2} + 2n - 3 = \frac{(n-1)\,(n+2)}{2} - 1.$$

Die Gleichung dieses Curvenbüschels hat die Form:

$$R + \lambda S = 0,$$

wo R und S, gleich Null gesetzt, zwei Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung repräsentiren, welche durch die oben erwähnten Punkte der Curve C_n hindurchgehen, λ aber ein variabler Parameter ist. Jede der Curven des Büschels $R + \lambda S = 0$ schneidet die Curve C_n ausser in den doppelt zu zählenden Doppel- und Rückkehrpunkten derselben und jenen $2n - 3$ willkürlich gewählten Punkten noch in

$$n\,(n-1) - 2\,\frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - (2n-3),$$

d. h. in einem variabeln Punkte, dessen Lage auf der Curve C_n von λ abhängt.

Die Gleichung dieses Punktes können wir folgendermassen erhalten. Wir sehen

$$U \equiv u.x + v.y + w.z = 0$$

als Gleichung eines der Durchschnittspunkte der Curven $C_n = 0$ und $R + \lambda S = 0$ an. Wenn wir aus diesen drei Gleichungen x, y, z eliminiren, so erhalten wir das Product der Gleichungen sämmtlicher Durchschnittspunkte der beiden Curven. Die einzelnen Durchschnittspunkte werden dabei durch die in u, v, w linearen Factoren der Resultante dargestellt. Unter diesen Factoren kann nur einer λ enthalten, derjenige nämlich, welcher den variabeln Punkt repräsentirt, dessen Lage durch λ bedingt ist. Da dieser Factor in λ vom n^{ten} Grade ist, in u, v, w aber vom ersten, so hat er die Form:

$$(a_0 u + b_0 v + c_0 w) + \binom{n}{1} (a_1 u + b_1 v + c_1 w) \lambda$$
$$+ \cdots + (a_n u + b_n v + c_n w) \lambda^n,$$

wo die a, b, c constant sind. Setzt man

$$a_i u + b_i v + c_i w \equiv A_i,$$

so wird die Gleichung des variabelen Schnittpunktes von $R + \lambda S = 0$ und $C_n = 0$, d. h. eines beliebigen Punktes der Curve C_n:

$$A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \binom{n}{2} A_2 \lambda^2 + \cdots + A_n \lambda^n = 0.$$

Anmerkung. Wir benutzten zur Construction des Curvenbüschels

$$R + \lambda S = 0$$

ausser den

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Doppel- und Rückkehrpunkten der Curve C_n noch $2n - 3$ willkürlich auf derselben gewählte Punkte. Es kann nun gezeigt werden, *dass die in die Gleichung*

$$\mathsf{A} \equiv A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0$$

eingehenden Constanten a_i, b_i, c_i von der Wahl dieser $2n - 3$ Punkte vollständig unabhängig sind.

Wählen wir nämlich $2n-3$ von den ersten verschiedene Punkte und construiren ein zweites Curvenbüschel

$$R_1 + \lambda_1 S_1 = 0,$$

so erhalten wir auch im Allgemeinen eine andere Gleichung der Curve C_n:

$$\mathsf{B} \equiv B_0 + \binom{n}{1} B_1 \lambda_1 + \cdots + B_n \lambda_1^n = 0.$$

Für einen bestimmten Werth von λ stellt die Gleichung $\mathsf{A} = 0$ den ihm entsprechenden Durchschnittspunkt des ersten Büschels mit der Curve C_n dar und ebenso repräsentirt für einen bestimmten Werth von λ_1 die Gleichung $\mathsf{B} = 0$ den ihm entsprechenden variabeln Durchschnittspunkt des zweiten Büschels mit der Curve C_n. Wir legen uns nun die Frage vor: „wie oft entspricht gleichen Werthen von λ und λ_1 derselbe Punkt der Curve C_n?"

Um diese Frage zu beantworten, brauchen wir den im nächsten Paragraphen zu erweisenden Satz, dass jedem Punkte der Curve C_n, wofern derselbe nicht einer ihrer Doppel- oder Rückkehrpunkte ist, in der Gleichung $\mathsf{A} = 0$ nur ein Werth von λ entspricht. Es folgt hieraus, dass wenn die Curven durch zwei verschiedene Gleichungen $\mathsf{A} = 0$ und $\mathsf{B} = 0$ dargestellt wird, jedem Punkte von C_n sowohl *ein* Werth von λ als auch ein Werth von λ_1 entsprechen muss, woraus man schliessen kann, dass auch jedem Werth von λ *ein* Werth von λ_1 und

jedem Werth von λ_1 *ein* Werth von λ entsprechen muss, sodass λ und λ_1 durch eine Gleichung verbunden sein müssen von der Form:

$$a + b\lambda + c\lambda_1 + d\lambda\lambda_1 = 0.$$

Wollen wir nun wissen, wie oft für einen und denselben Punkt von C_n die durch die vorstehende Relation verbundenen beiden Parameter einander gleich werden können, so müssen wir in derselben $\lambda = \lambda_1$ setzen. Die Gleichung wird dann in λ quadratisch und wir erkennen hieraus, dass es im Allgemeinen zwei Punkte der Curve C_n geben wird, welchen gleiche Werthe der Parameter λ und λ_1 entsprechen. Wir erkennen ferner, dass, wenn für drei Punkte der Curve $\lambda = \lambda_1$ ist, diess dann für alle Punkte der Curve der Fall sein wird denn es müssen dann die drei Coëfficienten unserer quadratischen Gleichung verschwinden, also $a = 0$, $b + c = 0$, $d = 0$ sein, wodurch die Relation $a + b\lambda + c\lambda_1 + d\lambda\lambda_1 = 0$ übergeht in $\lambda - \lambda_1 = 0$.

Setzen wir nun in der Gleichung

$$R_1 + \lambda_1 S_1 = 0 \qquad \lambda_1 = \frac{\alpha + \beta\mu}{\gamma + \delta\mu}$$

und verfügen über die drei Verhältnisse der Grössen α, β, γ, δ der Art, dass für drei Lagen des variabeln Durchschnittspunktes von C_n mit den Büscheln

$$R + \lambda S = 0 \quad \text{und} \quad R_1 + \frac{\alpha + \beta\mu}{\gamma + \delta\mu} S_1 = 0,$$

oder

$$R + \lambda S \qquad \text{und} \quad (R_1\gamma + S_1\alpha) + \mu(R_1\delta + S_1\beta) = 0$$

die beiden Parameter λ und μ gleich sind, so muss dasselbe nach dem Vorhergehenden für jede Lage des variabeln Punktes der Fall sein, und es müssen daher die beiden Gleichungen

$$A_0 + \binom{n}{1} A_1\lambda + \cdots A_n\lambda^n = 0$$

und

$$B_0 + \binom{n}{1} B_1\left(\frac{\alpha + \beta\mu}{\gamma + \delta\mu}\right) + \cdots + B_n\left(\frac{\alpha + \beta\mu}{\gamma + \delta\mu}\right)^n = 0$$

für gleiche Werthe von λ und μ stets dieselben Punkte der Curve C_n darstellen. Schafft man in der zweiten dieser Gleichungen noch die Nenner weg, wodurch dieselbe die Form annimmt:

$$C_0 + \binom{n}{1} C_1\mu + \cdots + C_n\mu^n = 0,$$

so kann diese, wenn $\mu = \lambda$, sich von der ersten nur durch einen Factor unterscheiden, oder es muss allgemein sein: $A_i = \varrho C_i$, wo ϱ von i unabhängig ist.

Da nun die Transformation

$$\lambda_1 = \frac{\alpha + \beta\mu}{\gamma + \delta\mu}$$

die Lage der Fundamentalpunkte des zweiten Büschels nicht verändert, so erkennt man, dass bei jeder Lage der auf C_n willkürlich gewählten $2n - 3$ Punkte dieselbe Gleichung

$$A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0$$

erhalten werden kann.

Die drei willkürlichen Constanten, welche in der Transformation

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta\mu}{\gamma + \delta\mu}$$

vorkommen, müssen auch in der Gleichung

$$\mathsf{A} \equiv A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0$$

enthalten sein. Es folgt diess sofort daraus, dass eine Substitution der mehrfach erwähnten Art in der Gleichung des Büschels die nämliche in der Gleichung $\mathsf{A} = 0$ zur Folge hat, wie auch daraus, dass die Zahl der willkürlichen Constanten einer Curve n^{ter} Ordnung mit

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Doppel- und Rückkehrpunkten gleich

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 3n - 1,$$

also um 3 kleiner ist, als die Zahl der in die Gleichung $\mathsf{A} = 0$ eingehenden Constanten.

§ 2.

Aufstellung der Gleichung, von welcher die Lage der Doppel- und Rückkehrpunkte abhängt.

Wie wir gesehen haben, entspricht jedem Werthe von λ ein bestimmter Punkt der Curve. Dass umgekehrt aber auch einem jeden Punkte der Curve im Allgemeinen nur ein Werth von λ zugehört, sieht man leicht ein, wenn man die Curve durch eine beliebige Gerade (u_0, v_0, w_0) schneidet. Die Durchschnittspunkte derselben mit der Curve erhält man, wenn man die Coordinaten der Geraden in die Gleichung der Curve einsetzt und dieselbe nach λ auflöst. Den n Werthen von λ, die man so erhält, entsprechen im Allgemeinen auch n von einander verschiedene Punkte der Curve, nämlich die Durchschnittspunkte der Curve mit der Geraden (u_0, v_0, w_0). Nur wenn diese Gerade durch einen Doppel- oder Rückkehrpunkt der Curve hindurchgeht, können verschiedenen Werthen von λ dieselben Punkte, nämlich eben jene Doppel- und Rückkehrpunkte entsprechen. Diese Werthe wollen wir nun zu bestimmen suchen.

Wir schreiben die Gleichung der Curve in der Form:

$$(a_0 + a_1 \lambda + \cdots a_n \lambda^n)\, u + (b_0 + b_1 \lambda + \cdots + b_n \lambda^n) v$$
$$+ (c_0 + c_1 \lambda + \cdots + c_n \lambda^n)\, w = 0.$$

Die Coëfficienten von u, v, w sind dann die Coordinaten eines Punktes der Curve. Bezeichnen wir dieselben mit x_λ, y_λ, z_λ, so ist also

$$x_\lambda = a_0 + a_1 \lambda + \cdots a_n \lambda^n,$$
$$y_\lambda = b_0 + b_1 \lambda + \cdots b_n \lambda^n,$$
$$z_\lambda = c_0 + c_1 \lambda + \cdots c_n \lambda^n.$$

Setzen wir hier μ statt λ, so kommen wir (im Allgemeinen) zu einem andern Punkte (x_μ, y_μ, z_μ) der Curve. Beide Punkte werden nur dann zusammenfallen, wenn die Gleichungen bestehen:

$$x_\lambda : y_\lambda : z_\lambda = x_\mu : y_\mu : z_\mu,$$

oder die folgenden:

$$\frac{a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n}{a_0 + a_1 \mu + \cdots + a_n \mu^n} = \frac{b_0 + b_1 \lambda + \cdots + b_n \lambda^n}{b_0 + b_1 \mu + \cdots + b_n \mu^n} = \frac{c_0 + c_1 \lambda + \cdots + c_n \lambda^n}{c_0 + c_1 \mu + \cdots + c_n \mu^n},$$

oder auch, wenn zugleich

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n & a_0 + a_1 \mu + \cdots + a_n \mu^n \\ b_0 + b_1 \lambda + \cdots + b_n \lambda^n & b_0 + b_1 \mu + \cdots + b_n \mu^n \end{vmatrix} = 0$$

und

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n & a_0 + a_1 \mu + \cdots + a_n \mu^n \\ c_0 + c_1 \lambda + \cdots + c_n \lambda^n & c_0 + c_1 \mu + \cdots + c_n \mu^n \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir nun

$$a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n \text{ mit } A,$$
$$b_0 + b_1 \lambda + \cdots + b_n \lambda^n \text{ mit } B,$$
$$c_0 + c_1 \lambda + \cdots + c_n \lambda^n \text{ mit } C,$$
$$a_0 + a_1 \mu + \cdots + a_n \mu^n \text{ mit } A',$$
$$b_0 + b_1 \mu + \cdots + b_n \mu^n \text{ mit } B',$$
$$c_0 + c_1 \mu + \cdots + c_n \mu^n \text{ mit } C',$$

so haben wir die beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} A & A' \\ C & C' \end{vmatrix} = 0,$$

aus welchen λ und μ zu berechnen sind. Um die unbrauchbare Lösung $\lambda = \mu$ zu vermeiden, schreiben wir diese Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A & \dfrac{A' - A}{\mu - \lambda} \\ B & \dfrac{B' - B}{\mu - \lambda} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} A & \dfrac{A' - A}{\mu - \lambda} \\ B & \dfrac{B' - B}{\mu - \lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Führen wir die blos angedeutete Division der zweiten Verticalreihen aus, und ordnen nach Potenzen von μ, so finden wir

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} A & P_0 + \frac{\mu}{1}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_0 + \cdots + \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^{n-1} P}{\partial \mu^{n-1}}\right)_0 \\ B & Q_0 + \frac{\mu}{1}\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial \mu}\right)_0 + \cdots + \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^{n-1} Q}{\partial \mu^{n-1}}\right)_0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A & P_0 + \frac{\mu}{1}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_0 + \cdots + \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^{n-1} P}{\partial \mu^{n-1}}\right)_0 \\ C & R_0 + \frac{\mu}{1}\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial \mu}\right)_0 + \cdots + \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^{n-1} R}{\partial \mu^{n-1}}\right)_0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo

$$P = \frac{A' - A}{\mu - \lambda},\quad Q = \frac{B' - B}{\mu - \lambda},\quad R = \frac{C' - C}{\mu - \lambda}$$

und wo die den P, Q, R und ihren Differentialquotienten angehängte Null bedeutet, dass in ihnen $\mu = 0$ zu setzen ist.

Die Gleichungen (3) und (4), in anderer Form geschrieben, sind

$$(5)\qquad \begin{aligned} (A_{00}\; B_{1n}) + (A_{01}\; B_{2n})\,\mu + \cdots + (A_{0,n-1}\; B_{n,n})\,\mu^{n-1} = 0,\\ (A_{00}\; C_{1n}) + (A_{01}\; C_{2n})\,\mu + \cdots + (A_{0,n-1}\; C_{n,n})\,\mu^{n-1} = 0,\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} A_{ik} &\equiv a_i + a_{i+1}\lambda + \cdots + a_k\lambda^{k-i}\\ B_{ik} &\equiv b_i + b_{i+1}\lambda + \cdots + b_k\lambda^{k-i},\\ C_{ik} &\equiv c_i + c_{i+1}\lambda + \cdots + c_k\lambda^{k-i},\end{aligned}$$

und

$$(A_{ik}\; B_{mn}) \equiv A_{ik}\,B_{mn} - A_{mn}\,B_{ik}.$$

Nun ist allgemein

$$\begin{aligned} \Big(A_{0i}\; B_{i+1,n}\Big) &= \frac{A_{0i}B - AB_{0i}}{\lambda^{i+1}} = \frac{1}{\lambda^{i+1}}\Big(A_{0i}\,B\Big),\\ \Big(A_{0i}\; C_{i+1,n}\Big) &= \frac{A_{0i}\,C - A\,C_{0i}}{\lambda^{i+1}} = \frac{1}{\lambda^{i+1}}\Big(A_{0i}\,C\Big).\end{aligned}$$

Berücksichtigt man diess, so gehen die Gleichungen (5) über in die folgenden:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\Big(A_{00}\,B\Big) + \frac{\mu}{\lambda^2}\Big(A_{01}\,B\Big) + \cdots + \frac{\mu^{n-1}}{\lambda^n}\Big(A_{0,n-1}\,B\Big) = 0,\\ \frac{1}{\lambda}\Big(A_{00}\,C\Big) + \frac{\mu}{\lambda^2}\Big(A_{01}\,C\Big) + \cdots + \frac{\mu^{n-1}}{\lambda^n}\Big(A_{0,n-1}\,C\Big) = 0,\end{aligned}$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$(A_{0i}\,B) = \beta_i \qquad\qquad (A_{0i}\,C) = \gamma_i,$$

so liefert die Elimination von μ aus den Gleichungen (6) nach der Bezout-Cayley'schen Methode:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda^3}(\beta_0\,\gamma_1) & \frac{1}{\lambda^4}(\beta_0\,\gamma_2)\cdots\cdots\cdots & \frac{1}{\lambda^{n+2}}(\beta_0\,\gamma_{n-1})\\ \frac{1}{\lambda^4}(\beta_0\,\gamma_2) & \frac{1}{\lambda^5}\Big((\beta_0\gamma_3)+(\beta_1\gamma_2)\Big)\cdots & \frac{1}{\lambda^{n+3}}(\beta_1\,\gamma_{n-1})\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ \frac{1}{\lambda^{n+2}}(\beta_0\gamma_{n-1}) & \frac{1}{\lambda^{n+3}}(\beta_1\gamma_{n-1})\cdots & \frac{1}{\lambda^{2n+1}}(\beta_{n-2},\gamma_{n-1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen können wir nun noch vereinfachen. Es ist nämlich:

$$(\beta_i \gamma_k) = A \begin{vmatrix} A_{0i} & B_{0i} & C_{0i} \\ A_{0k} & B_{0k} & C_{0k} \\ A_{0n} & B_{0n} & C_{0n} \end{vmatrix}, \; k > i,$$

oder auch, wenn wir die zweite Horizontalreihe von der dritten und dann die erste von der zweiten abziehen:

$$(\beta_i \gamma_k) = \begin{vmatrix} A_{0i} & B_{0i} & C_{0i} \\ A_{i+1,k} & B_{i+1,k} & C_{i+1,k} \\ A_{k+1,n} & B_{k+1,n} & C_{k+1,n} \end{vmatrix} \cdot \lambda^{i+k+2} \cdot A = \lambda^{i+k+2} \cdot A \cdot \varrho_{ik}.$$

Setzen wir diess in die Gleichung (7) ein, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$A^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} \varrho_{01} & \varrho_{02} & \cdots & \varrho_{0,n-1} \\ \varrho_{02} & \varrho_{03}+\varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_{0,n-1} & \varrho_{1,n-1} & \cdots & \varrho_{n-2,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Wurzeln der Gleichung $A = 0$ mit unserem Problem nichts zu thun haben, so ist die Gleichung, welche die den Doppel- und Rückkehrpunkten der gegebenen Curve entsprechenden Werthe von λ liefert:

$$(8) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \varrho_{01} & \varrho_{02} & \cdots & \varrho_{0,n-1} \\ \varrho_{02} & \varrho_{03}+\varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_{0,n-1} & \varrho_{1,n-1} & \cdots & \varrho_{n-2,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Jedes Element ϱ_{ik} der Determinante Δ ist in Bezug auf λ vom Grade:

$$i + (k - i - 1) + (n - k - 1) = n - 2,$$

Δ selbst also vom Grade $(n-1)(n-2)$. Ein Blick auf die Gleichungen (1) lehrt, dass dieselben symmetrisch sind in Bezug auf λ und μ. Die Elimination von einer derselben — in unserem Falle von μ — muss deshalb zu einer Gleichung führen, die sich von der nicht unterscheidet, die durch Elimination der andern (λ) erhalten wird, d. h. die Wurzeln der Gleichung (8) sind zugleich Wurzeln λ und Wurzeln μ, und es entsprechen je zwei von ihnen einem Doppel- oder Rückkehrpunkt. Welche Wurzeln zusammen einen solchen Punkt bestimmen, kann mit Hülfe der Gleichungen (1) entschieden werden. Bezeichnet man nämlich die eine dieser Wurzeln mit λ, die andere mit μ, so müssen dieselben *beiden* Gleichungen (1) genügen. Sind die beiden Wurzeln einander gleich, so wird der ihnen entsprechende Punkt ein Rückkehrpunkt der Curve sein, sind sie conjugirt imaginär, so ist er ein isolirter Punkt (dessen Coordinaten reell sind, weil sie

sich nicht ändern, wenn man nach einander die beiden ihm entsprechenden Werthe von λ einsetzt.*)

Aus dieser Betrachtung folgt, dass in der That die Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte der gegebenen Curve gleich ist

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Anmerkung. Es liegt hier, wie überall, wo nicht das Gegentheil ausgesprochen ist, die Voraussetzung zu Grunde, dass die Gleichung

$$(9) \qquad A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0$$

wirklich eine Curve n^{ter} Ordnung darstellt, und weder auf die Form gebracht werden kann:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \cdots + \alpha_\varrho \lambda^\varrho)\left(A_0' + \binom{n-\varrho}{1} A_1' \lambda + \cdots + A'_{n-\varrho} \lambda^{n-\varrho}\right) = 0,$$

wo die α constante Grössen sind, die A' aber ähnliche Ausdrücke, wie die A, noch auf die andere:

$$A_0'' + \binom{n}{\varrho_1} A_1'' \left(\frac{m_0 + m_1 \lambda + \cdots + m_\varrho \lambda^\varrho}{n_0 + n_1 \lambda + \cdots + n_\varrho \lambda^\varrho}\right) + \cdots$$
$$\cdots + A''_{\frac{n}{\varrho}} \left(\frac{m_0 + m_1 \lambda + \cdots + m_\varrho \lambda^\varrho}{n^0 + n_1 \lambda + \cdots + n_\varrho \lambda^\varrho}\right)^{\frac{n}{\varrho}} = 0,$$

wo die A'' gleich Null gesetzt, ebenfalls gewisse Punkte repräsentiren, die m und n aber Constante sind.

§ 3.

Die Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten sind Curven m^{ter} Classe mit $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Doppel- und Wendetangenten.

Aus dem Vorhergehenden wissen wir, dass die Gleichung:

$$(1) \qquad A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0,$$

---

*) Doch ist dabei vorausgesetzt, dass die Punkte R in der Gleichung (9) reell sind. Dieselben können nämlich unter Umständen auch imaginär sein, ohne dass die Curve aufhört reell zu sein, jedoch müssen sie dann, im Falle n ungerade ist, alle; wenn n gerade ist, alle bis auf den Punkt $A_{\frac{n}{2}}$ imaginär, immer aber solche, welche Indices haben, deren Summe gleich n, conjugirt imaginär sein. (Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennt man leicht mit Hülfe der gewöhnlichen Gleichung der Curve. Seite 529 Anm.) Die vorstehenden Betrachtungen werden durch die Annahme imaginärer Punkte A wesentlich nicht alterirt. Im Folgenden setzen wir diese Punkte jedoch stets reell voraus.

wo die A gleich Null gesetzt gewisse Punkte darstellen, λ aber ein variabeler Parameter ist, (im Allgemeinen) eine Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten repräsentirt. Wir wollen nun zeigen, dass jede Curve der Art, mit Ausnahme der geraden Linie, auch dargestellt werden kann durch eine Gleichung von der Form

$$(2) \qquad C_0 + \binom{m}{1} C_1 \lambda + \cdots + C_m \lambda^m = 0,$$

wo die C lineare homogene Functionen der ebenen Punktcoordinaten x, y, z sind, also gleich Null gesetzt, gewisse gerade Linien repräsentiren, λ aber wieder ein variabeler Parameter ist. Der Sinn der Gleichung ist der, dass für jeden Werth von λ die Gleichung (2) eine gerade Linie und zwar eine Tangente unserer Curve darstellt, so dass man, wenn man λ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt, zu allen Tangenten der Curve gelangt.

Diese Gleichung (2) werden wir im Folgenden die *Tangentengleichung*, die Gleichung (1) die *Punktgleichung* der Curve nennen.

Indem wir nun nachweisen, dass jede Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten durch eine Gleichung von der Form (2) dargestellt werden kann, führen wir zugleich den Beweis, dass diese Curve m^{ter} Classe $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Doppel- und Wendetangenten besitzt. Denn man kann durch eine Untersuchung, welche der des § 1. ganz ähnlich ist, zeigen, dass sich jede Curve m^{ter} Classe mit $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Doppel- und Wendetangenten durch eine Gleichung von der Form (2) darstellen lässt, und eine Untersuchung, analog der des § 2., liefert den Beweis, dass jede Gleichung von der Form (2) (im Allgemeinen) eine Curve m^{ter} Classe mit $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Doppel- und Wendetangenten repräsentirt.

Wir haben früher gesehen, dass man die Schnittpunkte einer Geraden (u_0, v_0, w_0) mit einer Curve

$$\mathsf{A} \equiv A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0$$

findet, wenn man in ihre Gleichung die Coordinaten der Geraden einsetzt und dieselbe sodann nach λ auflöst. Für jeden dieser Werthe von λ stellt $\mathsf{A} = 0$ einen Punkt dar und die n so erhaltenen Punkte sind die gesuchten Schnittpunkte. Wir fassen jetzt besonders den Fall in's Auge, dass zwei dieser Schnittpunkte unendlich nah zusammenrücken, d. h. dass (u_0, v_0, w_0) eine Tangente der Curve $\mathsf{A}=0$ ist. Es müssen dann zwei der λ solche Werthe haben, dass die ihnen entsprechenden Schnittpunkte zusammenfallen, d. h. die beiden λ müssen einander gleich sein, da Punkten der Curve, die unendlich nah zu-

sammenliegen, im Allgemeinen auch Werthe von λ entsprechen, die nur unendlich wenig von einander verschieden sind. Es muss deshalb für jede Tangente (u_0, v_0, w_0) die Gleichung $\mathsf{A} = 0$ eine Doppelwurzel in λ haben, d. h. es muss zugleich sein:

$$\mathsf{A} = 0 \text{ und } \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \lambda} = 0,$$

oder

$$A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0$$

und

$$n \left(A_1 + \binom{n-1}{1} A_2 \lambda + \cdots + A_n \lambda^{n-1}\right) = 0.$$

Lassen wir bei der zweiten Gleichung den Factor n weg, multipliciren sie hierauf mit λ und subtrahiren sie von der ersten, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} A_0 + \binom{n-1}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_{n-1} \lambda^{n-1} &= 0 \\ A_1 + \binom{n-1}{1} A_2 \lambda + \cdots + A_n \lambda^{n-1} &= 0, \end{aligned}$$

welchen u_0, v_0, w_0 bei gegebenem λ genügen müssen, damit die durch diese Coordinaten repräsentirte Gerade die Curve in dem Punkte, welcher λ entspricht (oder kürzer in dem Punkte λ) berührt. Eliminirt man λ aus den beiden Gleichungen (3), so erhält man eine Relation zwischen u_0, v_0, w_0, welche jedesmal besteht, wenn die ihnen entsprechende Gerade die Curve $\mathsf{A} = 0$ berührt, d. h. (die gewöhnliche) *Gleichung der Curve* $\mathsf{A} = 0$ *in Liniencoordinaten.* *)

---

*) Die gewöhnliche Gleichung der Curve in Punktcoordinaten findet man, wenn man ϱ und λ aus den Gleichungen eliminirt:

$$\varrho x = a_0 + \binom{n}{1} a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n \;,\; \varrho y = b_0 + \binom{n}{1} b_1 \lambda + \cdots$$
$$\cdots + b_n \lambda^n \;,\; \varrho z = c_0 + \binom{n}{1} c_1 \lambda^n + \cdots + c_n \lambda^n.$$

Indem man dabei zuerst ϱ und dann λ wegschafft, findet man:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varrho_{01} & \varrho_{02} & \cdots & \varrho_{0n} \\ \varrho_{02} & \varrho_{03} + \varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_{0n} & \varrho_{1n} & \cdots & \varrho_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0,$$

wo allgemein

$$\varrho_{ik} = \begin{vmatrix} x & \binom{n}{i} a_i & \binom{n}{k} a_k \\ y & \binom{n}{i} b_i & \binom{n}{k} b_k \\ z & \binom{n}{i} c_i & \binom{n}{k} c_k \end{vmatrix} .$$

Um nun die Gleichung der Curve zu finden, die wir suchen, schreiben wir die Gleichungen (3) zunächst folgendermassen:

$$\begin{aligned} &\left(a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 \lambda + \cdots + a_{n-1} \lambda^{n-1}\right) u_0 \\ &+ \left(b_0 + \binom{n-1}{1} b_1 \lambda + \cdots + b_{n-1} \lambda^{n-1}\right) v_0 \\ &+ \left(c_0 + \binom{n-1}{1} c_1 \lambda + \cdots + c_{n-1} \lambda^{n-1}\right) w_0 = 0 \\ &\left(a_1 + \binom{n-1}{1} a_2 \lambda + \cdots + a_n \lambda^{n-1}\right) u_0 \\ &+ \left(b_1 + \binom{n-1}{1} b_2 \lambda + \cdots + b_n \lambda^{n-1}\right) v_0 \\ &+ \left(c_1 + \binom{n-1}{1} c_2 \lambda + \cdots + c_n \lambda^{n-1}\right) w_0 = 0, \end{aligned}$$

oder kürzer

$$\begin{aligned} M u_0 + N v_0 + P w_0 &= 0 \\ M' u_0 + N' v_0 + P' w_0 &= 0. \end{aligned}$$

Wir lösen diese Gleichungen nach den Coordinaten u_0, v_0, w_0 auf und erhalten dann die Gleichung der Tangente der Curve $\mathsf{A} = 0$ im Punkte λ in der Form:

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0.$$

Führt man die angedeutete Operation wirklich aus, so erhält man, wenn man Determinanten von vier Elementen durch ihr erstes eingeklammertes Glied bezeichnet:

$$\varrho u_0 : \varrho v_0 : \varrho w_0 = (NP') : (PM') : (MN'),$$

wo ϱ ein den drei Functionen (NP'), (PM'), (MN') etwa gemeinsamer Factor ist, dessen Ordnung in λ wir durch $\varkappa$ bezeichnen wollen. Die Gleichung der Tangente im Punkte λ der Curve $\mathsf{A} = 0$ ist deshalb die folgende:

$$\frac{1}{\varrho} \left\{ (NP')\, x + (PM')\, y + (MN')\, z \right\} = 0^{*}),$$

oder auch, nach Potenzen von λ geordnet:

$$(4) \qquad \Gamma \equiv C_0 + \left(\frac{2(n-1)-\varkappa}{1}\right) C_1 \lambda + \cdots + C_{2(n-1)-\varkappa} \lambda^{2(n-1)-\varkappa} = 0,$$

Es mag dabei hier schon bemerkt werden, dass man aus Δ die linke Seite der Tangentengleichung findet, wenn man die i^{te} Horizontal- und die k^{te} Verticalreihe von Δ resp. mit λ^{i-1} und λ^{k-1} multiplicirt und hierauf alle Horizontalreihen und dann alle Verticalreihen addirt. Dasjenige Glied der so umgewandelten Determinante, welches alle Glieder von Δ, mit gewissen Potenzen von λ multiplicirt, enthält, ist die linke Seite der Tangentengleichung der Curve.

*) Ist die gegebene Curve $\mathsf{A} = 0$ eine Gerade, so ist es nicht möglich, diese Gleichung zu bilden; es gelten deshalb für die Gerade auch die folgenden Betrachtungen nicht mehr.

wo die C lineare homogene Functionen von x, y, z sind, $2(n-1)-\varkappa$ aber die Classe der Curve angiebt.

Da hiernach jede Curve $\mathsf{A} = 0$ sich auch durch eine Gleichung von der Form $\Gamma = 0$ darstellen lässt, *so müssen von allen Sätzen, welche als eine Folge der* **allgemeinen** *Gleichung* $\mathsf{A} = 0$ *angesehen werden können, die reciproken für* **dieselbe Curve** *Geltung haben*, indem sie ebenso mit Hülfe der Gleichung $\Gamma = 0$ der Curve bewiesen werden können, als die bereits gefundenen mit Hülfe der Gleichung $\mathsf{A} = 0$.

Um noch zu untersuchen, unter welchen Umständen ein solcher Factor ϱ, von dem oben die Rede war, auftritt, vergegenwärtigen wir uns den Weg, den wir eingeschlagen haben, um aus der Punktgleichung der Curve ihre Tangentengleichung abzuleiten. Wir haben erkannt, dass jede Gerade (u, v, w), deren Coordinaten den Gleichungen (3) genügen, zwei unendlich nahe Punkte der Curve $\mathsf{A} = 0$ verbindet. Jede solche Gerade ist unzweideutig bestimmt und Tangente im Punkte λ, so lange derselbe kein Rückkehrpunkt ist. Im letztern Falle verbinden aber alle durch ihn hindurchgehenden Geraden zwei unendlich nahe Punkte der Curve und es wird deshalb der Gleichung

$$(NP')\,x + (PM')\,y + (MN')\,z = 0$$

durch die Coordinaten eines jeden Punktes, der auf einer solchen Geraden liegt, d. h. eines jeden Punktes der Ebene genügt werden müssen, was nur denkbar ist, wenn die Coëfficienten (NP'), (PM'), (MN'), für das entsprechende λ verschwinden. Hiernach giebt der Grad des Factors ϱ die Zahl der Rückkehrpunkte der Curve an, während ihre Lage durch die Wurzeln der Gleichung $\varrho = 0$ bestimmt werden. Auch lehrt ein Blick auf (4), dass die Classe der Curve durch jeden Rückkehrpunkt um eine Einheit erniedrigt wird, was mit der ersten Plücker'schen Formel übereinstimmt, wonach die Classe m einer Curve n^{ter} Ordnung mit δ Doppel- und $\varkappa$ Rückkehrpunkten gegeben ist durch die Gleichung:

$$m = n\,(n-1) - 2\delta - 3\varkappa.$$

Da nun in unserem Falle

$$\delta + \varkappa = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}$$

ist, so folgt, dass $m = 2\,(n-1) - \varkappa$.

Da die Tangentengleichung den Parameter λ im m^{ten} Grade enthält, so besitzt sie $3\,(m+1)$ Constanten, während in die Punktgleichung nur $3\,(n+1)$ eingehen. Ist $m > n$, so können erstere nicht sämmtlich von einander unabhängig sein, sondern, da eine Curve stets durch die nämliche Zahl von Bedingungen bestimmt sein muss, müssen von ihnen $3\,(m-n) = i - \varkappa$ (Plücker'sche Formel), wo i die Zahl der Wendepunkte der Curve ist, Functionen der übrigen sein, und es stellt unsere Tangentengleichung deshalb auch nicht eine allge-

Prof. Clebsch. Göttingen

meine Curve m^{ter} Classe mit $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Doppel- und Wendetangenten dar, sondern eine speciellere Art.

Die Lage der Rückkehr- und Wendepunkte der Curve kann man leicht bestimmen, wenn man beachtet, dass die Wendetangenten sowohl, wie die Rückkehrtangenten die Curve in drei aufeinanderfolgenden Punkten treffen. Ist deshalb $\mathsf{A} = 0$ die Punktgleichung der Curve, so müssen die drei Gleichungen bestehen:

$$\mathsf{A} = 0, \quad \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathsf{A}}{\partial \lambda^2} = 0,$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, die folgenden:

$$A_0 + \binom{n-2}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_{n-2}\, \lambda^{n-2} = 0,$$

$$A_1 + \binom{n-2}{1} A_2 \lambda + \cdots + A_{n-1}\, \lambda^{n-2} = 0,$$

$$A_2 + \binom{n-2}{1} A_3 \lambda + \cdots + A_n\, \lambda^{n-2} = 0.$$

Durch Elimination von u, v, w aus diesen Gleichungen erhält man eine Gleichung vom Grade $3(n-2)$ in λ, durch deren Wurzeln die Wende- und Rückkehrpunkte der Curve bestimmt sind. Welche dieser Wurzeln den einen oder den andern entsprechen, erkennt man leicht, wenn man bedenkt, dass man, ausgehend von der Tangentengleichung der Curve, zur Punktgleichung wieder zurückkehren kann, und dass diese neue Punktgleichung, wie die alte, in λ vom n^{ten} Grade sein muss, oder dass

$$2(m-1) - i = n.$$

Da nun aber $m = 2(n-1) - \varkappa$, so ergiebt sich

$$3(n-2) = 2\varkappa + i.$$

Die Doppelwurzeln unserer Gleichung entsprechen demnach den Rückkehrpunkten, die einfachen den Wendepunkten. Zu einer ähnlichen Gleichung $3(m-2)^{\text{ten}}$ Grades gelangt man, wenn man, die Tangentengleichung als gegeben vorausgesetzt, diejenigen Punkte sucht, für welche drei der Berührungspunkte der Tangenten zusammenfallen, die man von jenen an die Curve ziehen kann. Der Grad der resultirenden Gleichung $3(m-2)$ ist gleich der doppelten Zahl der Wendepunkte *plus* der Zahl der Rückkehrpunkte der Curve $= 2i + \varkappa$.

Die beiden zuletzt erhaltenen Gleichungen haben dieselben Wurzeln, mit dem Unterschiede, dass die einfachen Wurzeln der einen Gleichung Doppelwurzeln der andern sind, und umgekehrt.

Besonderes Interesse verdient noch der Fall, in welchem $m = n$, dann ist auch $i = \varkappa$, da allgemein $3(m-n) = i - \varkappa$, ferner ist auch

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \varkappa = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - i,$$

d. h. $\delta = \tau$. Die Anzahl der Doppelpunkte der Curve ist gleich der Zahl ihrer Doppeltangenten. Ferner sind die beiden Gleichungen, welche zur Aufsuchung der Doppel- und Wendepunkte dienen können, von gleichem Grade, beide haben ebensoviele Doppelwurzeln als einfache, und es sind, wie im allgemeinen Falle, die einfachen Wurzeln der einen Gleichung Doppelwurzeln der andern und umgekehrt.

§ 4.

Projectivische Punktreihen und Strahlenbüschel. Erweiterung des Begriffs der Polaren. Das Reciprocitätsgesetz.

Die Gleichung

$$A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0, \tag{1}$$

in welcher die A, gleich Null gesetzt, gewisse Punkte repräsentiren, stellt nach dem Früheren alle Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung dar, wenn man λ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt. Jedem Werthe von λ entspricht ein bestimmter Punkt der Curve, und jedem Punkte der Curve, — wenigstens so lange der Punkt kein Doppelpunkt ist — ein bestimmter Werth von λ. Betrachten wir nun neben der Gleichung (1) noch die folgende:

$$B_0 + \binom{m}{1} B_1 \lambda + \cdots + B_m \lambda^m = 0, \tag{2}$$

wo die B, gleich Null gesetzt, ebenfalls gewisse Punkte repräsentiren, so wird auch diese Gleichung für jeden Werth von λ einen Punkt einer Curve m^{ter} Ordnung mit $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten darstellen, und umgekehrt entspricht einem Punkte der Curve im Allgemeinen ein ganz bestimmter Werth von λ. Durch einen beliebigen Punkt der einen Curve ist also im Allgemeinen ein ganz bestimmter Werth von λ und dadurch wieder ein ganz bestimmter Punkt der zweiten Curve gegeben. Von zwei so in Beziehung gesetzten Punkten der beiden Curven wollen wir nun sagen, dass sie einander *entsprechen*. Wir wollen nun zeigen, dass in dieser Weise einem *jeden* Punkte der einen Curve ein *ganz bestimmter* Punkt der zweiten Curve entpricht und umgekehrt.

Wir gehen aus von den beiden Punkten

$$A_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad B_0 = 0,$$

welche in beiden Curven dem Werthe $\lambda = 0$ entsprechen, gehen sodann in einer der Curven weiter, bestimmen für jeden Punkt, den wir dabei passiren, das zugehörige λ und den entsprechenden Punkt der andern Curve. So lange wir in der ersten Curve zu keinem Doppelpunkt gelangen, ändert sich λ stetig, mithin auch die Lage des

entsprechenden Punktes der zweiten Curve. Die Zweideutigkeit für λ in einem Doppelpunkte der ersten Curve wird vermieden, wenn man beim Weitergehen stets denjenigen Werth von λ wählt, welcher von dem λ des unmittelbar vorher überschrittenen Punktes nur unendlich wenig verschieden ist, und es wird unter dieser Voraussetzung *jedem* Punkte der einen Curve nur *ein ganz bestimmter* Punkt der zweiten Curve entsprechen und umgekehrt.

Ist eine der beiden Curven durch eine Tangentengleichung gegeben, so entsprechen die *Tangenten* derselben *eindeutig* den Punkten der andern Curve, und sind beide Curven durch Tangentengleichungen repräsentirt, so entsprechen sich die *Tangenten* derselben ebenfalls eindeutig.

Wir sehen nun künftig jede Curve (1) als Folge der Punkte an, wie sie durch die stetig aufeinander folgenden Werthe von λ bestimmt werden, und nennen diese Punktfolge eine *krummlinige Punktreihe n^{ter} Ordnung*. Ebenso betrachten wir eine Curve

$$C_0 + \binom{\nu}{1} C_1 \lambda + \cdots + C_\nu \lambda^\nu = 0,$$

wo die C, gleich Null gesetzt, gewisse gerade Linien repräsentiren, als Einhüllende der aufeinander folgenden Tangenten derselben, und nennen die Gesammtheit der letztern ein *krummliniges Strahlenbüschel ν^{ter} Ordnung*. Punktreihe und Strahlenbüschel fassen wir unter dem Namen *geometrisches Gebilde* zusammen und verstehen unter *Element* eines geometrischen Gebildes die einzelnen Punkte oder die einzelnen Strahlen (Tangenten), aus denen die Punktreihe oder das Strahlenbüschel zusammengesetzt ist. Ferner sollen zwei geometrische Gebilde *projectivisch* heissen, wenn zwischen ihren Elementen eine solche Relation besteht, dass jedem Element des einen Gebildes ein einziges bestimmtes Element des andern Gebildes entspricht, und einem jeden Element dieses zweiten Gebildes nur ein bestimmtes Element des ersten Gebildes.*)

Hiernach stellen die beiden Gleichungen

$$A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0,$$
$$B_0 + \binom{m}{1} B_1 \lambda + \cdots + B_m \lambda^m = 0,$$

wo die A und die B, gleich Null gesetzt, gewisse Punkte oder gerade Linien repräsentiren, projectivische Gebilde von den Ordnungen m und n dar.**)

---

*) Man vgl. hiermit Cremona a. a. O. pag. 10; ferner Hesse a. a. O. p. 35. Reye, Geometrie der Lage I. Hannover. Carl Rümpler 1866. pag. 103.

**) Stellt die erste Gleichung eine Punktreihe, die zweite einen Strahlenbüschel dar, so werden $(m+n)$ reelle oder imaginäre Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Punktreihe hindurchgehen.

Die erste Polare einer Curve $f(x, y, z) = 0$ in Bezug auf den Punkt (x_0, y_0, z_0) als Pol, ist repräsentirt durch die Gleichung

$$x_0 \cdot f'(x) + y_0 \cdot f'(y) + z_0 \cdot f'(z) = 0.$$

Alle ersten Polaren einer Curve bilden ein *Netz*, wenn man darunter die zweifach unendliche Schaar von Curven versteht, die sich durch Gleichungen darstellen lassen, deren rechte Seite gleich Null, und deren linke lineare ganze Functionen der linken Seiten von drei (in gewöhnlicher Form) gegebenen Curvengleichungen gleichen Grades sind. So stellt die Gleichung

$$a \cdot f_0 + b \cdot f_1 + c \cdot f_2 = 0$$

eine Curve des Netzes dar, welches durch die drei Curven n^{ten} Grades $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ bestimmt ist; a, b, c sind constante Grössen. Betrachtet man dieselben als Coordinaten eines Punktes, so kann man

(3) $$a \cdot f_0 + b \cdot f_1 + c \cdot f_2 = 0$$

als (*nullte*) *Polare des Netzes in Bezug auf* (a, b, c) *als Pol**) bezeichnen. Dabei muss übrigens angegeben werden, in welcher Ordnung die Functionen f_0, f_1, f_2 mit a, b, c multiplicirt werden sollen.

Wir nehmen nun drei beliebige gerade Linien:

$$f_0 \equiv m_0 x + n_0 y + p_0 z = 0,$$
$$f_1 \equiv m_1 x + n_1 y + p_1 z = 0,$$
$$f_2 \equiv m_2 x + n_2 y + p_2 z = 0$$

als *Fundamentalcurven* eines Netzes an, und suchen in Bezug auf dasselbe die nullte Polare eines beliebigen Punktes der Curve:

(4) $$A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \binom{n}{2} A_2 \lambda^2 + \cdots + A_n \lambda^n = 0.$$

Dieselbe hat zur Gleichung:

$$\left(a_0 + \binom{n}{1} a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n\right) f_0 + \left(b_0 + \binom{n}{1} b_1 \lambda + \cdots + b_n \lambda^n\right) f_1$$
$$+ \left(c_0 + \binom{n}{1} c_1 \lambda + \cdots + c_n \lambda^n\right) f_2 = 0,$$

welcher man auch die Form geben kann:

(5) $$B_0 + \binom{n}{1} B_1 \lambda + \cdots + B_n \lambda^n = 0,$$

wo die einzelnen B lineare homogene Functionen von x, y, z sind. Die nullten Polaren der Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung mit

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Doppel- und Rückkehrpunkten werden also umhüllt von einer Curve

*) Für diese nullte Polare gelten sehr viele der Sätze, die für die gewöhnliche Polare Geltung haben. Besonderen Vortheil dürfte diese Erweiterung des Begriffs der Polaren für die Theorie des Netzes gewähren.

n^{ter} Classe mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Wendetangenten. Sieht man ferner (4) als Gleichung einer Punktreihe, (5) als Gleichung eines Strahlenbüschels an, so erkennt man die Wahrheit des folgenden Satzes:

Durchläuft ein Punkt eine Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel - und Rückkehrpunkten, so bildet seine Polare *) ein Strahlenbüschel n^{ter} Ordnung, dessen Einhüllende eine Curve n^{ter} Classe mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Wendetangenten ist. Punktreihe und Strahlenbüschel sind dabei projectivische geometrische Gebilde.

Setzt man

$$f_0 \equiv x = 0\ ,\ f_1 \equiv y = 0\ ,\ f_2 \equiv z = 0,$$

d. h. nimmt man die beiden Coordinatenaxen und die unendlich entfernte Gerade der durch sie bestimmten Ebene als Fundamentalgeraden des Netzes, so hat ein beliebiger Punkt λ der Curve (4) zur Polare die Gerade:

$$\left(a_0 + \binom{n}{1} a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n\right) x + \left(b_0 + \binom{n}{1} b_1 \lambda + \cdots + b_n \lambda^n\right) y$$
$$+ \left(c_0 + \binom{n}{1} c_1 \lambda + \cdots + c_n \lambda^n\right) z = 0.$$

Nennt man der Kürze halber die Einhüllende der Polaren der verschiedenen Punkte der gegebenen Curve die *Polare der Curve*, so kann man sagen, dass man in unserem Falle die Gleichung der Polare der gegebenen Curve erhält, wenn man u, v, w durch x, y, z ersetzt, und hieraus schliesst man weiter, dass man die Eigenschaften der gegebenen Curve und ihrer Polare zugleich erhält, wenn man die Coordinaten in doppelter Weise geometrisch interpretirt.

Dass man, ausgehend von der Tangentengleichung einer Curve, durch Anwendung einer analogen Betrachtungsweise zu reciproken Ergebnissen gelangt, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

§ 5.

Abhängigkeit des Weges, welchen beliebige Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten einschlagen, von den Wegen, welche die Orientirungspunkte der Curve durchlaufen.

Unter den *Orientirungspunkten* einer Curve n^{ter} Ordnung mit

*) Wo nicht ausdrücklich das Gegentheil ausgesprochen ist, bedeutet Polare immer die nullte Polare, genommen in Bezug auf ein durch drei gegebene Gerade bestimmtes Netz.

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Doppel- und Rückkehrpunkten verstehen wir jene Punkte, welche repräsentirt werden durch die gleich Null gesetzten Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von λ in der Punktgleichung der Curve.

Ist die Curve durch ihre Tangentengleichung gegeben, so nennen wir die Geraden, welche durch die gleich Null gesetzten Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von λ repräsentirt werden, die *Orientirungsgeraden* der Curve.

Aus § 1. folgt, dass jede Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten auf unendlich viele Arten durch Punktgleichungen dargestellt werden kann, da ferner nach § 3. aus jeder Punktgleichung einer Curve eine Tangentengleichung derselben abgeleitet werden kann, so hat eine jede solche Curve auch unendlich viele Tangentengleichungen. Jeder einzelnen Darstellungsweise gehört ein *System* von $(n+1)$ Orientirungspunkten und ein *System* von

$$2(n-1)-\varkappa$$

Orientirungsgeraden an, die wir als *zusammengehörig* bezeichnen wollen.

Wir nehmen jetzt an, es seien zwei Curven n^{ter} Ordnung gegeben:

$$(1)\quad \begin{cases} A_0 + \binom{n}{1} A_1\lambda + \cdots + A_n\lambda^n = 0 \\ B_0 + \binom{n}{1} B_1\lambda + \cdots + B_n\lambda^n = 0, \end{cases}$$

wo

$$A_i \equiv a_i u + a_i' v + a_i'' w \quad \text{und} \quad B_i \equiv b_i u + b_i' v + b_i'' w.$$

Die Einhüllende der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte dieser beiden Curven:

$$(2)\quad \begin{vmatrix} x & a_0 + \binom{n}{1} a_1\lambda + \cdots a_n\lambda^n & b_0 + \binom{n}{1} b_1\lambda + \cdots b_n\lambda^n \\ y & a_0' + \binom{n}{1} a_1'\lambda + \cdots a_n'\lambda^n & b_0' + \binom{n}{1} b_1'\lambda + \cdots b_n'\lambda^n \\ z & a_0'' + \binom{n}{1} a_1''\lambda + \cdots a_n''\lambda^n & b_0'' + \binom{n}{1} b_1''\lambda + \cdots b_n''\lambda^n \end{vmatrix} = 0$$

ist von der $2n^{ten}$ Classe. Von den Tangenten dieser Curve gehen im Allgemeinen $3n$ durch die ihnen entsprechenden Punkte der Curve

$$(3)\qquad C_0 + \binom{n}{1} C_1\lambda + \cdots + C_n\lambda^n = 0.$$

Im Falle jedoch, dass $3n+1$ dieser Geraden die ebengenannte Eigenschaft besitzen, kommt sie allen zu, und wir haben deshalb den Satz:

Liegen $3n+1$*mal je drei einander entsprechende Punkte von drei*

Curven n^{ter} Ordnung (1) *und* (3) *auf einer Geraden, so gilt dies für alle einander entsprechende Punkte der drei Curven.**)

Wird der Bedingung dieses Satzes genügt, so verschwinden alle Coëfficienten der Gleichungen $3n^{\text{ten}}$ Grades:

$$\begin{vmatrix} c_0 + \binom{n}{1} c_1\lambda + \cdots c_n\lambda^n & a_0 + \binom{n}{1} a_1\lambda + \cdots a_n\lambda^n & b_0 + \binom{n}{1} b_1\lambda + \cdots b_n\lambda^n \\ c_0' + \binom{n}{1} c_1'\lambda + \cdots c_n'\lambda^n & a_0' + \binom{n}{1} a_1'\lambda + \cdots a_n'\lambda^n & b_0' + \binom{n}{1} b_1'\lambda + \cdots b_n'\lambda^n \\ c_0'' + \binom{n}{1} c_1''\lambda + \cdots c_n''\lambda^n & a_0'' + \binom{n}{1} a_1''\lambda + \cdots a_n''\lambda^n & b_0'' + \binom{n}{1} b_1''\lambda + \cdots b_n''\lambda^n \end{vmatrix} = 0$$

Dadurch erhalten wir zur Bestimmung der c $3n+1$ Gleichungen, also eine zu wenig. Setzen wir nun voraus, dass die ersten Orientirungspunkte A_0, B_0, C_0 zu den einander entsprechenden Punkten gehören, von denen wir wissen, dass sie in gerader Linie liegen. — Sollte dies nicht der Fall sein, so können immerhin durch eine Transformation von der Form

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta\lambda'}{\gamma + \delta\lambda'}$$

drei einander entsprechende Punkte zu ersten Orientirungspunkten gemacht werden. — Wir setzen dann

$$c_0 = a_0 + \mu b_0, \; c_0' = a_0' + \mu b_0', \; c_0'' = a_0'' + \mu b_0'',$$

wo μ einen durch die gegenseitige Lage der Punkte A_0, B_0, C_0 bedingten Werth hat. Zur Bestimmung der Verhältnisse der übrigen c, deren Anzahl gleich $3n-1$ ist, haben wir noch $3n$ Gleichungen, denen aber, inFolge unserer Voraussetzung, zugleich genügt wird. Man erkennt daraus, dass allgemein

(4) $\quad c_i = a_i + \mu b_i \;, \; c_i' = a_i' + \mu b_i' \;, \; c_i'' = a_i'' + \mu b_i'',$

woraus der Satz folgt:

> Durchlaufen $3n+1$ Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten geradlinige projectivische Punktreihen, so durchlaufen alle Punkte der Curve, wie auch *sämmtliche* Orientirungspunkte derselben geradlinige Punktreihen, welche zu den ersten projectivisch sind, alle

---

*) Diesem Satze entspricht der allgemeinere:

„Liegen $(m+n+p+1)$mal je drei einander entsprechende Punkte von drei Curven m^{ter}, n^{ter}, p^{ter} Ordnung auf einer Geraden, so gilt dies für alle einander entsprechenden Punkte der Curven."

Die Curven der $2n^{\text{ten}}$ Classe, welche die entsprechenden Punkte der Curven

$$A_0 + \binom{n}{1} A_1\lambda + \cdots + A_n\lambda^n = 0, \; B_0 + \binom{n}{1} B_1\lambda + \cdots + B_n\lambda^n = 0$$

verbindet, besitzt $(2n-1)(n-1)$ Doppel- und Wendetangenten. Dieselben verbinden zweimal zwei entsprechende Punkte der Curven (1).

Orientirungsgeraden aber werden von Strahlenbüscheln zweiter Ordnung umhüllt, welche ebenfalls zu jenen Punktreihen projectivisch sind.*) Denn es hat, wie aus Obigem hervorgeht, die dritte Curve die Gleichung:

$$\Big\{\Big(a_0 + \binom{n}{1} a_1\lambda + \cdots a_n\lambda^n\Big) u + \Big(a_0' + \binom{n}{1} a_1'\lambda + \cdots a_n'\lambda^n\Big) v$$
$$+ \Big(a_0'' + \binom{n}{1} a_1''\lambda + \cdots a_n''\lambda^n\Big) w\Big\}$$
$$+ \mu\Big\{\Big(b_0 + \binom{n}{1} b_1\lambda + \cdots b_n\lambda^n\Big) u + \Big(b_0' + \binom{n}{1} b_1'\lambda + \cdots b_n'\lambda^n\Big) v$$
$$+ \Big(b_0'' + \binom{n}{1} b_1''\lambda + \cdots b_n''\lambda^n\Big) w\Big\} = 0.$$

Hieraus erkennt man aber sofort, dass jeder Punkt λ, wenn μ sich ändert, auf einer Geraden weiter geht, sowie dass alle so entstehenden Punktreihen projectivisch sind.**)

Die Gleichungen (4) lassen unmittelbar erkennen, dass auch die gegebenen Orientirungspunkte solche Punktreihen durchlaufen. Um zu zeigen, dass dies für *sämmtliche* Orientirungspunkte gilt, erinnern wir uns, dass aus einer gegebenen Gleichung jede andere derselben Curve erhalten werden kann durch eine Transformation von der Form

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta\lambda'}{\gamma + \delta\lambda'}.$$

Führen wir diese Transformation aus, so zeigen sich die Gleichungen der neuen Orientirungspunkte aus denen der alten linear zusammengesetzt, woraus sofort die Richtigkeit obigen Satzes erkannt wird. Was endlich die Orientirungsgeraden angeht, so sieht man die Richtigkeit des auf sie sich beziehenden Satzes sofort ein, wenn man zur Tangentengleichung der Curve übergeht.

Der letzte Theil des eben bewiesenen Satzes kann unmittelbar erweitert werden, wodurch man zu dem folgenden kommt, dessen Beweis einfach ist.

Wenn die zusammengehörigen Orientirungspunkte einer Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten projectivische Punktreihen ν^{ter} Ordnung durchlaufen, so durchlaufen alle Punkte und *sämmtliche* Orientirungspunkte der gegebenen Curve Punktreihen ν^{ter} Ordnung, die Orientirungsgeraden aber werden von Strahlenbüscheln $2\nu^{ter}$ Ordnung um-

---

*) Es ist hiernach möglich, wenn drei Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten vorliegen, die der Bedingung oben stehenden Satzes genügen, unendlich viele solcher Curven *linear* zu construiren.

**) Da durch λ und μ jedesmal ein Punkt bestimmt wird, so kann man sie als eine Art Coordinaten ansehen.

hüllt, welche den Punktreihen der gegebenen Orientirungspunkte projectivisch sind.

Anmerkung. Die eben vorgeführten Entwicklungen führen unmittelbar zu den Begriffen projectivischer und involutorischer Curvenreihen, indem man zwei Curvenreihen

$$A_0 + \mu A_1 = 0, \qquad B_0 + \nu B_1 = 0,$$

(wo $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $B_0 = 0$, $B_1 = 0$ die Punktgleichungen von Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung darstellen), projectivisch nennen kann, wenn die Parameter μ und ν durch eine lineare Gleichung verbunden sind, von einer Curvenreihe $C_0 + \varrho C_1 = 0$ aber sagt, sie bilde eine Involution p^{ter} Ordnung, wenn der Parameter ϱ durch eine Gleichung von der Form gegeben ist

$$(\alpha_0 + \alpha_1 \varrho + \cdots + \alpha_p \varrho^p) + \omega\,(\beta_0 + \beta_1 \varrho + \cdots + \beta_p \varrho^p) = 0,$$

wo die α und β Constanten, ω aber ein neuer Parameter ist.

§ 6.

Zur Construction der Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten.

Mit Hülfe der im vorigen Paragraphen gegebenen Sätze ist es möglich, beliebig viele Curven n^{ter} Ordnung mit möglichst vielen Doppel- und Rückkehrpunkten zu construiren.

Denken wir uns nämlich, es sei eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gegeben und es durchlaufen $3(n-1)+1$ ihrer Punkte — und demnach alle — geradlinige projectivische Punktreihen,*) was wir durch die Gleichung andeuten:

$$(A_0 + \mu B_0) + \binom{n-1}{1}(A_1 + \mu B_1)\lambda + \cdots + (A_{n-1} + \mu B_{n-1})\lambda^{n-1} = 0,$$

und nehmen auf der Geraden, welche der Punkt λ beschreibt, denjenigen Punkt, welcher dem Parameter $\mu = \lambda$ entspricht, so hat derselbe die Gleichung:

$$(A_0 + \lambda B_0) + \binom{n-1}{1}(A_1 + \lambda B_1)\lambda + \cdots + (A_{n-1} + \lambda B_{n-1})\lambda^{n-1} = 0,$$

woraus hervorgeht, dass der so erhaltene Punkt auf einer Curre n^{ter} Ordnung liegt. Die Orientirungspunkte der neuen Curve sind:

$$A_0 = 0,\ B_0 + \binom{n-1}{1}A_1 = 0 \ldots \binom{n-1}{1}B_{n-2} + A_{n-1} = 0,\ B_{n-1} = 0.$$

Auf eine specielle Art dieser Methode, Curven n^{ter} Ordnung mit mög-

*) Dem entspricht ein allgemeinerer Satz, zu dem man gelangt, wenn man die Orientirungspunkte krummlinige projectivische Punktreihen auf Curven mit möglichst vielen Doppel- und Rückkehrpunkten durchlaufen lässt.

lichst vielen Doppel- und Rückkehrpunkten zu construiren, wollen wir im Folgenden näher eingehen.

Es sei die Punktgleichung

(1) $$A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0$$

einer Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten gegeben. Wir haben früher gesehen, dass eine Gerade (u, v, w) Tangente dieser Curve ist, wenn sie entsprechende Punkte der beiden Curven verbindet:

(2) $$\begin{aligned} A_0 + \binom{n-1}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_{n-1} \lambda^{n-1} &= 0, \\ A_1 + \binom{n-1}{1} A_2 \lambda + \cdots + A_n \lambda^{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Hat nun λ einen constanten Werth, μ dagegen einen veränderlichen, so können wir

(3) $$\left(A_0 + \binom{n-1}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_{n-1} \lambda^{n-1}\right) + \mu \left(A_1 + \binom{n-1}{1} A_2 \lambda + \cdots + A_n \lambda^{n-1}\right) = 0$$

als Gleichung der Tangente im Punkte λ der Curve (1) ansehen. Den Berührungspunkt findet man, wenn man $\mu = \lambda$ setzt.

Sieht man also zwei demselben λ entsprechende Punkte der Curven (2) als Orientirungspunkte einer Geraden an, und bestimmt auf ihr den Punkt, welcher demselben λ entspricht, so kommt man zu dem Punkt λ der Curve (1).

Wir nehmen jetzt an, es seien die Orientirungspunkte der Curve (1) gegeben, ausserdem aber noch die Punkte:

(4) $$A_0 + \lambda' A_1 = 0 \ , \ A_1 + \lambda' A_2 = 0 \ , \ \ldots \ A_{n-1} + \lambda' A_n = 0,$$

wo λ' irgend ein bestimmter Werth des Parameters λ ist. Alsdann ist es möglich, alle einander entsprechenden Punkte der geradlinigen Punktreihen

(5) $$A_0 + \lambda A_1 = 0 \ , \ A_1 + \lambda A_2 = 0 \ , \ \ldots \ A_{n-1} + \lambda A_n = 0$$

linear zu construiren. Betrachten wir nun zwei aufeinander folgende dieser Reihen:

$$A_i + \lambda A_{i+1} = 0 \quad , \quad A_{i+1} + \lambda A_{i+2} = 0.$$

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte derselben werden umhüllt von dem Kegelschnitt

(6) $$A_i + 2 A_{i+1} \lambda + A_{i+2} \lambda^2 = 0,$$

und die Tangente dieses Kegelschnitts im Punkte λ hat die Gleichung:

(7) $$(A_i + \lambda A_{i+1}) + \mu (A_{i+1} + \lambda A_{i+2}) = 0.$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, den Berührungspunkt dieser Tangente und damit also einen Punkt des Kegelschnitts zu finden.

Zunächst bemerken wir, dass, wenn wir in (6) für u, v, w einmal die Coordinaten der Verbindungsgeraden der Punkte

$$A_i = 0 \quad , \quad A_{i+1} = 0,$$

das andere Mal die Coordinaten der Verbindungsgeraden der Punkte

$$A_{i+1} = 0 \quad \text{und} \quad A_{i+2} = 0$$

einsetzen, die Werthe von λ, welche den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit dem Kegelschnitt (6) entsprechen, gefunden werden aus den Gleichungen:

$$\lambda^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\lambda^2} = 0.$$

Es müssen demnach beide Geraden den Kegelschnitt in 2 unmittelbar aufeinander folgenden Punkten schneiden, d. h. den Kegelschnitt berühren.

Darnach sind

$$(8) \qquad A_i + \mu A_{i+1} = 0 \quad \text{und} \quad A_{i+1} + \mu A_{i+2} = 0$$

die Gleichungen der Tangenten in den Punkten $A_i = 0$ und $A_{i+2} = 0$ des Kegelschnitts (6). Diese zusammen mit (7), bilden ein dem Kegelschnitt umschriebenes Dreieck. Da wir nun die Berührungspunkte der beiden Geraden (8) kennen, so können wir den der Geraden (7), d. h. den Punkt λ des Kegelschnitts (6) leicht finden mit Hülfe des bekannten Satzes:

„Verbindet man in einem Dreieck, welches einem Kegelschnitt umschrieben ist, die Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten, so schneiden sich diese drei Geraden in einem Punkte.“

Wir verbinden jetzt zwei (demselben λ) entsprechende Punkte der beiden Kegelschnitte:

$$A_i + 2A_{i+1}\lambda + A_{i+2}\lambda^2 = 0,$$
$$A_{i+1} + 2A_{i+2}\lambda + A_{i+3}\lambda^2 = 0.$$

Die Verbindungsgerade kann dargestellt werden durch die Gleichung:

$$(9) \quad (A_i + 2A_{i+1}\lambda + A_{i+2}\lambda^2) + \mu\,(A_{i+1} + 2A_{i+2}\lambda + A_{i+3}\lambda^2) = 0,$$

wo λ constant, μ variabel ist. Setzt man $\mu = \lambda$, so kommt man zu dem Punkte, in welchem die eben construirte Gerade die Curve dritter Ordnung berührt:

$$(10) \qquad A_i + 3\,A_{i+1}\lambda + 3A_{i+2}\lambda^2 + A_{i+3}\lambda^3 = 0.$$

Wir wollen nun zeigen, wie man durch lineare Construction zu demselben gelangen kann.

Wir schreiben die Gleichung (9) zunächst in folgender Form:

$$(11) \qquad (A_i' + \lambda A_{i+1}') + \mu\,(A_{i+1}' + \lambda A_{i+2}') = 0,$$

wo

$$A_i' = A_i + \lambda A_{i+1}\ ,\ A_{i+1}' = A_{i+1} + \lambda A_{i+2}\ ,\ A_{i+2}' = A_{i+2} + \lambda A_{i+3}.$$

Sieht man die A' als gegeben an, so stellt (11) die Gleichung der Tangente des Kegelschnitts

$$A_i' + 2A_{i+1}' \lambda + A_{i+2}' \lambda^2 = 0$$

dar und zwar im Punkte λ. Ausser dieser Tangente kennen wir noch die in $(\lambda = 0)$ und in $(\lambda = \infty)$ nebst ihren Berührungspunkten; wir können deshalb auch den Berührungspunkt der Geraden (11), d. h. den Punkt λ der Curve (10) durch lineare Construction finden.

So können wir weitergehen. Wir denken uns die entsprechenden Punkte von Curven dritter, vierter, ... $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einander verbunden. Jede solche Verbindungsgerade kann als Tangente eines Kegelschnitts angesehen werden, dessen Orientirungspunkte entsprechende Punkte von Curven zweiter, dritter, ... $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sind. Denn es lässt sich beispielsweise die Gleichung

$$A_0 + \binom{n}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_n \lambda^n = 0$$

auch schreiben:

$$\begin{aligned} &\left(A_0 + \binom{n-2}{1} A_1 \lambda + \cdots + A_{n-2} \lambda^{n-2}\right) \\ + 2 &\left(A_1 + \binom{n-2}{1} A_2 \lambda + \cdots + A_{n-1} \lambda^{n-2}\right) \lambda \\ + &\left(A_2 + \binom{n-2}{1} A_3 \lambda + \cdots + A_n \lambda^{n-2}\right) \lambda^2 = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich nun folgende Regel zur Construction *eines* Punktes einer Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten, für den Fall, dass 1) die Orientirungspunkte und 2) auf den Verbindungsgeraden je zweier aufeinander folgenden Orientirungspunkte entsprechende Punkte gegeben sind.

Man nehme auf einer der Verbindungsgeraden zweier aufeinanderfolgenden Orientirungspunkte $(0, 1)$, $(1, 2)$, ... $(n-1, n)$ einen beliebigen Punkt an und bestimme sodann auf allen übrigen die ihm projectivisch entsprechenden. Diese Punkte seien $0'$, $1'$, ... $(n-1)'$. Auf ihren Verbindungsgeraden $(0', 1')$, $(1', 2')$, ... $((n-2)', (n-1)')$ suche man sodann (mit Hülfe des oben citirten Brianchon'schen Satzes) diejenigen Punkte, welche demselben Werthe von λ entsprechen. Man kommt so zu neuen Punkten: $0''$, $1''$, ... $(n-2)''$. Auf den Verbindungsgeraden dieser Punkte suche man wieder die Punkte λ u. s. w. So kommt man schliesslich zu Punkten $0^{(n-2)}$, $1^{(n-2)}$, $2^{(n-2)}$. Bestimmt man auf deren Verbindungsgeraden den Punkt λ und sucht

sodann endlich auf den Verbindungsgeraden der so gefundenen Punkte $0^{(n-3)}$, $1^{(n-3)}$ wieder den Punkt λ, so ist dieser ein Punkt unserer Curve.*)

Nachdem wir aus vorstehenden Entwicklungen erkannt haben, dass die Curven, mit denen wir uns hier beschäftigen, unter gewissen Voraussetzungen linear construirt werden können, wollen wir noch einige Sätze, die allgemeine Construction von Curven n^{ter} Ordnung mit

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Doppel- und Rückkehrpunkten betreffend, hier folgen lassen.

Wenn eine Curve C_n der n^{ten} mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten mit Hülfe projectivisch getheilter Curven m^{ter} und p^{ter} Classe, wo $m < p$ und $m + p = n$, construirt werden soll, so ist durch diese Aufgabe die Curve der m^{ten} Classe unzweideutig bestimmt.**)

Gesetzt nämlich, man könnte zur Construction der Curve C_n ausser den Curven m^{ter} und p^{ter} Classe zwei andere m'^{ter} und p'^{ter} Classe

$$(m' < p', \quad m' + p' = n)$$

verwenden, so würde der Punkt λ der Curve C_n auf den Tangenten λ der Curven m^{ter}, p^{ter}, m'^{ter} und p'^{ter} Classe zugleich liegen müssen, es würden sich also speciell die entsprechenden Tangenten der Curven m^{ter} und m'^{ter} Classe stets in Punkten der Curve C_n schneiden müssen, was im Allgemeinen unmöglich ist, da die entsprechenden Tangenten einer Curve m^{ter} und m'^{ter} Classe sich in Punkten einer Curve $(m + m')^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden und $m + m' < n$.

Ist $m = p$, so gilt diese Schlussweise nicht mehr, ebenso wenig, wenn C_n erzeugt wird mit Hülfe von Curven, deren Classensumme die Zahl n übersteigt.

Wir betrachten beispielsweise die Curve fünfter Ordnung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 & b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3 \\ v & a_0' + a_1\lambda + a_2'\lambda^2 & b_0' + b_1'\lambda + b_2'\lambda^2 + b_3'\lambda^3 \\ w & a_0'' + a_1''\lambda + a_2''\lambda^2 & b_0'' + b_1''\lambda + b_2''\lambda^2 + b_3''\lambda^3 \end{vmatrix} = 0,$$

erzeugt durch den Durchschnitt entsprechender Tangenten einer Curve zweiter und einer Curve dritter Classe. Multipliciren wir hier eine

---

*) Etwaige isolirte Punkte der Curve kann man auf diesem Wege nicht finden.

**) Die projectivische Theilung der Curve C_n ist dabei als bekannt vorausgesetzt.

der beiden letzten Verticalreihen mit einer ganzen rationalen Function von λ und addiren sie dann zur andern, so ändert sich Δ offenbar nicht, während an Stelle einer der beiden construirenden Curven eine von höherer Classe tritt. Da wir dieses Verfahren beliebig oft anwenden dürfen, so erhellt die Möglichkeit, mit Hilfe von Curven beliebig hoher Classe eine gegebene Curve zu erzeugen.

Durchschneiden sich umgekehrt die entsprechenden Tangenten zweier Curven m^{ter} und p^{ter} Classe $(m + p > n)$ in Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung, so müssen erstere durch solche niederer Classe ersetzt werden können, deren Gleichungen man (in Verbindung mit Transformationen) durch ein Verfahren erhält, welches dem oben beschriebenen entgegengesetzt ist. Ist nämlich die Gleichung der Curve n^{ter} Ordnung, sowie sie sich zunächst darstellt, die folgende

$$(12)\quad \begin{vmatrix} u & a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_m\lambda^m & b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_p\lambda^p \\ v & a_0' + a_1'\lambda + \ldots + a_m'\lambda^m & b_0' + b_1'\lambda + \ldots + b_p'\lambda^p \\ w & a_0'' + a_1''\lambda + \ldots + a_m''\lambda^m & b_0'' + b_1''\lambda + \ldots + b_p''\lambda^p \end{vmatrix} = 0,$$

so muss, wenn $m + p > n$, für einen bestimmten Werth λ' von λ sein

$$(13)\quad \begin{aligned} a_0 + a_1\lambda' + \ldots + a_m\lambda'^m &= \varrho'(b_0 + b_1\lambda' + \ldots + b_p\lambda'^p), \\ a_0' + a_1'\lambda' + \ldots + a_m'\lambda'^m &= \varrho'(b_0' + b_1'\lambda' + \ldots + b_p'\lambda'^p), \\ a_0'' + a_1''\lambda' + \ldots + a_m''\lambda'^m &= \varrho'(b_0'' + b_1''\lambda' + \ldots + b_p''\lambda'^p). \end{aligned}$$

Transformirt man die beiden Gleichungen:

$$(a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m)\,x + (a_0' + a_1'\lambda + \cdots + a_m'\lambda^m)\,y + (a_0'' + a_1''\lambda + \cdots + a_m''\lambda^m)\,z = 0$$
$$(b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_p\lambda^p)\,x + (b_0' + b_1'\lambda + \cdots + b_p'\lambda^p)\,y + (b_0'' + b_1''\lambda + \cdots + b_p''\lambda^p)\,z = 0,$$

so dass die Tangente, welche, den Gleichungen (13) gemäss, beide Curven entsprechend gemein haben, zugleich erste oder letzte Orientirungsgerade für beide Curven wird, und construirt sodann wieder die der Gleichung (12) analoge, so wird entweder

$$a_0 = \varrho_0 b_0,\ a_0' = \varrho_0 b_0',\ a_0'' = \varrho_0 b_0'',$$

oder

$$a_m = \varrho_1 b_p,\ a_m' = \varrho_1 b_p',\ a_m'' = \varrho_1 b_p''.$$

Tritt der letzte Fall ein, so kann, wenn $m + p > n + 1$ in Δ der Factor von λ^{m+p-1} identisch verschwinden, in welchem Falle

$$(14)\quad \begin{aligned} a_{m-1} &= \varrho_1 b_{p-1} + \varrho_2 b_p, \\ a_{m-1}' &= \varrho_1 b_{p-1}' + \varrho_2 b_p', \\ a_{m-1}'' &= \varrho_1 b_{p-1}'' + \varrho_2 b_p'' \end{aligned}$$

ist. Wenn $m + p > n - 2$, so kann ausserdem der Factor von λ^{m+p-2} verschwinden, also

$$(15)\quad \begin{aligned} a_{m-2} &= \varrho_1 b_{p-2} + \varrho_2 b_{p-1} + \varrho_3 b_p, \\ a_{m-2}' &= \varrho_1 b_{p-2}' + \varrho_2 b_{p-1}' + \varrho_3 b_p', \\ a_{m-2}'' &= \varrho_1 b_{p-2}'' + \varrho_2 b_{p-1}'' + \varrho_3 b_p'' \end{aligned}$$

sein u. s. w. f.

Haben die beiden construirenden Curven mehrere Tangenten entsprechend gemein, so verringert sich der Grad der resultirenden Gleichungen um ebensoviele Einheiten, als es solcher Tangenten giebt.

Ist alsdann der Grad dieser Gleichung noch zu hoch, so müssen Beziehungen bestehen, die den obigen (14), (15) ff. analog sind. Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Curven mit möglichst vielen Doppel- und Rückkehrpunkten *nach der niedrigsten Classe der sie construirenden Curven in Gruppen eingetheilt werden können.* Solcher Gruppen giebt es z. B. von Curven

2ter Ordnung	1,	entsprechend	der	Theilung		$2 = 1 + 1$
3 „ „	1,	„	„	„		$3 = 1 + 2$
4 „ „	2,	„	„	„	α)	$4 = 1 + 3$
					β)	$4 = 2 + 2$.

Der Weg, zu den Criterien zu gelangen, wornach sich die einzelnen Curvenarten unterscheiden lassen, wird der sein, die Gleichungen derselben aufzustellen und ihre Eigenschaften aufzusuchen. Man erhält so z. B. den Satz:

> Der Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen einer Curve C_m der m^{ten} Classe und eines Strahlenbüschels erster Ordnung ist eine Curve $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem m fachen Punkte, der mit dem Centrum des Strahlenbüschels zusammenfällt.*) Die m Tangenten in diesem Punkte sind die Strahlen des Büschels, welche den m, durch ihn gehenden Tangenten von C_m entsprechen.

Der Beweis des ersten Theiles dieses Satzes ist enthalten in den 3 Gleichungen:

$$A_0 + A_1\lambda + \cdots + A_m\lambda^m = 0$$
$$B_0 + \lambda B_1 = 0$$
$$A_0 B_1^m - A_1 B_1^{m-1} B_0 + \cdots + A_m B_0^m = 0,$$

der des zweiten fällt mit dem des nächsten Satzes zusammen.

Liegt das Centrum des Strahlenbüschels auf der Curve C_m selbst, so fallen zwei der durch dasselbe an C_m gezogenen Tangenten, mithin auch 2 der Tangenten des m fachen Punktes der neuen Curve zusammen; ist der betreffende Punkt ein Wendepunkt, so werden 3 der Tangenten zusammenfallen u. s. w.

Dem eben bewiesenen Satze corollar sind die folgenden:

1) Jede Curve n^{ter} Ordnung, welche einen $(n-1)$fachen Punkt

*) Für den Fall $m = 2$ vergleiche man: Plücker, System der analytischen Geometrie S. 191 ff.

besitzt, gehört zur ersten Gruppe der Curven n^{ter} Ordnung mit möglichst vielen Doppel- und Rückkehrpunkten.

2) Jede projectivisch getheilte Curve n^{ter} Ordnung mit möglichst vielen Doppel- und Rückkehrpunkten, welche sich aus einem ihrer Punkte durch einen Strahlenbüschel erster Ordnung projiciren lässt, hat einen $(n-1)$fachen Punkt, welcher mit dem Centrum des Büschels zusammenfällt. Jedes zu diesem Strahlenbüschel perspectivisch liegende geradlinige Punktgebilde hat demnach mit der Curve n^{ter} Ordnung alle n Durchschnittspunkte entsprechend gemein.

Zum Schluss führen wir noch folgenden Satz an:

Eine Curve $(m+p)^{ter}$ Ordnung, welche durch die Durchschnitte entsprechender Tangenten von Curven m^{ter} und p^{ter} Classe mit möglichst vielen Doppel- und Wendetangenten entsteht, berührt die erste Curve in

$$2(m-1) - i_m + p,$$

die zweite in $\quad 2(p-1) - i_p + m$ Punkten, wo i_m und i_p die Zahl der Wendepunkte der durch den Index angezeigten Curven bedeuten.

Die Curve der m^{ten} Classe ist nämlich von der $[2(m-1) - i_m]^{ten}$ Ordnung. Durch $2(m-1) - i_m + p$ Punkte derselben gehen die entsprechenden Tangenten der Curve p^{ter} Classe. Es bleibt nun noch übrig, zu zeigen, dass in diesen Punkten die Curve m^{ter} Classe von der neuen — die von der $(m+p)^{ten}$ Ordnung ist — berührt wird.

Die Gleichung der Curve $(m+p)^{ter}$ Ordnung ist

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} u & a_0 + \binom{m}{1} a_1 \lambda + \cdots + a_m \lambda^m & b_0 + \binom{p}{1} b_1 \lambda + \cdots + b_p \lambda^p \\ v & a_0' + \binom{m}{1} a_1' \lambda + \cdots + a_m' \lambda^m & b_0' + \binom{p}{1} b_1' \lambda + \cdots + b_p' \lambda^p \\ w & a_0'' + \binom{m}{1} a_1'' \lambda + \cdots + a_m'' \lambda^m & b_0'' + \binom{p}{1} b_1'' \lambda + \cdots + b_p'' \lambda^p \end{vmatrix} = 0.$$

Liegt der Punkt (x, y, z) zugleich auf der Curve C_m und auf der diesem Punkte entsprechenden Tangente von C_p, so ist zugleich:

$$\left(a_0 + \binom{m}{1} a_1 \lambda + \cdots + a_m \lambda^m\right) x + \left(a_0' + \binom{m}{1} a_1' \lambda + \cdots + a_m' \lambda^m\right) y$$
$$+ \left(a_0'' + \binom{m}{1} a_1'' \lambda + \cdots + a_m'' \lambda^m\right) z = 0,$$

$$\left(a_0 + \binom{m-1}{1} a_1 \lambda + \cdots + a_{m-1} \lambda^{m-1}\right) x + \left(a_0' + \binom{m-1}{1} a_1' \lambda + \cdots + a_{m-1}' \lambda^{m-1}\right) y$$
$$+ \left(a_0'' + \binom{m-1}{1} a_1'' \lambda + \cdots + a_{m-1}'' \lambda^{m-1}\right) z = 0,$$

$$\left(b_0 + \binom{p}{1} b_1 \lambda + \cdots + b_p \lambda^p\right) x + \left(b_0' + \binom{p}{1} b_1' \lambda + \cdots + b_p' \lambda^p\right) y$$
$$+ \left(b_0'' + \binom{p}{1} b_1'' \lambda + \cdots + b_p'' \lambda^p\right) z = 0.$$

Setzt man in Δ an Stelle von u, v, w die als *constant zu betrachtenden* Coëfficienten von x, y, z der ersten dieser drei Gleichungen ein, so erkennt man, dass der Werth von λ, für welchen dieselben zusammen bestehen, den beiden Gleichungen

$$\Delta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = 0$$

zugleich genügt, womit unser Satz bewiesen ist.

Ueber Dreiecke in perspectivischer Lage.

Von J. Rosanes in Breslau.

In meiner Inauguraldissertation gelangte ich bei der Behandlung einer von Steiner angeregten Frage zu einem Systeme von drei Kegelschnitten, welche in einer merkwürdigen Beziehung zu einander stehen, und dadurch zu dem Falle, dass zwei Dreiecke in einer Ebene auf mehr als *eine* Weise perspectivisch liegen. Auf diese letztere Frage ist neuerdings Herr Schroeter von gänzlich verschiedenen, rein geometrischen, Gesichtspunkten ausgehend gekommen und hat die Resultate der Untersuchung in dem nächstfolgenden Aufsatze niedergelegt.

Da ich die genannte Arbeit nicht weiter veröffentlicht habe, so nehme ich gegenwärtig Veranlassung, das hierher Gehörige im Wesentlichen unverändert hier mitzutheilen.

Ich gehe von zwei Dreiecken $a\,b\,c$, $A\,B\,C$ aus, deren Ecken resp. die Coordinaten

$$a_1\,a_2\,a_3,\ b_1\,b_2\,b_3,\ c_1\,c_2\,c_3$$
$$A_1\,A_2\,A_3,\ B_1\,B_2\,B_3,\ C_1\,C_2\,C_3$$

in Bezug auf irgend ein Fundamentaldreieck haben mögen. Eine perspectivische Lage werde ich im Folgenden durch $\frac{a\,b\,c}{P\,Q\,R}$ bezeichnen, wo über dem Horizontalstriche stets $a\,b\,c$ zu stehen kommt, unterhalb desselben die Buchstaben $A\,B\,C$ jedoch in der Reihenfolge, wie sie in der betreffenden Lage den Ecken a, b, c entsprechen. Alsdann stellen sich die überhaupt denkbaren sechs perspectivischen Lagen durch die Symbole dar:

$$1)\ \frac{a\,b\,c}{A\,B\,C},\quad 3)\ \frac{a\,b\,c}{B\,C\,A},\quad 5)\ \frac{a\,b\,c}{C\,A\,B},$$
$$2)\ \frac{a\,b\,c}{A\,C\,B},\quad 4)\ \frac{a\,b\,c}{C\,B\,A},\quad 6)\ \frac{a\,b\,c}{B\,A\,C},$$

Für die Lage 1) erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} a_1\,A_2-a_2\,A_1, & a_3\,A_1-a_1\,A_3, & a_2\,A_3-a_3\,A_2 \\ b_1\,B_2-b_2\,B_1, & b_3\,B_1-b_1\,B_3, & b_2\,B_3-b_3\,B_2 \\ c_1\,C_2-c_2\,C_1, & c_3\,C_1-c_1\,C_3, & c_2\,C_3-c_3\,C_2 \end{vmatrix}=0,$$

welche durch Multiplication mit dem Ausdrucke

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta,$$

der von Null verschieden angenommen werden darf, in die Form übergeht

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu} B_\varkappa \Delta_{a_\varkappa} \cdot C_\lambda \Delta_{b_\lambda} \cdot A_\mu \Delta_{c_\mu} = \sum_{\varkappa\lambda\mu} C_\varkappa \Delta_{a_\varkappa} \cdot A_\lambda \Delta_{b_\lambda} \cdot B_\mu \Delta_{c_\mu},$$

worin $\frac{\partial \Delta}{\partial a_\varkappa} = \Delta_{a_\varkappa}$, u. s. w. gesetzt ist, und die Summationen sich immer auf die Werthe 1, 2, 3 beziehen.

Durch Permutirung der Buchstaben A, B, C ergeben sich die Bedingungen für sämmtliche perspectivische Lagen. Der kürzern Bezeichnung wegen will ich die Summationsindices fortlassen und sie folgendermaassen schreiben:

(I.) $\quad \Sigma B\Delta_a . C\Delta_b . A\Delta_c = \Sigma C\Delta_a . A\Delta_b . B\Delta_c,$

(II.) $\quad \Sigma C\Delta_a . B\Delta_b . A\Delta_c = \Sigma B\Delta_a . A\Delta_b . C\Delta_c,$

(III.) $\quad \Sigma C\Delta_a . A\Delta_b . B\Delta_c = \Sigma A\Delta_a . B\Delta_b . C\Delta_c,$

(IV.) $\quad \Sigma B\Delta_a . A\Delta_b . C\Delta_c = \Sigma A\Delta_a . C\Delta_b . B\Delta_c,$

(V.) $\quad \Sigma A\Delta_a . B\Delta_b . C\Delta_c = \Sigma B\Delta_a . C\Delta_b . A\Delta_c,$

(VI.) $\quad \Sigma A\Delta_a . C\Delta_b . B\Delta_c = \Sigma C\Delta_a . B\Delta_b . A\Delta_c.$

Es lehrt nun der erste Blick, dass die Gleichungen (I.), (III.), (V.) von einander abhangen; ebenso die Gleichungen (II.), (IV.), (VI.). Dies giebt den Satz:

„*Wenn den Punkten a, b, c die Punkte A, B, C in zwei verschiedenen Anordnungen perspectivisch entsprechen, welche aus einander durch cyclische Permutirung hervorgehen, so liefert auch noch die dritte cyclische Permutation von A, B, C eine Anordnung, welche a, b, c perspectivisch entspricht.*“

Die sechs Bedingungen sind sonach mit nicht mehr als vier gleichgeltend, und zwar, wie sich zeigen wird, in der Weise, dass durch die Wahl von a, b, c, A die Punkte B, C eindeutig bestimmt sind.

Eine besonders charakteristische und für die geometrische Deutung sich eignende Gestalt für die Abhängigkeit derselben erhält man in einfacher Weise. Durch Multiplication der Gleichungen (I.) und (III.) sowie (II.) und (IV.) ergiebt sich

$$\Sigma A\Delta_a . B\Delta_a . B\Delta_b . C\Delta_b . A\Delta_c . C\Delta_c = \{\Sigma C\Delta_a . A\Delta_b . B\Delta_c\}^2,$$

$$\Sigma A\Delta_a . B\Delta_a . A\Delta_b . C\Delta_b . B\Delta_c . C\Delta_c = \{\Sigma C\Delta_a . B\Delta_b . A\Delta_c\}^2$$

und hieraus

$$\left\{\frac{\Sigma A\Delta_c}{\Sigma A\Delta_b}\right\}^3 = \left\{\frac{\Sigma B\Delta_c}{\Sigma B\Delta_b}\right\}^3.$$

Durch das analoge Verfahren mit (I.) und (V.), (IV.) und (VI.), u. s. w. gelangt man schliesslich zu folgendem Systeme:

$$\left\{\frac{\Sigma A\Delta_a}{\Sigma A\Delta_b}\right\}^3 = \left\{\frac{\Sigma B\Delta_a}{\Sigma B\Delta_b}\right\}^3 = \left\{\frac{\Sigma C\Delta_a}{\Sigma C\Delta_b}\right\}^3,$$

$$\left\{\frac{\Sigma A\Delta_b}{\Sigma A\Delta_c}\right\}^3 = \left\{\frac{\Sigma B\Delta_b}{\Sigma B\Delta_c}\right\}^3 = \left\{\frac{\Sigma C\Delta_b}{\Sigma C\Delta_c}\right\}^3,$$

$$\left\{\frac{\Sigma A\Delta_c}{\Sigma A\Delta_a}\right\}^3 = \left\{\frac{\Sigma B\Delta_c}{\Sigma B\Delta_a}\right\}^3 = \left\{\frac{\Sigma C\Delta_c}{\Sigma C\Delta_a}\right\}^3.$$

Aus diesen Gleichungen ist der Zusammenhang klar ersichtlich. In der That folgt aus denselben unter Berücksichtigung der Bedingungen (I.), . ., (VI.), dass

$$\frac{\Sigma B\Delta_a}{\Sigma B\Delta_b} = \varrho\cdot\frac{\Sigma A\Delta_a}{\Sigma A\Delta_b}, \quad \frac{\Sigma B\Delta_b}{\Sigma B\Delta_c} = \varrho\cdot\frac{\Sigma A\Delta_b}{\Sigma A\Delta_c}, \quad \frac{\Sigma B\Delta_c}{\Sigma B\Delta_a} = \varrho\cdot\frac{\Sigma A\Delta_c}{\Sigma A\Delta_a},$$

$$\frac{\Sigma C\Delta_a}{\Sigma C\Delta_b} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\Sigma A\Delta_a}{\Sigma A\Delta_b}, \quad \frac{\Sigma C\Delta_b}{\Sigma C\Delta_c} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\Sigma A\Delta_b}{\Sigma A\Delta_c}, \quad \frac{\Sigma C\Delta_c}{\Sigma C\Delta_a} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\Sigma A\Delta_c}{\Sigma A\Delta_a},$$

wo ϱ immer dieselbe complexe Wurzel der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ bedeutet. —

Zur leichtern geometrischen Interpretation gebe ich den Gleichungen die Form

$$\frac{\Sigma B\Delta_a \cdot A\Delta_b}{\Sigma A\Delta_a \cdot B\Delta_b} = \varrho, \text{ u. s. w.}$$

der hier links stehende Ausdruck bedeutet aber, wie leicht zu erkennen, nichts als das anharmonische Verhältniss der vier Strahlen c (a, b, A, B) d. h.

„das anharmonische Verhältniss zweier Seiten des einen Dreiecks „und der von ihrem Schnittpunkte nach zwei Ecken des andern „Dreiecks ausgehenden Geraden ist im Falle der sechsfachen Per- „spectivität gleich der dritten Wurzel der Einheit.“

Hieraus folgt, dass diese höchste Zahl sechs oder auch nur fünf durch zwei reelle Dreiecke nicht erreicht werden kann. Für solche ist eine vierfach perspectivische Lage das Maximum, und zwar so, dass sie mit einer dreifachen gleichgeltend ist; z. B. entsprechend den Gleichungen (I.), (III.), (V.), (II.).

Bei zweifach perspectivischer Lage, wobei jedoch eine Ecke von ABC stets derselben Ecke von abc zugeordnet bleibt, sind die beiden anderen Ecken nicht willkürlich zu wählen. Aus (II.) und (III.) z. B. folgern wir durch Elimination von C

(VII.) $\Sigma B\Delta_a . B\Delta_c . A\Delta_b . A\Delta_b = \Sigma B\Delta_b . B\Delta_b . A\Delta_a . A\Delta_c.$

Ist also A fixirt, so bleibt B auf die Curve 2[ten] Grades (VII.) beschränkt, welche durch A geht, und die Geraden bc, ba resp. in den Punkten c, a berührt.

Tritt noch eine Bedingung, wie etwa (III.) und mithin auch (V.) hinzu und bleibt A fixirt, so sind sowohl B als C auf Linien beschränkt, B auf (VII.), C auf

(VIII.) $\Sigma C\Delta_a . C\Delta_b . A\Delta_c . A\Delta_c = \Sigma C\Delta_c . C\Delta_c . A\Delta_a . A\Delta_b$.

Ein beliebiger Punkt A der Ebene liefert also mit irgend einem Punkte B von (VII.) und dem hierdurch bestimmten Punkte C des Kegelschnittes (VIII.) ein Dreieck ABC, welches mit abc auf vier Arten perspectivisch liegt.

Die beiden Curven (VII.), (VIII.) gehen, nachdem man die Buchstaben $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$ durch laufende Coordinaten $x_1 x_2 x_3$ ersetzt hat, durch die Substitution

$$\frac{\Sigma x\Delta_a}{\Sigma A\Delta_a} = -2(\xi_1+\xi_2+\xi_3),$$

$$\frac{\Sigma x\Delta_b}{\Sigma A\Delta_b} = \varrho\,\xi_1+\varrho^2\xi_2+\xi_3,$$

$$\frac{\Sigma x\Delta_c}{\Sigma A\Delta_c} = \varrho^2\xi_1+\varrho\,\xi_2+\xi_3$$

in die Form über:

$$\left.\begin{array}{l} S = \varrho^2\xi_1^2+\varrho\;\xi_2^2+\xi_3^2 = 0, \\ S_1 = \varrho\;\xi_1^2+\varrho^2\xi_2^2+\xi_3^2 = 0. \end{array}\right\}$$

Zwei derartige Kegelschnitte haben merkwürdige Beziehungen zu einander, deren Sinn sogleich erhellt, wenn man bedenkt, dass die Discriminante von $S+\lambda S_1 = 0$ von der Form $P\lambda^3+Q$ ist. Eine andere Eigenthümlichkeit, welche Eingangs gemeint war, ist folgende:

„*Zu den Kegelschnitten S, S_1 lässt sich ein dritter S_2 so finden,*
„*dass je zwei dieser drei Curven einander in Bezug auf die dritte*
„*(als Directrix) polar entsprechen.*“

Für je zwei derselben fällt sowohl der Kegelschnitt, welcher durch die 8 Berührungspunkte ihrer gemeinsamen Tangenten geht, als auch derjenige, welcher die 8 Tangenten ihrer Schnittpunkte berührt, mit dem dritten des Systems zusammen.

Dieses merkwürdige System von drei Kegelschnitten bildet in meiner Dissertation den Ausgangspunkt der Betrachtung, in deren Laufe ich auf obige Dreiecke gekommen bin.

Breslau, im April 1870.

Ueber perspectivisch liegende Dreiecke.

Von H. Schröter zu Breslau.

Die Figur zweier perspectivisch liegender Dreiecke, von welcher, wie es scheint,*) zuerst Désargues die häufig benutzte Eigenschaft erkannt hat, dass „*wenn von den Dreiecken* $a\,b\,c$ *und* $A\,B\,C$ *die Verbindungslinien der Ecken* $a\,A$, $b\,B$, $c\,C$ *sich in einem Punkte treffen, die Schnittpunkte entsprechender Seiten* $(a\,b,\ A\,B)$ $(b\,c,\ B\,C)$ $(c\,a,\ C\,A)$ *allemal auf einer Geraden liegen und umgekehrt*“ tritt bekanntlich bei mehreren geometrischen Untersuchungen auf; u. A. führt diese Figur, auf drei perspectivisch liegende Dreiecke ausgedehnt, zu jenem von Hesse**) zuerst angegebenen anschaulichen Arrangement der Steiner'schen Punkte und Linien beim hexagrammum mysticum. Die an jene Figur sich knüpfende Frage: „*ob zwei Dreiecke auf mehr als eine Art gleichzeitig perspectivisch liegen können*“ hat, so viel ich weiss, zuerst Herr J. Rosanes***) beantwortet und in der vorangehenden Mittheilung die analytische Lösung der Aufgabe wiederholt. Bei Gelegenheit einer Untersuchung zweier collinearer in gewisser Weise auf einander gelegter ebener Punktfelder wurde ich auf dieselbe Frage geführt und gelangte zu einer einfachen elementar-synthetischen Behandlung derselben, welche hier mitzutheilen ich mir erlaube, indem ich die Vermuthung hinzufüge, dass die dabei auftretenden Figuren vielleicht ein ähnliches Vorkommen bei geometrischen Untersuchungen darbieten, wie die Hesse'sche Figur.

1. Wenn zwei Dreiecke abc und ABC so gezeichnet werden sollen, dass sie *auf eine Art* perspectivisch liegen, so kann man von den 6 Ecken fünf willkürlich annehmen, z. B. $a\,b\,c\,A\,B$; für die letzte Ecke C bleibt dann noch eine gewisse Willkürlichkeit übrig; denn nimmt man die perspectivische Lage z. B. so an, dass aA, bB, cC sich in einem Punkte treffen sollen, so ist durch jene fünf Punkte der Projectionspunkt $o = (aA,\ bB)$ bestimmt und auf der Verbindungslinie $o\,c$ kann jetzt der sechste Punkt C willkürlich gewählt werden; der Ort dieses Punktes ist also die Gerade $o\,c$.

*) Poncelet, traité des figures projectives p. 89.

**) Hesse, Crelle's Journal Bd. XXXXI. S. 270.

***) J. Rosanes: De polarium reciprocarum theoria observationes Diss. inaug. pag. 18.

2. Unter den unendlich vielen Lagen von C auf der Geraden $o\,c$ lässt sich ein Mal C so wählen, dass die beiden Dreiecke $a\,b\,c$ und $A\,B\,C$ gleichzeitig auf zwei verschiedene Arten perspectivisch liegen; die zweite Art der perspectivischen Lage würde aus der ersten durch irgend eine Permutation der Ecken $A\,B\,C$ hervorgehen; die sämmtlichen sechs möglichen Permutationen dieser drei Buchstaben zerfallen aber in zwei Klassen von je drei; die drei Permutationen je einer Klasse sind allemal cyclisch unter einander; aber keine Permutation der einen Klasse ist mit einer der andern Klasse cyclisch, also:

erste Klasse: $A\,B\,C,\quad B\,C\,A,\quad C\,A\,B$

zweite Klasse: $A\,C\,B,\quad B\,A\,C,\quad C\,B\,A$;

es tritt nun ein Unterschied ein für die zweite perspectivische Lage der Dreiecke, je nachdem die ihr entsprechende Permutation mit $A\,B\,C$ eine cyclische oder nicht-cyclische ist, d. h. der ersten oder der zweiten Klasse angehört. Nehmen wir zuerst an, die zweite Permutation sei nicht cyclisch mit $A\,B\,C$, also z. B. die beiden Dreiecke $a\,b\,c$ und $A\,B\,C$ sollen auf folgende beiden Arten zugleich perspectivisch liegen:

$$\begin{matrix} a\,b\,c \\ A\,B\,C \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a\,b\,c \\ A\,C\,B \end{matrix},$$

indem die unter einander gestellten Buchstaben jedesmal entsprechende Ecken bezeichnen, dann wird C offenbar so construirt: man ziehe:

$$(a\,A,\; b\,B) = o \qquad (a\,A,\; c\,B) = p \qquad (c\,o,\; b\,p) = C,$$

wodurch C eindeutig bestimmt ist; die beiden so construirten Dreiecke liegen dann nur *auf zwei Arten* gleichzeitig perspectivisch.

3. Wenn dagegen anderseits die der zweiten perspectivischen Lage entsprechende Permutation eine cyclische mit $A\,B\,C$ ist, also der ersten Klasse angehört, dann folgt aus den beiden perspectivischen Lagen derselben Dreiecke zugleich eine dritte, nämlich die der dritten cyclischen Permutation entsprechende perspectivische Lage. In der That, seien für $a\,b\,c$ und $A\,B\,C$, indem die 5 ersten Punkte willkürlich gegeben sind, die beiden perspectivischen Lagen gefordert:

$$\begin{matrix} a\,b\,c \\ A\,B\,C \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a\,b\,c \\ B\,C\,A \end{matrix},$$

so wird die sechste Ecke C auf folgende Weise construirt:

$$(a\,A,\; b\,B) = o \qquad (a\,B,\; c\,A) = q \qquad (c\,o,\; b\,q) = C.$$

Es ist aber aus dieser Construction ersichtlich, dass auf dem durch die beiden Geraden $b\,B\,o$ und $c\,A\,q$ gebildeten Kegelschnitt sich ein Pascal'sches Sechseck befindet:

$$A\,o\,c\,B\,q\,b,$$

für welches bekanntlich nach dem Pascal'schen Satze die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden liegen, d. h. die Punkte:

$$(A\,o,\ B\,q) \qquad (o\,c,\ q\,b) \qquad (c\,B,\ b\,A)$$

oder, was nach dem Vorigen dasselbe ist:

$$a \qquad C \qquad (c\,B,\ b\,A)$$

d. h. $a\,C$, $b\,A$, $c\,B$ schneiden sich in einem Punkte oder die Dreiecke:

$$\begin{matrix} a\ b\ c \\ C\ A\ B \end{matrix}$$

liegen auch perspectivisch; es folgt also aus zwei perspectivischen Lagen eine dritte und wir haben hier wirklich den Fall zweier *auf drei verschiedene Arten* gleichzeitig perspectivisch liegender Dreiecke.

Hiernach lässt sich folgender Satz aussprechen:

Wenn zwei Dreiecke $a\,b\,c$ und $A\,B\,C$ auf zwei Arten perspectivisch liegen, von denen die eine aus der andern durch eine cyclische Permutation der Buchstaben $A\,B\,C$ hervorgeht, so liegen sie noch auf eine dritte Art perspectivisch, die der dritten cyclischen Permutation derselben Klasse entspricht.

Bezeichnen wir die Projectionscentra für zwei solche auf dreierlei Art perspectivisch liegende Dreiecke $a\,b\,c$ und $A\,B\,C$ durch $o\,q\,s$ in der Weise:

$$\frac{\begin{matrix} a\ b\ c \\ A\ B\ C \end{matrix}}{o} \qquad \frac{\begin{matrix} a\ b\ c \\ B\ C\ A \end{matrix}}{q} \qquad \frac{\begin{matrix} a\ b\ c \\ C\ A\ B \end{matrix}}{s},$$

so bilden $o\,q\,s$ ein neues Dreieck, von welchem ersichtlich ist, dass es mit jedem der beiden ersteren auf dreierlei Art perspectivisch liegt, nämlich so:

$$\frac{\begin{matrix} abc \\ o\,s\,q \end{matrix}}{A} \qquad \frac{\begin{matrix} abc \\ q\,o\,s \end{matrix}}{B} \qquad \frac{\begin{matrix} abc \\ s\,q\,o \end{matrix}}{C}$$

$$\frac{\begin{matrix} ABC \\ o\ q\ s \end{matrix}}{a} \qquad \frac{\begin{matrix} ABC \\ s\ o\ q \end{matrix}}{b} \qquad \frac{\begin{matrix} ABC \\ q\ s\ o \end{matrix}}{c}.$$

Dies lässt sich in Worten so aussprechen:

Liegen zwei Dreiecke $a\,b\,c$ und $A\,B\,C$ auf drei Arten perspectivisch, welche durch cyclische Permutation der drei Ecken des einen entstehen, alsdann bilden die drei Projectionscentra ein drittes Dreieck $o\,q\,s$; von diesen drei Dreiecken liegen immer je zwei auf dreierlei Art perspectivisch, indem die Ecken des dritten Dreiecks die Projectionscentra für die perspectivischen Lagen der beiden andern Dreiecke sind.

Solche neun Punkte bilden eine eigenthümliche Figur, indem sie zu je drei auf neun Geraden liegen, von denen (Projectionsstrahlen) wieder je drei durch jene 9 Punkte gehen.

4. Sobald man von den sechs Ecken der beiden Dreiecke $a\,b\,c$ und $A\,B\,C$ fünf willkürlich nimmt, lässt sich keine grössere Zahl von gleichzeitig perspectivischen Lagen derselben hervorbringen, als die ange-

gebene. Nimmt man aber nur vier Ecken $a\,b\,c$ und A willkürlich an, so können sich B und C so bestimmen lassen, dass die beiden Dreiecke auf mehr als drei Arten gleichzeitig perspectivisch liegen; suchen wir sie zunächst *auf vier Arten* perspectivisch zu legen; die Wahl derselben ist auf zwiefache Weise möglich, wenn wir die obige Theilung sämmtlicher sechs Permutationen von $A\,B\,C$, welche allen möglichen Arten perspectivischer Lage entsprechen, in zwei Klassen von je drei cyclischen Permutationen berücksichtigen; nehmen wir nämlich aus jeder Klasse zwei cyclische Permutationen heraus und verlangen perspectivische Lage auf solche vier Arten, so würden die den beiden übrigbleibenden Permutationen entsprechenden perspectivischen Lagen zugleich mit eintreten nach dem vorigen Satze und wir würden die Dreiecke auf sechsfache Art perspectivisch erhalten, welcher Fall später betrachtet werden soll; nehmen wir dagegen zwei Permutationen aus einer Klasse und eine Permutation aus der andern Klasse, so folgt zugleich die dritte Permutation aus der ersten Klasse als von selbst hinzutretend und wir haben dann wirklich nur vierfache perspectivische Lage zu gleicher Zeit.

Seien also unter willkürlicher Annahme der vier Punkte $a\,b\,c\,A$, die geforderten perspectivischen Lagen:

$$\frac{\begin{matrix} a\,b\,c \\ A\,B\,C \end{matrix}}{o} \qquad \frac{\begin{matrix} a\,b\,c \\ B\,C\,A \end{matrix}}{q} \qquad \frac{\begin{matrix} a\,b\,c \\ A\,C\,B \end{matrix}}{p},$$

zu denen als nothwendige vierte hinzutritt:

$$\frac{\begin{matrix} a\,b\,c \\ C\,A\,B \end{matrix}}{s};$$

dann lassen sich die noch übrigen beiden Punkte B und C auf unendlich viele Arten bestimmen, indem die Construction derselben noch eine gewisse Willkürlichkeit enthält; sie gestaltet sich nämlich folgendermaassen:

Wir nehmen auf $a\,A$ den Punkt p willkürlich an, ziehen $b\,p$, welches C enthalten muss und auch q; folglich ist:

$$(b\,p,\ c\,A) = q \qquad (a\,q,\ c\,p) = B,$$
$$(a\,A,\ b\,B) = o \qquad (c\,o,\ b\,p) = C.$$

Diese Construction von B und C lässt also die Wahl von p auf $a\,A$ noch frei; wir können daher bei der Veränderung des Punktes p auf der Geraden $a\,A$ nach dem geometrischen Orte fragen, welchen die Punkte B und C beschreiben. Aus der Construction folgt zunächst, dass, während p eine gerade Punktreihe auf $a\,A$ durchläuft und $b\,p$ ein mit derselben perspectivisches Strahlbüschel beschreibt, der Punkt q auf $c\,A$ eine mit der ersten projectivische Punktreihe durchläuft; da nun $a\,q$ und $c\,p$ projectivische Strahlbüschel beschreiben, so ist der

Ort von B ein *Kegelschnitt*, welcher durch a und c geht und leicht noch näher bestimmt werden kann; gelangt nämlich bei der vorgenommenen Bewegung insbesondere p nach A, so fällt auch q in A, mithin auch B in A hinein; der vorige Kegelschnitt geht daher durch A; ferner wird, wenn b nach a kommt, $b\,a$ und $b\,q$, also auch $a\,q$ auf die Gerade $a\,b$ fallen und dem Strahle $c\,a$ des Strahlbüschels (c) entspricht der Strahl $a\,b$ des Strahlbüschels (a) d. h. $a\,b$ ist die Tangente des von B beschriebenen Kegelschnittes im Punkte a; endlich wird, wenn p in den Schnittpunkt $\alpha = (a\,A,\; c\,b)$ hineinrückt, q nach c rücken und dem Strahle $a\,c$ des Strahlbüschels (a) wird der Strahl $c\,b$ des Strahlbüschels (c) entsprechen, d. h. $c\,b$ ist die Tangente des von B beschriebenen Kegelschnitts im Punkte c. Hiedurch ist der Kegelschnitt, welchen B beschreibt, vollständig bestimmt, indem er durch den Punkt A geht und in den Punkten a und c von den Geraden $a\,b$ und $c\,b$ berührt wird.

In gleicher Weise zeigt sich, dass auch C einen Kegelschnitt beschreibt, denn wir können wegen der nothwendigen vierten perspectivischen Lage der beiden Dreiecke den Punkt C auch so construiren:

$$(c\,p,\; b\,A) = s \qquad (a\,s,\; b\,p) = C;$$

mit der Bewegung von p auf $a\,A$ beschreibt also auch $c\,p$ ein Strahlbüschel, welches mit der Punktreihe (p) perspectivisch liegt und s eine gerade Punktreihe auf dem festen Träger $b\,A$, die ebenfalls mit der Punktreihe (p) projectivisch ist; $a\,s$ und $b\,p$ beschreiben also projectivische Strahlbüschel, deren Erzeugniss der Ortskegelschnitt für C ist; dieser geht ausser durch a und b auch durch A; denn gelangt bei der Bewegung von p dieser Punkt nach A, so rückt auch s und also auch C ebenfalls nach A; kommt aber p nach a, so fällt $c\,p$ mit $c\,a$ und cs mit as mit ac zusammen, d. h. dem Strahle $b\,a$ des Strahlbüschels (b) entspricht der Strahl $a\,c$ des Strahlbüschels (a) oder $a\,c$ ist Tangente des Kegelschnitts, den C beschreibt, im Punkte a; endlich wird, wenn p in den Schnittpunkt $\alpha = (b\,c,\; a\,A)$ hineinrückt, s nach b gelangen, $b\,p$ aber auf $b\,c$ fallen, so dass dem Strahl $a\,b$ des Strahlbüschels (a) der Strahl $b\,c$ des Strahlbüschels (b) entspricht, also $b\,c$ die Tangente im Punkte b von dem von C beschriebenen Kegelschnitte ist. Hiedurch ist der Ort des Punktes C vollständig bestimmt als derjenige Kegelschnitt, welcher durch A geht und in den Punkten a und b von den Geraden $a\,c$ und $b\,c$ berührt wird.

Noch ist zu bemerken, weil

$$(b\,C,\; c\,B) = p \quad \text{und} \quad (b\,B,\; c\,C) = o$$

ist, dass $bcBC$ ein vollständiges Viereck bilden, dessen zwei Diagonalpunkte o und p sind; die Diagonale $o\,p$ ist mit $a\,A$ identisch und der Schnittpunkt $(aA,\; bc) = \alpha$ liegt also mit dem Punkte $(bc,\; BC) = \alpha'$ harmonisch getrennt durch b und c; die veränderliche Seite $B\,C$ des

Dreiecks $A\,B\,C$ geht daher durch den festen Punkt α', welcher der vierte harmonische zu $b\,c\,\alpha$ und dem letzteren zugeordnet ist.

5. Wir kommen endlich zu der Untersuchung der Frage, ob zwei Dreiecke auf alle möglichen *sechs verschiedenen Arten* gleichzeitig perspectivisch liegen können; dies tritt ein, wenn wir verlangen, dass sie auf solche vier Arten perspectivisch liegen, welche zwei Mal cyclischen Permutationen aus jeder der beiden Klassen entsprechen, weil nach dem in 3. bewiesenen Satze die der dritten cyclischen Permutation entsprechende perspectivische Lage allemal eine Folge der beiden andern ist; es ist also auch ersichtlich, dass, wenn zwei Dreiecke auf fünf verschiedene Arten perspectivisch gelegt werden können, sie nothwendig auch auf die übrig bleibende sechste Art perspectivisch liegen. Da nun bei der in 4. ausgeführten Construction während $a\,b\,c$ und A beliebig angenommen wurden, die beiden übrigen Punkte B und C auf gewisse Ortskegelschnitte angewiesen waren, in denen einer von ihnen willkürlich gewählt werden konnte, so ist a priori anzunehmen, dass dieser sich so wird bestimmen lassen, dass noch eine fünfte und damit also auch die sechste perspectivische Lage erzielt wird. Die Punkte B und C sind bestimmt, sobald der Punkt p auf $a\,A$ irgendwo angenommen wird; suchen wir ihn also so zu bestimmen, dass zu den vier perspectivischen Lagen von 4. noch die fünfte

$$\frac{\begin{matrix} a & b & c \\ \underline{B} & \underline{A} & \underline{C} \end{matrix}}{r}$$

hinzutritt; hiernach müssten sich also $a\,B$, $b\,A$, $c\,C$ in einem Punkte r schneiden. Die vier perspectivischen Lagen, welche die letzten beiden zur Folge haben:

$$\frac{\begin{matrix} a & b & c \\ A & B & C \end{matrix}}{o} \qquad \frac{\begin{matrix} a & b & c \\ A & C & B \end{matrix}}{p} \qquad \frac{\begin{matrix} a & b & c \\ B & C & A \end{matrix}}{q} \qquad \frac{\begin{matrix} a & b & c \\ B & A & C \end{matrix}}{r},$$

zeigen zunächst, dass $o\,p$ mit $a\,A$
$p\,q$ „ $b\,C$
$q\,r$ „ $a\,B$
$r\,o$ „ $c\,C$ identisch sind;

wenn wir die vier Punkte auf einer Geraden

$$a \quad A \quad o \quad p$$

von r aus auf die Gerade $b\,C$ projiciren, so erhalten wir

$$q \quad b \quad C \quad p$$

und wenn wir diese vier Punkte der Geraden $b\,C$ von c aus wieder auf $a\,A$ zurückprojiciren, den Schnittpunkt aber $(b\,c,\ a\,A) = \alpha$ bezeichnen, wie oben, so erhalten wir:

$$A \quad \alpha \quad o \quad p.$$

Folglich gilt die Gleichheit der beiden Doppelverhältnisse

$$(a\,A\,o\,p) = (A\,\alpha\,o\,p) \text{ oder}$$
$$(a\,A\,o\,p) = (\alpha\,A\,p\,o) \text{ d. h.}$$

eine Involution *) (Punktsystem), welche bestimmt wird durch den Doppelpunkt A und das Paar conjugirter Punkte $a\,\alpha$ hat auch $o\,p$ zu einem Paare conjugirter Punkte und es gilt daher auch die Gleichheit folgender beiden Doppelverhältnisse

$$(a\,\alpha\,A\,o) = (\alpha\,a\,A\,p).$$

Anderseits können wir die vier Punkte

$$\alpha\,a\,A\,p$$

von b aus auf die Gerade $c\,A$ projiciren und erhalten, wenn wir den Schnittpunkt $(b\,a,\ c\,A) = \gamma$ bezeichnen,

$$c\,\gamma\,A\,q;$$

wenn wir sodann diese vier Punkte von a aus auf $b\,B$ projiciren und den Schnittpunkt $(a\,c,\ b\,B)$ für den Augenblick mit σ bezeichnen, so erhalten wir

$$\sigma\,b\,o\,B$$

und endlich diese vier Punkte von c aus auf $a\,A$ projicirt, erhalten wir:

$$a\,\alpha\,o\,p,$$

folglich sind die beiden Doppelverhältnisse einander gleich:

$$(\alpha\,a\,A\,p) = (a\,\alpha\,o\,p).$$

Wir haben nunmehr zwischen den 5 Punkten $a\,\alpha\,A\,p\,o$ die beiden Beziehungen:

$$(a\,\alpha\,A\,p) = (a\,\alpha\,p\,o) = (a\,\alpha\,o\,A)$$

oder

$$(a\,\alpha\,A\,o) = (a\,\alpha\,o\,p) = (a\,\alpha\,p\,A).$$

Da nun bekanntlich zwischen irgend 5 Punkten einer geraden Linie $a\,\alpha\,A\,p\,o$ allemal die Beziehung stattfindet:

$$(a\,\alpha\,A\,p)\,.\,(a\,\alpha\,p\,o)\,.\,(a\,\alpha\,o\,A) = 1\ ^{**})$$

so folgt der Werth des Doppelverhältnisses $(a\,\alpha\,A\,p)$ oder $(a\,\alpha\,A\,o)$ aus der Gleichung:

$$(a\,\alpha\,A\,p)^3 = 1$$

und ist daher eine dritte Wurzel der Einheit. Von den drei Werthen derselben ist der reelle Werth 1 für die vorliegende Frage illusorisch, denn er würde verlangen, dass p mit A zusammenfiele und dies würde zur Folge haben, dass sich das ganze Dreieck $A\,B\,C$ auf den einzigen Punkt A reducirte; es bleiben also für den Werth des Doppelverhältnisses nur die beiden imaginären Wurzeln der Einheit übrig, welche

*) Vergl. Jacob Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie. Th. II. S. 50.

**) Möbius, der barycentrische Kalkul, S. 250.

die beiden Punkte p und o bestimmen. *Es ist daher auf reelle Weise nicht möglich, zwei Dreiecke herzustellen, die gleichzeitig auf sechs verschiedene Arten perspectivisch liegen*; trotzdem ist dies ein völlig bestimmtes Problem und die sechs imaginären Lösungen desselben zerfallen in drei Paare; bezeichnen wir die sechs Projectionscentra wie oben durch $o\,p\,q\,r\,s\,t$, nämlich:

$$\frac{\begin{array}{c} a\,b\,c \\ A\,B\,C \end{array}}{o} \quad \frac{\begin{array}{c} a\,b\,c \\ A\,C\,B \end{array}}{p} \quad \frac{\begin{array}{c} a\,b\,c \\ B\,A\,C \end{array}}{r} \quad \frac{\begin{array}{c} a\,b\,c \\ C\,A\,B \end{array}}{s} \quad \frac{\begin{array}{c} a\,b\,c \\ B\,C\,A \end{array}}{q} \quad \frac{\begin{array}{c} a\,b\,c \\ C\,B\,A \end{array}}{t}$$

und bezeichnen wir bei willkürlicher Annahme der vier Punkte a, b, c, A, die Schnittpunkte:

$$(b\,c,\ a\,A) = \alpha$$
$$(c\,a,\ b\,A) = \beta$$
$$(a\,b,\ c\,A) = \gamma$$

so werden o und p diejenigen beiden Punkte sein auf der Geraden $a\,A$, für welche die Doppelverhältnisse $(a\,\alpha\,A\,o)$ und $(a\,\alpha\,A\,p)$ gleich den beiden imaginären cubischen Wurzeln der Einheit werden; und in gleicher Weise werden r und s diejenigen beiden Punkte sein auf der Geraden $b\,A$, für welche die Doppelverhältnisse $(b\,\beta\,A\,r)$ und $(b\,\beta\,A\,s)$ den imaginären cubischen Wurzeln der Einheit gleich werden; endlich werden q und t diejenigen beiden Punkte auf der Geraden $c\,A$ sein, für welche die Doppelverhältnisse $(c\,\gamma\,A\,q)$ und $(c\,\gamma\,A\,t)$ gleich den beiden imaginären cubischen Wurzeln der Einheit sind. Das Letztere ist leicht zu erweisen, da die Projection von

$$a\ \alpha\ A\ p$$

von c aus auf $b\,A$ die vier Punkte liefert:

$$\beta\ b\ A\ s;$$

wenn also $(a\,\alpha\,A\,p)^3 = 1$ ist, so muss auch $(b\,\beta\,A\,s)^3 = 1$ indem bekanntlich $(\beta\,b\,A\,s) = \frac{1}{(b\,\beta\,A\,s)}$ ist; in gleicher Weise liefert $(a\,\alpha\,A\,p)$ von b aus auf $c\,A$ projicirt die Punkte:

$$\gamma\ c\ A\ q;$$

also muss auch $(c\gamma A q)^3 = 1$ sein; anderseits liefern die Punkte $a\,\alpha\,A\,o$ von c aus auf $b\,A$ projicirt:

$$\beta\ b\ A\ r$$

und von b auf $c\,A$ projicirt:

$$\gamma\ c\ A\ t;$$

also wird auch $(b\beta A r)^3 = 1$ und $(c\gamma A t)^3 = 1$ wodurch die obige Behauptung erwiesen ist, die übrigens aus der nothwendigen Symmetrie von selbst erhellt.

6. Obwohl sich zwei Dreiecke $a\,b\,c$ und $A\,B\,C$ in reeller Weise, wie wir soeben gesehen haben, nicht herstellen lassen, so dass sie auf alle sechs verschiedenen Arten gleichzeitig perspectivisch liegen,

so wird sich doch, wenn man $a\,b\,c$ und A willkürlich annimmt, die Seite $B\,C$ des zweiten Dreiecks reell bestimmen lassen und die Punkte $B\,C$ selbst als die Durchschnittspunkte derselben mit einem imaginären Linienpaar, welches eine gewisse geometrische Bedeutung zulässt. Von unserem synthetischen Standpunkt aus zeigt sich dies in der That sehr einfach. Es ist schon in 4. bemerkt worden bei der Forderung von nur vier perspectivischen Lagen, dass BC durch den vierten harmonischen Punkt α' auf der Geraden $b\,c$, der zu α zugeordnet ist, gehen muss; nehmen wir nun alle sechs perspectivischen Lagen gleichzeitig erfüllt an, so erkennen wir aus dem obigen Schema, dass in dem vollständigen Viereck $a\,c\,B\,C$ die Punkte r und s Diagonalpunkte sind und die Diagonale $r\,s$ mit $b\,A$ zusammenfällt; folglich ist der Schnittpunkt $(a\,c,\ B\,C) = \beta'$ der vierte harmonische zu $\beta\,a\,c$; es geht also $B\,C$ durch diesen Punkt β'; endlich erscheinen in dem vollständigen Viereck $a\,b\,B\,C$ die Punkte q und t als Diagonalpunkte und die Diagonale $q\,t$ fällt zusammen mit $c\,A$; folglich ist der dritte Diagonalpunkt $(a\,b,\ B\,C) = \gamma'$ der vierte harmonische zu $a\,b\,\gamma$, dem letzteren zugeordnet. Die drei Punkte $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$, welche reell zu construiren sind als die Schnittpunkte

$$(b\,c,\ \beta\,\gamma) = \alpha'$$
$$(c\,a,\ \gamma\,\alpha) = \beta'$$
$$(a\,b,\ \alpha\,\beta) = \gamma'$$

liegen also auf der Geraden $B\,C$; dass sie überhaupt auf einer Geraden liegen folgt hieraus beiläufig, ist aber auch a priori bekannt. Zur näheren Bestimmung der imaginären Punkte B und C, deren reelle Verbindungslinie gefunden ist, kehren wir zurück zu dem vollständigen Viereck $b\,c\,B\,C$, dessen drei Diagonalpunkte $o\,p\,\alpha'$ sind; die Diagonale $o\,p$, welche mit $a\,A$ zusammenfällt, enthält vier harmonische Punkte $o\,p\,\alpha\,\pi$, wenn mit π für den Augenblick der Schnittpunkt $(B\,C,\ a\,A) = \pi$ bezeichnet wird. Wir haben also den Werth des Doppelverhältnisses

$$(o p \alpha \pi) = -1,$$

und hieraus folgt wegen der allgemein gültigen Relation, die oben angeführt ist

$$(o\,p\,\alpha\,\pi)\,.\,(o\,p\,\pi\,a)\,.\,(o\,p\,a\,\alpha) = 1$$

dass $(o\,p\,\pi\,a) = -\dfrac{1}{(o\,p\,a\,\alpha)} = -(o\,p\,\alpha\,a)$

Denken wir uns die Punkte $o\,p\,\pi\,a$ von C aus auf $c\,B$ projicirt, so erhalten wir

$$c\;p\;B\;s$$

und diese vier Punkte von b aus auf $a\,A$ projicirt geben

$$a\;p\;o\;A,$$

folglich ist das Doppelverhältniss

$$(\alpha\, p\, o\, A) = -\,(o\, p\, \alpha\, a).$$

Da nun nach dem Obigen $(a\, \alpha\, p\, o)^3 = 1$ ist, so folgt

$$(p\, \alpha\, A\, o)^3 = -\,1.$$

Das Doppelverhältniss $(p\, \alpha\, A\, o)$, dessen Werth eine cubische Wurzel der negativen Einheit ist, lässt eine anschaulichere Deutung zu; projiciren wir die vier Punkte von c auf $b\,C$, so erhalten wir

$$p\;b\;q\;C$$

und die vier Punkte mit A verbunden geben das Strahlbüschel

$$A\;(a\;b\;c\;C),$$

dessen Doppelverhältniss gleich einer cubischen Wurzel aus der negativen Einheit ist.

Werden dagegen $p\, \alpha\, A\, o$ von b auf $c\,B$ projicirt, so erhalten wir $p\, c\, s\, B$ und diese vier Punkte mit A verbunden geben das Strahlbüschel

$$A\;(a\,c\,b\,B),$$

dessen Doppelverhältniss ebenfalls einer cubischen Wurzel aus der negativen Einheit gleich ist; da nun die Summe der beiden Doppelverhältnisse

$$A\;(a\,c\,b\,B) + A\;(a\,b\,c\,B) = 1$$

ist, so müssen $A\;(a\,b\,c\,C)$ und $A\;(a\,b\,c\,B)$ die beiden verschiedenen imaginären cubischen Wurzeln der negativen Einheit sein und wir haben in den fünf Strahlen $A\;(a\,b\,c\,B\,C)$ ein sogenanntes *äquianharmonisches System* *) von fünf Strahlen.

Nach einer bekannten und leicht zu erweisenden Eigenschaft eines äquianharmonischen Systems lässt sich nunmehr das Ergebniss der vorigen Untersuchung folgendermaassen zusammenfassen:

Verbindet man die Ecken eines Dreiecks $a\,b\,c$ mit einem beliebigen Punkte A und nennt die Schnittpunkte

$$(A\,a,\; b\,c) = \alpha \qquad (A\,b,\; c\,a) = \beta \qquad (A\,c,\; a\,b) = \gamma$$
$$(\beta\,\gamma,\; b\,c) = \alpha' \qquad (\gamma\,\alpha,\; c\,a) = \beta' \qquad (\alpha\,\beta,\; a\,b) = \gamma',$$

so liegen $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ in einer Geraden L und es giebt einen Kegelschnitt, welcher dem Dreieck $a\,b\,c$ umbeschrieben ist und $a\,\alpha'$, $b\,\beta'$, $c\,\gamma'$ zu Tangenten in den Ecken hat; die beiden (imaginären) Tangenten aus A an diesen Kegelschnitt treffen die Gerade L in zwei solchen Punkten B und C, dass die beiden Dreiecke $a\,b\,c$ und $A\,B\,C$ auf alle möglichen sechs verschiedenen Arten gleichzeitig perspectivisch liegen.

Breslau, den 17. April 1870.

*) Cremona: Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. pag. 22.

Ueber Kegelschnitte im Raume*).

Von C. Hierholzer in Carlsruhe.

Die Bestimmung eines Kegelschnittes im Raume erfordert acht Bedingungen, ist aber im Allgemeinen schon dann eine vieldeutige, wenn die Bedingungen linear sind, d. h. wenn die bestimmenden Elemente nur in Punkten, geraden Linien und Ebenen bestehen. Herr Chasles hat (Comptes rendus 1865, p. 389) die Zahlen der durch lineare Bedingungen bestimmten Kegelschnitte gegeben, ohne den Weg anzudeuten, auf welchem man zu seinen Resultaten gelangen kann. Ausser einer Abhandlung des Herrn Lüroth im 67ten Bande von Crelle's Journal, in welcher auf geometrischem Wege die Anzahl der Kegelschnitte abgeleitet wird, welche acht gerade Linien schneiden, ist meines Wissens keine Arbeit über diesen Gegenstand veröffentlicht worden. Ich habe auf analytisch-geometrischem Wege die Lösung eines Theils der genannten Aufgaben versucht, und erlaube mir, dieselbe hier vorzulegen.

Weil mir die Betrachtung von Punktcoordinaten und Raumcurven geläufiger ist als diejenige von Ebenencoordinaten und abwickelbaren Flächen, so werde ich statt der oben erwähnten Aufgaben die ihnen nach dem Princip der Dualität entsprechenden behandeln, also Kegel zweiter Ordnung bestimmen, welche gewissen acht linearen Bedingungen genügen. Der Kürze wegen will ich mir erlauben, überall, wo ein Missverständniss nicht zu befürchten steht, statt „Kegel zweiter Ordnung" einfach „Kegel" zu schreiben.

§ 1.

Von den verschiedenen Formen, unter welchen die Bedingung zwischen den Coordinaten von sechs Punkten erscheint, welche auf einem Kegelschnitt liegen, ist für die folgenden Untersuchungen vorzugsweise eine geeignet, welche wir in Kürze entwickeln wollen.

*) Als Habilitationsschrift zur Erlangung der *venia docendi* am Grossherzogl. Polytechnicum zu Carlsruhe eingereicht.

Wir bezeichnen durch $x_1\ x_2\ x_3$ die laufenden Coordinaten, durch $x_1^{(i)}\ x_2^{(i)}\ x_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots 6)$ die Coordinaten der gegebenen Punkte $1, 2, 3, \ldots 6$, und setzen

$$U_{\varkappa\lambda} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{(\varkappa)} & x_2^{(\varkappa)} & x_3^{(\varkappa)} \\ x_1^{(\lambda)} & x_2^{(\lambda)} & x_3^{(\lambda)} \end{vmatrix}.$$

$U_{\varkappa\lambda} = 0$ stellt die Gerade dar, welche die Punkte $\varkappa$ und λ verbindet, und die Gleichung eines jeden, durch die Punkte 1, 2, 3, 4 hindurchgehenden Kegelschnitts hat die Form:

$$U_{12}\ U_{34} - \mu\ U_{14}\ U_{23} = 0,$$

wo μ einen willkürlichen Parameter bezeichnet. Bestimmen wir μ so, dass der Kegelschnitt auch noch durch den Punkt 5 geht, und setzen hierauf für x_1, x_2, x_3 die Coordinaten des Punktes 6, so ergiebt sich die gesuchte Bedingung

$$(126)\ (346)\ (145)\ (235) - (146)\ (236)\ (125)\ (345) = 0,$$

wenn

$$\Sigma \pm x_1^{(\varkappa)}\ x_2^{(\lambda)}\ x_3^{(\mu)}$$

durch $(\varkappa\ \lambda\ \mu)$ bezeichnet wird.

Alle Gleichungen, welche aus der eben erhaltenen durch Vertauschung der Zahlen $1, 2, \ldots 6$ hervorgehen, sind Ausdrücke für dieselbe Bedingung und können sich nur in der Form von einander unterscheiden.

§ 2.

Wir beginnen die Untersuchung mit der Betrachtung von Kegeln, welche sechs gegebene gerade Linien berühren. Solcher Kegel giebt es eine zweifach unendliche Schaar; der Ort ihrer Spitzen ist eine Oberfläche, deren Gleichung wir ableiten wollen.

Durch

$$\left.\begin{aligned} A_x^{(i)} &\equiv a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 + a_3^{(i)}x_3 + a_4^{(i)}x_4 = 0 \\ B_x^{(i)} &\equiv b_1^{(i)}x_1 + b_2^{(i)}x_2 + b_3^{(i)}x_3 + b_4^{(i)}x_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots 6),$$

mögen die gegebenen geraden Linien dargestellt werden.

Die Ebenen, welche diese Geraden mit einem beliebigen Punkte $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ des Raumes verbinden, haben die Gleichungen

$$(1) \qquad A_x^{(i)}\ B_y^{(i)} - B_x^{(i)}\ A_y^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots 6).$$

Diese sechs Ebenen umhüllen einen Kegel, wenn ihre Durchschnittslinien mit einer beliebigen Ebene — wir wählen die Coordinatenebene $x_4 = 0$ — einen Kegelschnitt berühren. Zerfällt der Kegelschnitt in ein Punktepaar, so besteht der Kegel in den beiden Geraden, welche die Spitze mit den Punkten des Paares verbinden.

Die Coordinaten der Durchschnittslinien der Ebenen (1) mit $x_4 = 0$ sind die Coëfficienten von $x_1\ x_2\ x_3$ in den Gleichungen (1),

$$a_1^{(i)} B_y^{(i)} - b_1^{(i)} A_y^{(i)}\quad,\quad a_2^{(i)} B_y^{(i)} - b_2^{(i)} A_y^{(i)}\quad,\quad a_3^{(i)} B_y^{(i)} - b_3^{(i)} A_y^{(i)}$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots\ 6.$$

Sollen diese sechs Geraden Tangenten eines Kegelschnittes sein, so müssen ihre Coordinaten der in § 1. entwickelten Bedingung genügen, oder der folgenden, welche durch Vertauschung der Zahlen 3 und 6 aus jener hervorgeht, und welche wir der Uebersichtlichkeit wegen vorziehen:

$$(2)\qquad (123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung für die $x^{(i)}$ die oben für die Coordinaten der Durchschnittslinien gefundenen Ausdrücke, so erhalten wir die Gleichung für die y, welche erfüllt sein muss, wenn die sechs Ebenen (1) einen Kegel umhüllen sollen, und die daher den Ort der Spitzen der Kegel darstellt, welche die sechs gegebenen geraden Linien berühren. Jede der Determinanten

$$(\varkappa\lambda\mu) = \begin{vmatrix} a_1^{(\varkappa)} B_y^{(\varkappa)} - b_1^{(\varkappa)} A_y^{(\varkappa)} & a_2^{(\varkappa)} B_y^{(\varkappa)} - b_2^{(\varkappa)} A_y^{(\varkappa)} & a_3^{(\varkappa)} B_y^{(\varkappa)} - b_3^{(\varkappa)} A_y^{(\varkappa)} \\ a_1^{(\lambda)} B_y^{(\lambda)} - b_1^{(\lambda)} A_y^{(\lambda)} & a_2^{(\lambda)} B_y^{(\lambda)} - b_2^{(\lambda)} A_y^{(\lambda)} & a_3^{(\lambda)} B_y^{(\lambda)} - b_3^{(\lambda)} A_y^{(\lambda)} \\ a_1^{(\mu)} B_y^{(\mu)} - b_1^{(\mu)} A_y^{(\mu)} & a_2^{(\mu)} B_y^{(\mu)} - b_2^{(\mu)} A_y^{(\mu)} & a_3^{(\mu)} B_y^{(\mu)} - b_3^{(\mu)} A_y \end{vmatrix}$$

ist vom dritten Grade für die y und die Fläche somit von der 12ten Ordnung.

Allein man sieht leicht ein, dass die Ebene $y_4 = 0$ ein Theil dieser Fläche sein muss. Denn verbindet man irgend einen Punkt der Ebene $y_4 = 0$ mit den gegebenen sechs Geraden durch Ebenen, so schneiden sich die Durchschnittslinien dieser letztern mit $y_4 = 0$ in eben jenem Punkte und umhüllen also einen uneigentlichen Kegelschnitt.

In der That enthält jede der Determinanten $(\varkappa\lambda\mu)$ den Factor y_4. Es ist nämlich, wenn wir die Determinanten des Systems

$$\begin{vmatrix} a_1^{(i)} & a_2^{(i)} & a_3^{(i)} & a_4^{(i)} \\ b_1^{(i)} & b_2^{(i)} & b_3^{(i)} & b_4^{(i)} \end{vmatrix}$$

mit passend gewählten Vorzeichen durch

$$p_1^{(i)}\ ,\ p_2^{(i)}\ \ldots\ p_6^{(i)}$$

bezeichnen, und

$$a_\varrho^{(i)} B_y - b_\varrho^{(i)} A_y^{(i)} = c_\varrho^{(i)}$$

setzen,

$$(3)\qquad \begin{cases} c_1^{(i)} = \phantom{-p_1^{(i)} y_1} \quad p_1^{(i)} y_2 + p_2^{(i)} y_3 + p_3^{(i)} y_4, \\ c_2^{(i)} = -p_1^{(i)} y_1 \phantom{- p_4^{(i)} y_2} + p_4^{(i)} y_3 + p_5^{(i)} y_4, \\ c_3^{(i)} = -p_2^{(i)} y_1 - p_4^{(i)} y_2 \phantom{+ p_4^{(i)} y_3} + p_6^{(i)} y_4, \\ c_4^{(i)} = -p_3^{(i)} y_1 - p_5^{(i)} y_2 - p_6^{(i)} y_3 \end{cases}$$

Hieraus erkennt man sofort, dass die Determinante

$$(\varkappa\lambda\mu) = \begin{vmatrix} c_1^{(\varkappa)} & c_2^{(\varkappa)} & c_3^{(\varkappa)} \\ c_1^{(\lambda)} & c_2^{(\lambda)} & c_3^{(\lambda)} \\ c_1^{(\mu)} & c_2^{(\mu)} & c_3^{(\mu)} \end{vmatrix}$$

mit y_4 zugleich verschwindet und folglich den Factor y_4 enthalten muss.

Aus den Gleichungen (3) folgt noch die später zu benutzende identische Gleichung

(4) $$c_y^{(i)} \equiv c_1^{(i)} y_1 + c_2^{(i)} y_2 + c_3^{(i)} y_3 + c_4^{(i)} y_4 = 0.$$

Die Gleichung (2) lässt sich durch die vierte Potenz von y_4 dividiren, und die Fläche der Kegelspitzen ist somit nur von der achten Ordnung.

§ 3.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Gleichung (2) der Fläche der Kegelspitzen von dem überflüssigen Factor y_4^4 zu befreien. Man kann in jedem einzelnen der Ausdrücke $(\varkappa\lambda\mu)$ den Factor y_4 absondern, ohne dass die Determinantenform verloren geht.

Betrachten wir an Stelle von $(\varkappa\lambda\mu)$ den allgemeinern Ausdruck

$$\begin{vmatrix} c_1^{(\varkappa)} & c_2^{(\varkappa)} & c_3^{(\varkappa)} & c_4^{(\varkappa)} \\ c_1^{(\lambda)} & c_2^{(\lambda)} & c_3^{(\lambda)} & c_4^{(\lambda)} \\ c_1^{(\mu)} & c_2^{(\mu)} & c_3^{(\mu)} & c_4^{(\mu)} \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{vmatrix},$$

welchen wir kürzer durch

$$(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, c^{(\mu)}, K)$$

bezeichnen wollen, und welcher sich, von $(\varkappa\lambda\mu)$ nur dadurch unterscheidet, dass er statt des Factors y_4 den Factor

$$K_y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + K_3 y_3 + K_4 y_4$$

enthält. Die K sollen ganz willkürliche Grössen sein.

Nun ist nach Seite 565

$$c^{(\mu)} = a^{(\mu)} B_y^{(\mu)} - b^{(\mu)} A_y^{(\mu)}$$

und folglich

(5) $$\begin{aligned}(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, c^{(\mu)}, K) &= B_y^{(\mu)} (c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, K) \\ &\quad - A_y^{(\mu)} (c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, b^{(\mu)}, K).\end{aligned}$$

Aber wegen der identischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_y^{(\varkappa)} & c_1^{(\varkappa)} & c_2^{(\varkappa)} & c_3^{(\varkappa)} & c_4^{(\varkappa)} \\ c_y^{(\lambda)} & c_1^{(\lambda)} & c_2^{(\lambda)} & c_3^{(\lambda)} & c_4^{(\lambda)} \\ K_y & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ A_y^{(\mu)} & a_1^{(\mu)} & a_2^{(\mu)} & a_3^{(\mu)} & a_4^{(\mu)} \\ B_y^{(\mu)} & b_1^{(\mu)} & b_2^{(\mu)} & b_3^{(\mu)} & b_4^{(\mu)} \end{vmatrix} = 0$$

und weil nach Gleichung (4), § 2.,

$$c_y^{(\varkappa)} = 0 \quad , \quad c_y^{(\lambda)} = 0,$$

haben wir

$$-A^{(\mu)}(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, b^{(\mu)}, K) + B^{(\mu)}(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, K)$$
$$= K_y\,(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, b^{(\mu)}),$$

und folglich, wegen Gleichung (5),

$$(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, c^{(\mu)}, K) = K_y\,(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, b^{(\mu)}).$$

Setzen wir jetzt

$$K_1 = 0 \,,\; K_2 = 0 \,,\; K_3 = 0 \,,\; K_4 = 1,$$

so erhalten wir

$$(\varkappa\lambda\mu) = y_4\,(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, b^{(\mu)}).$$

Weil die linke Seite bei einer Vertauschung von $\varkappa$ und μ, λ und μ bis auf das Vorzeichen ungeändert bleibt, so muss dies auch mit dem Factor von y_4 der Fall sein.

Wir wollen von nun an durch $(\varkappa\lambda\mu)$ den Factor von y_4 in der letzten Gleichung bezeichnen, so dass wir haben

$$(\varkappa\lambda\mu) = (c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, b^{(\mu)}) =$$
$$\begin{vmatrix} a_1^{(\varkappa)}B_y^{(\varkappa)} - b_1^{(\varkappa)}A_y^{(\varkappa)} & a_2^{(\varkappa)}B_y^{(\varkappa)} - b_2^{(\varkappa)}A_y^{(\varkappa)} & a_3^{(\varkappa)}B_y^{(\varkappa)} - b_3^{(\varkappa)}A_y^{(\varkappa)} & a_4^{(\varkappa)}B_y^{(\varkappa)} - b_4^{(\varkappa)}A_y^{(\varkappa)} \\ a_1^{(\lambda)}B_y^{(\lambda)} - b_1^{(\lambda)}A_y^{(\lambda)} & a_2^{(\lambda)}B_y^{(\lambda)} - b_2^{(\lambda)}A_y^{(\lambda)} & a_3^{(\lambda)}B_y^{(\lambda)} - b_3^{(\lambda)}A_y^{(\lambda)} & a_4^{(\lambda)}B_y^{(\lambda)} - b_4^{(\lambda)}A_y^{(\lambda)} \\ a_1^{(\mu)} & a_2^{(\mu)} & a_3^{(\mu)} & a_4^{(\mu)} \\ b_1^{(\mu)} & b_2^{(\mu)} & b_3^{(\mu)} & b_4^{(\mu)} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung

$$(\varkappa\lambda\mu) = 0$$

stellt eine Fläche der zweiten Ordnung dar, welche durch die Geraden $\varkappa$, λ und μ hindurchgeht. Denn für die Punkte der Geraden $\varkappa$ verschwinden $A_y^{(\varkappa)}$ und $B_y^{(\varkappa)}$ nach § 2., und bei einer Vertauschung der Buchstaben ändert $(\varkappa\lambda\mu)$ nur das Vorzeichen.

Die Fläche zweiter Ordnung ist also das durch die geraden Linien $\varkappa$, λ, μ bestimmte Hyperboloid.

Nach unserer jetzigen Bezeichnungsweise ist

(6) $\quad (123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0$

die von dem überflüssigen Factor $y_4{}^4$ befreite Gleichung der Fläche der Kegelspitzen.

Diese Fläche hat jede der sechs gegebenen Geraden zu Doppellinien, weil jede der Zahlen 1, 2, ... 6 zweimal in jedem der beiden Glieder der Gleichung vorkommt. Ausserdem liegen auf ihr die Schnittcurven von je zwei Hyperboloiden, welche entweder wie

(123) und (125)

zwei, oder wie

(123) und (456)

keine der gegebenen Geraden zu gemeinschaftlichen Erzeugenden haben. Die Hyperboloide (123) und (125) schneiden sich ausser in 1 und 2 noch in den beiden windschiefen Geraden, welche die Linien 1, 2, 3, 5 treffen. Wir werden fernerhin diese windschiefen Geraden die Transversalen der Linien 1, 2, 3, 5 nennen. Offenbar liegen ebenso die Transversalen von irgend vier der sechs gegebenen Geraden auf der Fläche achter Ordnung (6), und diese enthält somit noch

$$2 \cdot \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 30$$

einfache gerade Linien.

Je zwei Hyperboloide wie (123) und (456) schneiden sich in einer Curve der vierten Ordnung, deren also

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6 . 5 . 4}{1 . 2 . 3} = 10$$

auf der betrachteten Oberfläche liegen müssen.

Wir fassen diese Resultate in den Satz zusammen:

Die Spitzen der Kegel, welche sechs gegebene gerade Linien berühren, bilden eine Fläche der achten Ordnung, welche die sechs Geraden zu Doppellinien hat, welche ferner die 30 geraden Linien enthält, die je vier der sechs gegebenen treffen, und auf welcher noch zehn Raumcurven vierter Ordnung erster Species liegen. Diese Fläche wird dargestellt durch die Gleichung (6).

Die 30 geraden Linien und 10 Raumcurven haben eine sehr einfache Bedeutung. Verbindet man einen beliebigen Punkt einer Transversalen mit den sechs gegebenen Geraden durch Ebenen, so schneiden sich vier dieser Ebenen in der Transversalen, welche mit der Schnittlinie der beiden übrigen Ebenen ein Linienpaar bildet, das als ein uneigentlicher Berührungskegel anzusehen ist.

Verbindet man einen Punkt der Curve vierter Ordnung (123), (456) mit den sechs gegebenen Geraden durch Ebenen, so enthält die Ebene, welche den Punkt mit der Linie 1 verbindet, die durch den Punkt gehende Erzeugende zweiter Art des Hyperboloids (123), (die Geraden 1, 2, 3 als Erzeugende erster Art angesehen); denn diese Erzeugende muss die Linie 1 schneiden. Dieselbe Erzeugende liegt aber auch in den Ebenen, welche den Punkt mit den Geraden 2 und 3 verbinden. Die drei übrigen Ebenen schneiden sich in der Erzeugenden zweiter Art des Hyperboloids (456), welche durch den angenommenen Punkt geht. Beide Erzeugende zweiter Art bilden wieder einen uneigentlichen Berührungskegel.

Die Punkte der 30 Geraden sowohl als die Punkte der zehn Raumcurven sind daher bei den Abzählungen von Berührungskegeln auszuschliessen. Ausser ihnen existiren keine Punkte auf der Fläche mehr, welche uneigentlichen Berührungskegeln entsprechen.

§ 4.

Um die Kegel zu bestimmen, welche sieben gegebene gerade Linien 1, 2, ... 7 berühren, kann man ausser der Fläche achter Ordnung

$$(6)\qquad (123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0$$

noch eine Fläche derselben Art

$$(7)\qquad (123)\,(145)\,(725)\,(734) - (125)\,(134)\,(723)\,(745) = 0$$

betrachten, welche sich von der ersten nur dadurch unterscheidet, dass sie die Linie 7 an Stelle der Linie 6 enthält. Der Durchschnitt beider Flächen giebt den Ort derjenigen Punkte, von welchen man sowohl Berührungskegel an 1, 2, 3, 4, 5, 6 als an 1, 2, 3, 4, 5, 7 legen kann. Diese Kegel fallen für die Punkte der Geraden 1, 2, 3, 4, 5 im Allgemeinen nicht zusammen; diese Linien sind somit auszuschliessen.

Die Flächen (6) und (7) schneiden sich in einer Curve der 64^{ten} Ordnung. Diese Curve enthält aber die vierfach zu zählenden Geraden 1, 2, ... 5, und die zehn Transversalen derselben. Es bleibt daher nur eine Curve der $64 - 4.5 - 10 = 34^{\text{ten}}$ Ordnung zu betrachten übrig.

Die Curve der 34^{ten} Ordnung ist vollständig definirt durch die Gleichung (6) und diejenigen sechs Gleichungen, welche man erhält, wenn man in (6) nach einander jede der Zahlen 1, 2, ... 6 durch 7 ersetzt. Eine geringere Anzahl der so erhaltenen Gleichungen enthält ausser der Curve 34^{ter} Ordnung immer noch einige der auszuschliessenden Geraden.

Die gerade Linie 7 schneidet die Fläche (6) in acht Punkten, welche Doppelpunkte der Curve 34^{ter} Ordnung sein müssen. Ebenso kann man, von zwei andern der oben erwähnten sieben Gleichungen ausgehend, zeigen, dass die Curve 34^{ter} Ordnung auf jeder der sieben gegebenen Geraden acht Doppelpunkte haben muss.

Jede der beiden Transversalen der Geraden 3, 4, 5, 7 liegt auf der Fläche (7) und schneidet die Fläche (6) in acht Punkten, von welchen drei doppelt zu rechnende auf die Geraden 3, 4, 5 fallen; die beiden übrigen Schnittpunkte gehören der Curve 34^{ter} Ordnung an. Ebenso zeigt man, von andern Paaren der oben erwähnten sieben Gleichungen ausgehend, dass jede Transversale von je vier der sieben gegebenen Geraden die Curve 34^{ter} Ordnung in zwei Punkten geschnitten wird. Wir haben daher den Satz:

„Die Spitzen der Kegel, welche sieben gegebene Geraden berühren, bilden eine Curve der 34^{ten} *Ordnung mit acht Doppelpunkten auf jeder dieser Geraden und zwei einfachen Punkten auf*

jeder der 2 . 35 *geraden Linien, welche je vier der gegebenen treffen.*"

Die auf den Flächen (6) und (7) liegenden Curven vierter Ordnung schneiden die Curve 34ter Ordnung ebenfalls. Auf (6) liegt die Curve (123), (456); auf (7) liegt (123), (457). Beide Curven aber schneiden sich in Punkten, welche auf 4, 5 und auf den Transversalen von 4, 5, 6, 7 liegen, also schon berücksichtigt sind.

§ 5.

Diejenigen Punkte der Curve 34ter Ordnung, deren Kegel noch eine achte gegebene Gerade 8 berühren, müssen zugleich auf der Fläche liegen:

(8) $(345)\,(367)\,(847)\,(856) - (347)\,(356)\,(845)\,(867) = 0.$

Unter den 8 . 34 Schnittpunkten dieser Fläche mit der Curve 34ter Ordnung befinden sich nach dem Satze des § 4. 5.8 auf den Geraden 3, 4, 5, 6, 7 liegende Doppelpunkte der Curve, welche, da sie zugleich Doppelpunkte der Fläche (8) sind, vierfach gerechnet werden müssen. Diese Punkte sind auszuschliessen; denn die Kegel, welche man von ihnen an 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 legen kann, sind verschieden von denjenigen, welche 3, 4, 5, 6, 7, 8 berühren.

Auf der Fläche (8) liegen die zehn Transversalen der Geraden 3, 4, 5, 6, 7. Nach § 4. schneidet jede dieser Transversalen die Curve 34ter Ordnung in zwei Punkten, welche (nach § 3.) ebenfalls ausgeschlossen werden müssen.

Allen andern Schnittpunkten der Curve 34ter Ordnung mit der Fläche (8) entsprechen eigentliche Berührungskegel der acht gegebenen Geraden. Damit ist der von Herrn Lüroth aufgestellte Satz bewiesen:

Es giebt $8.34 - 4.5.8 - 2.10 = 92$ *Kegel, welche acht gegebene gerade Linien berühren.*

§ 6.

Aus der Zusammensetzung der Gleichungen (6), (7), (8) ist leicht ersichtlich, dass die in den §§ 3, 4, 5 gefundenen Zahlen Aenderungen erleiden werden in folgenden drei Fällen:

1) wenn fünf oder mehr der geraden Linien eine gemeinsame Transversale haben;
2) wenn vier oder mehr der gegebenen Geraden auf einem Hyperboloid liegen;
3) wenn sich die gegebenen Geraden schneiden.

Wir wollen von der grossen Anzahl von besonderen Fällen nur

einige der einfachsten näher betrachten, und zunächst annehmen, dass die Linien 4, 5, 6, 7, 8 von einer geraden Linie geschnitten werden. Diese Gerade ist Doppellinie der Fläche (8), weil sie zugleich auf den vier Hyperboloiden

$$(856), (847), (845), (867)$$

liegt. Sie schneidet die Curve 34ter Ordnung (§ 4.) in zwei Punkten, welche jetzt doppelt abgerechnet werden müssen, während alle übrigen dort angestellten Betrachtungen ungeändert bleiben.

Es giebt also in diesem Falle nur noch 90 Kegel, welche die acht gegebenen Geraden berühren.

Es ist leicht, diese Verminderung auch geometrisch zu verfolgen. Durch die gemeinschaftliche Transversale der Geraden 4, 5, 6, 7, 8 denke man sich die beiden Tangentialebenen an das durch die Geraden 1, 2, 3 bestimmte Hyperboloïd gelegt. Jede dieser Tangentialebenen schneidet das Hyperboloid in zwei Geraden, von welchen eine die Linien 1, 2, 3 trifft. Diese Gerade bildet im Verein mit der Transversalen einen uneigentlichen Berührungskegel, deren also, entsprechend den beiden Tangentialebenen, zwei existiren.

Wenn von den acht geraden Linien die vier

$$5,\ 6,\ 7,\ 8$$

auf einem Hyperboloid liegen, so zerfällt die Fläche (8) in dieses Hyperboloid und in eine Fläche der sechsten Ordnung. Von den 92 Schnittpunkten der Fläche (8) mit der Curve 34ter Ordnung fallen 20 auf das Hyperboloid, zu welchen keine Kegel gehören, welche alle acht Linien berühren. Es giebt daher nur noch 72 Berührungskegel.

Wenn sechs von den acht Geraden auf einem Hyperboloid liegen, so wird die Gleichung der entsprechenden Fläche achter Ordnung eine identische, weil jeder Punkt des Raumes Spitze eines Kegels sein kann, welcher die sechs gegebenen Geraden berührt. Es giebt dann eine einfach unendliche Schaar von Berührungskegeln an die acht gegebenen Geraden. U. s. f.

Wenn zwei der gegebenen Geraden, etwa 7 und 8 sich schneiden, so zerfällt die Fläche (8) in die Ebene dieser Linien und in eine Fläche siebenter Ordnung, welche durch

$$(345)\,(367)\,(856)\,(\overline{847}) - k\,(347)\,(356)\,(845)\,(\overline{867}) = 0$$

dargestellt wird, wo k eine Constante und $(\overline{847})$, $(\overline{867})$ Ausdrücke bezeichnen, welche gleich Null gesetzt, die Ebenen repräsentiren, die den Schnittpunkt von 7 und 8 mit den Geraden 4 und 6 verbinden.

Von den 34 Schnittpunkten der Ebene der 7 und 8 mit der Curve 34ter Ordnung (§ 4.) liegen acht doppelt zu rechnende auf der geraden Linie 7. Die Anzahl der Berührungskegel vermindert sich daher in diesem Falle um $34 - 2.8 = 18$, wenn man diejenigen ausschliesst,

deren Spitzen in der Ebene der 7 und 8 liegen, welche also diese Ebene berühren. Eine gleiche Verminderung tritt ein, wenn die Linie 8 noch die Gerade 6, und ebenso, wenn die 8 auch noch die Gerade 5 schneidet. Von der Fläche siebenter Ordnung trennen sich alsdann noch die Ebenen der 6 und 8 und der 5 und 8 ab, von welchen jede 18 wesentliche Schnittpunkte enthält.

Wenn aber die 8 auch noch die Gerade 4 schneidet, also in eine der beiden Transversalen der Linien 4, 5, 6, 7 übergeht, so vermindert sich die Anzahl der Berührungskegel nicht mehr um 18. Denn in diesem Falle spaltet sich die Fläche (8) in die vier Ebenen

$$(7,8)\,(6,8)\,(5,8)\,(4,8)$$

und in eine Fläche der vierten Ordnung, deren Gleichung die Form hat:

$$(345)\,(367) - k\,(347)\,(356) = 0,$$

wo k eine Constante bezeichnet. Die Gerade 3 ist Doppellinie dieser Fläche, die Geraden 4, 5, 6, 7 liegen als einfache Linien auf derselben, ebenso die acht Transversalen, welche die Linie 3 und drei der Linien 4, 5, 6, 7 schneiden. Die Anzahl der Berührungskegel ist somit

$$4 \,.\, 34 - 8 \,.\, 4 - 4 \,.\, 8 \,.\, 2 - 8 \,.\, 2 = 24.$$

Wir untersuchen noch den Fall, wenn die Linie 8 von jeder der Geraden 1, 2, ... 7 getroffen wird.

Die Fläche achter Ordnung

$$(123)\,(145)\,(825)\,(834) - (125)\,(134)\,(823)\,(845) = 0$$

zerfällt unter dieser Voraussetzung in die fünf Ebenen

$$(1,8)\,,\,(2,8)\,,\,(3,8)\,,\,(4,8)\,,\,(5,8)$$

und in eine Fläche der dritten Ordnung, welche die Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 8 als einfache Linien enthält. In ähnlicher Weise zerfallen die beiden Flächen

$$(234)\,(256)\,(836)\,(845) - (236)\,(245)\,(834)\,(856) = 0,$$
$$(345)\,(367)\,(847)\,(856) - (347)\,(356)\,(845)\,(867) = 0,$$

deren Durchschnittspunkte mit der ersten Fläche die gesuchten Kegelspitzen sind.

Die Aufgabe kommt also darauf hinaus, von den Durchschnittspunkten der drei Oberflächen dritter Ordnung, welche durch die halben Doppelsechse

$$\begin{array}{l} 1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\ ;\ 8 \\ 2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\ ;\ 8 \\ 3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\,,\,7\ ;\ 8 \end{array}$$

bestimmt sind, diejenigen abzusondern, welche auf den Geraden 1, 2, ... 8 liegen.

Die Durchschnittscurve der beiden ersten Flächen zerfällt in die Geraden 2, 3, 4, 5, 8 und in eine Curve der vierten Ordnung. Aus dem leicht zu beweisenden Satze:

wenn zwei Flächen der dritten Ordnung eine gerade Linie gemein haben, so wird diese von dem übrigen Theile der Durchschnittscurve in vier Punkten geschnitten,

folgt, dass die Gerade 8 von der Curve vierter Ordnung gar nicht, jede der Geraden 2, 3, 4, 5 dagegen dreimal geschnitten wird.

Die Gerade 6 schneidet die erste Fläche in drei Punkten, von welchen einer auf 8 liegt; die beiden andern gehören der Curve vierter Ordnung an.

Von den zwölf Schnittpunkten dieser Curve mit der dritten Fläche liegen daher je drei auf den Geraden 3, 4, 5 und zwei auf der Geraden 6; es bleibt somit ein einziger wesentlicher Schnittpunkt übrig, und man hat den von den Herren Lüroth und Nöther zuerst ausgesprochenen Satz:

Es giebt nur einen einzigen Kegel, welcher acht gerade Linien berührt, wenn sieben von der achten getroffen werden.

§ 7.

Im vorigen § Seite 572 wird der Satz bewiesen:

„Es giebt 18 Kegel, welche eine gegebene Ebene und sechs gegebene gerade Linien berühren.“

Wenn ausser der Ebene nur fünf gerade Linien gegeben sind, so giebt es eine einfach unendliche Schaar von Berührungskegeln, deren Spitzen eine in jener Ebene liegende Curve bilden, von welcher wir Ordnung und Singularitäten leicht bestimmen können.

Wenn 1, 2, 3, 4, 5 die gegebenen und 6 eine beliebig in der gegebenen Ebene angenommene Gerade bezeichnen, so liegen die Spitzen der Berührungskegel ausser in jener Ebene noch auf der Fläche achter Ordnung

$$(123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0.$$

Der Durchschnitt der gegebenen Ebene mit dieser Fläche zerfällt in die doppelt zu rechnende Gerade 6 und in eine Curve der sechsten Ordnung, welche auf jeder der Geraden 1, 2, 3, 4, 5 einen Doppelpunkt besitzt. Damit ist der Satz bewiesen:

„Die Spitzen der Kegel, welche eine gegebene Ebene und fünf gegebene Geraden berühren, liegen auf einer ebenen Curve 6ter *Ordnung mit fünf Doppelpunkten.“*

Wenn die Kegel statt der Linie 5 noch eine zweite Ebene berühren sollen, so wird ihre Anzahl eine endliche. Denken wir uns die Linie 5 in dieser Ebene willkürlich angenommen, so geht die Durch-

schnittslinie der beiden gegebenen Ebenen, welche die Kegelspitzen enthält, durch den auf der Geraden 5 liegenden Doppelpunkt der Curve sechster Ordnung, und schneidet diese noch in vier weiteren Punkten, den gesuchten Kegelspitzen.

Es giebt daher vier Kegel, welche zwei gegebene Ebenen und vier gegebene gerade Linien berühren.

§ 8.

Die Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und fünf gegebene Geraden berühren, bilden eine zweifach unendliche Schaar; der Ort ihrer Spitzen ist eine Oberfläche, deren Gleichung auf folgende Weise abgeleitet werden kann:

Verbinden wir die fünf gegebenen Geraden mit einem beliebigen Punkte des Raumes durch Ebenen C_1, C_2, ... C_5, so bestimmen diese einen Kegel, welchen sie umhüllen. Legen wir durch die Verbindungslinie des gegebenen und des willkürlich angenommenen Punktes ein Ebenbüschel $A_x + \lambda B_x = 0$, und stellen die Bedingung auf, unter welcher die sechs Ebenen

$$C_1 \,,\, C_2 \,,\, \ldots\, C_5 \,,\, A_x + \lambda B_x$$

Tangentialebenen eines Kegels sind, so erhalten wir eine in λ quadratische Gleichung, weil zwei Ebenen des Büschels den Kegel berühren. Der gegebene Punkt liegt auf dem Kegel, wenn beide Ebenen zusammenfallen. Wir erhalten daher die gesuchte Gleichung, wenn wir die Discriminante der quadratischen Gleichung verschwinden lassen.

Wir bezeichnen wie früher durch

$$A_x^{(i)} = 0 \quad , \quad B_x^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots 5)$$

die Gleichungen der fünf Geraden. Wenn $x_1^0\; x_2^0\; x_3^0\; x_4^0$ die Coordinaten des gegebenen, $y_1\; y_2\; y_3\; y_4$ die des willkürlich angenommenen, $k_1\; k_2\; k_3\; k_4$ und $l_1\; l_2\; l_3\; l_4$ die Coordinaten zweier beliebigen festen Punkte sind und

$$\Sigma a_i x_i = A_x = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix} \qquad \Sigma b_i x_i = B_x = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{vmatrix},$$

so ist

$$A_x + \lambda B_x = 0$$

die Gleichung des Ebenenbüschels, welcher die Verbindungslinie der Punkte y, x^0 zur Axe hat.

Die sechs Ebenen

$$A_x^{(i)}\, B_y^{(i)} - A_y^{(i)}\, B_x^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots 5) \,,\; A + \lambda B = 0$$

umhüllen einen Kegel, wenn die Coordinaten ihrer Durchschnittslinien mit $x_4 = 0$ der Gleichung des § 1. genügen, wenn also die Gleichung

$$(123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0$$

erfüllt wird für

$$(i\,k\,l) = \begin{vmatrix} c_1^{(i)} & c_2^{(i)} & c_3^{(i)} \\ c_1^{(k)} & c_2^{(k)} & c_3^{(k)} \\ c_1^{(l)} & c_2^{(l)} & c_3^{(l)} \end{vmatrix} \quad (i,\, k,\, l = 1,\, 2,\, \ldots\, 5)$$

und

$$(6\,k\,l) = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda\, b_1 & a_2 + \lambda\, b_2 & a_3 + \lambda\, b_3 \\ c_1^{(k)} & c_2^{(k)} & c_3^{(k)} \\ c_1^{(l)} & c_2^{(l)} & c_3^{(l)} \end{vmatrix},\ (k,\, l = 1,\, 2,\, \ldots\, 5).$$

Jede dieser Determinanten enthält den Factor y_4, welchen wir uns wie in § 3. abgesondert denken, so dass wir von nun an unter $(i k l)$ und $(6 k l)$ die Ausdrücke verstehen wollen

$$(i\,k\,l) = \begin{vmatrix} c_1^{(i)} & c_2^{(i)} & c_3^{(i)} & c_4^{(i)} \\ c_1^{(k)} & c_2^{(k)} & c_3^{(k)} & c_4^{(k)} \\ a_1^{(l)} & a_2^{(l)} & a_3^{(l)} & a_4^{(l)} \\ b_1^{(l)} & b_2^{(l)} & b_3^{(l)} & b_4^{(l)} \end{vmatrix},\ (i,\, k,\, l = 1,\, 2,\, \ldots\, 5)$$

$$(6kl) = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & a_2 + \lambda b_2 & a_3 + \lambda b_3 & a_4 + \lambda b_4 \\ c_1^{(k)} & c_2^{(k)} & c_3^{(k)} & c_4^{(k)} \\ a_1^{(l)} & a_2^{(l)} & a_3^{(l)} & a_4^{(l)} \\ b_1^{(l)} & b_2^{(l)} & b_3^{(l)} & b_4^{(l)} \end{vmatrix} \quad (k,\, l = 1, 2, \ldots 5),$$

welche nur noch von der zweiten Ordnung in den y sind.

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$(123)\ (145) = \varphi\ ,\ (125)\ (134) = \psi,$$

$$f_{ik}(u) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ c_1^{(i)} & c_2^{(i)} & c_3^{(i)} & c_4^{(i)} \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & a_4^{(k)} \\ b_1^{(k)} & b_2^{(k)} & b_3^{(k)} & b_4^{(k)} \end{vmatrix},\ (i,\, k = 1\,,\, 2,\, \ldots\, 5).$$

Nun ist

$$(6\, i\, k) = f_{ik}(a) + \lambda f_{ik}(b)$$

und unsere Gleichung schreibt sich

$$(9)\qquad \begin{aligned} &+ \varphi \left\{ f_{25}(a) + \lambda f_{25}(b) \right\} \left\{ f_{34}(a) + \lambda f_{34}(b) \right\} \\ &- \psi \left\{ f_{23}(a) + \lambda f_{23}(b) \right\} \left\{ f_{45}(a) + \lambda f_{45}(b) \right\} = 0. \end{aligned}$$

oder

$$\varphi \left\{ M + 2\, N \lambda + P \lambda^2 \right\} - \psi \left\{ M' + 2 N' \lambda + P' \lambda^2 \right\} = 0,$$

wenn

$$M = f_{25}(a)\,f_{34}(a)\ ,\ 2N = f_{25}(a)\,f_{34}(b) + f_{25}(b)\,f_{34}(a),$$
$$P = f_{25}(b)\,f_{34}(b)$$
$$M' = f_{23}(a)\,f_{45}(a),\ 2N' = f_{23}(a)\,f_{45}(b) + f_{23}(b)\,f_{45}(a),$$
$$P' = f_{23}(b)\,f_{45}(b).$$

Indem wir die nach λ gebildete Discriminante mit Null vergleichen, erhalten wir die Gleichung der Fläche der Kegelspitzen in der Form:

$$(10)\qquad (\varphi M - \psi M')\,(\varphi P - \psi P') - (\varphi N - \psi N')^2 = 0.$$

Die Ausdrücke $\varphi, \psi, M, N, P, M', N', P'$ sind sämmtlich vom vierten Grade für die y. Gleichung (10) stellt also eine Fläche der 16ten Ordnung dar.

Bemerken wir aber, dass dieser Gleichung auch genügt werden muss, wenn der Punkt y in die Ebene zu liegen kommt, welche bestimmt ist durch den gegebenen Punkt x^0 und die beiden willkürlich angenommenen Punkte k und l, weil dann die Ebenen A und B zusammenfallen, $f_{ik}(a) = f_{ik}(b)$ wird und die Gleichung (9) den Factor $(1+\lambda)^2$ enthält, dessen Discriminante verschwindet.

Es handelt sich also darum, aus Gleichung (10) den Factor

$$K = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{vmatrix}$$

abzutrennen.

Betrachten wir für einen Augenblick den Punkt y als fest und den Punkt x^0 als veränderlich, so stellt Gleichung (10) den Kegel zweiter Ordnung in Punktcoordinaten dar, welcher von den Ebenen $C_1, C_2, \ldots C_5$ berührt wird. Gleichung (10) muss daher nach Absonderung des fremden Factors noch von der zweiten Ordnung in x^0 sein, und somit die zweite Potenz von K enthalten. In der That gehen dann die willkürlichen Grössen k und l ganz aus der Gleichung heraus.

Da der auszuscheidende Factor in φ und ψ nicht vorkommen kann, so schreiben wir Gleichung (10) in der Form:

$$\varphi^2 (MP - N^2) + \psi^2 (M'P' - N'^2) - \varphi\psi\,(MP' + M'P - 2NN') = 0,$$

und zeigen, dass die Coëfficienten φ^2, ψ^2 und $\varphi\psi$ einzeln den Factor K^2 enthalten.

Die Functionen $f_{ik}(u)$ (Seite 575) sind linear für die u; setzen wir daher

$$f_{ik}(u) = A'_{ik}\,u_1 + A''_{ik}\,u_2 + A'''_{ik}\,u_3 + A''''_{ik}\,u_4;$$

so sind die A_{ik} von den u unabhängige Ausdrücke.

Nun ist

$$MP - N^2 = -\tfrac{1}{4}\,\{f_{34}(a)\,f_{25}(b) - f_{34}(b)\,f_{25}(a)\}^2$$

$$= -\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} A'_{34}a_1 + \cdots A''''_{34}a_4 & A'_{34}b_1 + \cdots A''''_{34}b_4 \\ A'_{25}a_1 + \cdots A''''_{25}a_4 & A'_{25}b_1 + \cdots A''''_{25}b_4 \end{vmatrix}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{vmatrix} A'_{25} & A''_{25} & A'''_{25} & A''''_{25} \\ A'_{34} & A''_{34} & A'''_{34} & A''''_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}\right\}^2.$$

Die a_1, a_2, a_3, a_4 ; b_1, b_2, b_3, b_4 sind nach (§ 8.) die aus den Systemen

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{vmatrix}$$

mit passendem Vorzeichen gebildeten Determinanten.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass jede Determinante des Systems

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

den Factor K enthält, und als andern Factor diejenige Determinante des Systems

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

in welcher die beiden übrigen Indices vorkommen. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = K_1 \begin{vmatrix} x_3^0 & x_4^0 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}.$$

Indem wir dies berücksichtigen, erhalten wir für $MP' - N^2$ den Ausdruck

$$-\tfrac{1}{4}K^2\left\{\begin{vmatrix} A'_{25} & A''_{25} & A'''_{25} & A''''_{25} \\ A'_{34} & A''_{34} & A'''_{34} & A''''_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \end{vmatrix}\right\}^2.$$

In ganz ähnlicher Weise lassen sich

$$M'P' - N'^2 \quad \text{und} \quad MP' + M'P - 2NN'$$

transformiren, und wir erhalten schliesslich die Gleichung unserer Oberfläche in der folgenden, eleganten Form:

$$\begin{aligned} &\varphi^2 \cdot \left\{\begin{vmatrix} A_{25} \\ A_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix}\right\}^2 \\ (11)\qquad &+ 2\varphi\psi\left\{\begin{vmatrix} A_{25} \\ A_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix}\right\} \\ &+ \psi^2\left\{\begin{vmatrix} A_{23} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix}\right\}^2 = 0, \end{aligned}$$

wenn wir mit

$$\begin{vmatrix} A_{\varkappa\lambda} \\ A_{\mu\nu} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix}$$

die unvollständigen Systeme bezeichnen

$$\begin{vmatrix} A'_{\varkappa\lambda} & A''_{\varkappa\lambda} & A'''_{\varkappa\lambda} & A''''_{\varkappa\lambda} \\ A'_{\mu\nu} & A''_{\mu\nu} & A'''_{\mu\nu} & A''''_{\mu\nu} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung gestattet eine doppelte Interpretation, je nachdem man die x^0 oder die y als Veränderliche ansieht. Im ersten Falle stellt sie, wie schon früher bemerkt, den Kegel zweiter Ordnung in Punktcoordinaten dar, der durch die fünf Tangentenebenen $C_1, C_2, \ldots C_5$ bestimmt wird. Im zweiten Falle ist sie die gesuchte Gleichung der Fläche der Kegelspitzen, und da die A_{ik} lineare Functionen der y bezeichnen, von der vierzehnten Ordnung.

Diese Fläche muss offenbar symmetrisch sein für die Geraden 1, 2, ... 5; die Gleichung (11) ist es der Form nach nicht, denn die Gerade 1 kommt nur in den Ausdrücken φ, ψ vor.

Wir erkennen sofort, dass 1 eine vierfache Linie der Fläche sein muss, weil φ und ψ für die Punkte auf 1 in der zweiten Ordnung verschwinden. Die Transversalen von 1, 2, 3, 4 sind Doppellinien der Fläche, weil φ und ψ für die Punkte derselben in der ersten Ordnung Null werden. Gleichung (11) zeigt sofort, dass x^0 ein Doppelpunkt ist.

Wir fassen diese Resultate in den Satz zusammen:

Der Ort der Spitzen der Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und fünf gegebene gerade Linien berühren, ist eine Fläche der vierzehnten Ordnung, welche diesen Punkt zum Doppelpunkt, jede der fünf Geraden zu vierfachen Linien, und jede der zehn Geraden, welche je vier der gegebenen verbinden, zur Doppellinie hat.

§ 9.

Da fünf Tangentenebenen einen Kegel eindeutig bestimmen, so giebt der Durchschnitt der Fläche (11) mit der Fläche achter Ordnung

$$(123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0$$

den Ort der Spitzen derjenigen Kegel, welche durch den gegebenen Punkt gehen und die sechs Geraden 1, 2, ... 6 berühren. Die Schnittcurve ist von der $(8.14)^{\text{ten}}$ Ordnung und zerfällt in die achtfach zu zählenden Geraden 1, 2, 3, 4, 5, in die zehn doppelt zu zählenden Transversalen und in eine Curve der $8.14-5.8-10.2 = 52^{\text{ten}}$ Ordnung. Die Gerade 6 schneidet die Fläche (11) in 14 Punkten, welche Doppelpunkte der Curve 52^{ter} Ordnung sind.

Die Transversalen von 3, 4, 5, 6 liegen auf der Fläche achter

Ordnung; jede derselben schneidet die Fläche (11) in vierzehn Punkten, von welchen drei vierfach zu rechnende auf den Geraden 3, 4, 5 liegen; die beiden übrigen gehören der Curve 52[ter] Ordnung an.

Wir haben also den Satz:

Die Spitzen der Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und sechs gegebene gerade Linien berühren, bilden eine Curve der 52[ten] Ordnung, welche auf jeder der gegebenen Geraden vierzehn Doppelpunkte besitzt, und von jeder Geraden, welche vier der gegebenen trifft, in zwei Punkten geschnitten wird.

§ 10.

Um die Kegel zu bestimmen, welche durch einen Punkt gehen und sieben gerade Linien berühren, können wir entweder die Durchschnittspunkte der Curve 34[ter] Ordnung (§ 4.) mit der Fläche (11), oder die Schnittpunkte der Fläche achter Ordnung (6) mit der Curve 52[ter] Ordnung § 9. aufsuchen.

Von den 14.34 Schnittpunkten der Fläche (11) mit der Curve 34[ter] Ordnung liegen acht achtfach zu rechnende auf jeder der Geraden 1, 2, 3, 4, 5 und zwei doppelt zu rechnende auf jeder Transversalen dieser Linien. Es bleiben also

$$34.14 - 5.8.8 - 10.2.2 = 116$$

Schnittpunkte übrig.

Die Curve 52[ter] Ordnung schneidet die Fläche achter Ordnung (6) in 52 . 8 Punkten, von welchen 14 vierfach zu rechnende auf jeder der Geraden 1, 2, 3, 4, 5 und zwei einfach zu rechnende auf jeder ihrer Transversalen liegen. Es bleiben also

$$52.8 - 5.14.4 - 10.2 = 116$$

Schnittpunkte, wie vorhin, und man hat den Satz:

Es giebt 116 Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und sieben gegebene gerade Linien berühren.

Auf die Betrachtung besonderer Fälle, welche man in ähnlicher Weise wie in § 6. mit Leichtigkeit anstellen kann, wollen wir hier nicht eingehen.

§ 11.

Um die Anzahl der Kegel zu bestimmen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, eine gegebene Ebene und fünf gegebene Geraden 1, 2, ... 5 berühren, nehmen wir in dieser Ebene eine Gerade 6 willkürlich an. Die Punkte, in welchen diese Ebene von der Curve

52^{ter} Ordnung (§ 9.) geschnitten wird, sind die Spitzen der gesuchten Kegel. Von den 52 Schnittpunkten liegen 14 doppelt zu rechnende auf der Geraden 6. Es bleiben daher $52 - 2.14 = 24$ wesentliche Schnittpunkte und wir haben den Satz:

Es giebt 24 Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, eine gegebene Ebene und fünf gegebene Geraden berühren.

Eine beliebige, durch die Gerade 1 gehende Ebene schneidet die Fläche (11) in einer Curve 14^{ter} Ordnung, welche in die vierfach zu rechnende Gerade 1 und in eine Curve der zehnten Ordnung zerfällt. Die letztere hat die Schnittpunkte der Geraden 2, 3, 4, 5 mit der Ebene zu vierfachen und die Schnittpunkte der Transversalen von 2, 3, 4, 5 mit der Ebene zu Doppelpunkten. Daraus folgt der Satz:

Die Spitzen der Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, eine gegebene Ebene und vier gegebene Geraden berühren, bilden eine ebene Curve der zehnten Ordnung, welche die Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene zu vierfachen, und die Punkte, in welchen die beiden Transversalen der gegebenen Geraden die Ebene treffen, zu Doppelpunkten hat.

Legen wir durch die Gerade 2 eine zweite beliebige Ebene, so schneidet sie die Curve zehnter Ordnung ausser in dem auf 2 liegenden vierfachen Punkte noch in sechs andern Punkten; sie sind die Spitzen der Kegel, welche beide Ebenen und die Geraden 3, 4, 5 berühren, und durch den gegebenen Punkt gehen.

Es giebt also sechs Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, zwei gegebene Ebenen und drei gegebene gerade Linien berühren.

§ 12.

Wir betrachten jetzt den Durchschnitt von zwei Oberflächen vierzehnter Ordnung, welche in der in § 8. angegebenen Weise bestimmt sind durch

die Geraden 1, 2, 3, 4, 5 und den Punkt 0 und
die Geraden 1, 2, 3, 4, 5 und den Punkt 0′.

Diese Flächen schneiden sich in einer Curve der $(14.14)^{\text{ten}}$ Ordnung, von welcher aber die sechszehnfach zu zählenden Geraden 1, 2, ... 5 und ihre zehn vierfach zu zählenden Transversalen Bestandtheile sind. Hieraus folgt, dass

die Spitzen der Kegel, welche fünf gegebene Geraden berühren und durch zwei gegebene Punkte gehen, eine Curve der 76^{ten} *Ordnung bilden.*

Die Curve 52^{ter} Ordnung (§ 9.) schneidet die zweite der oben be-

trachteten Flächen in 52.14 Punkten; davon liegen 14 achtfach zu rechnende auf jeder der Linien 1, 2, ... 5 und zwei doppelt zu rechnende auf jeder ihrer Transversalen. Die übrigen Punkte sind Spitzen von Kegeln, welche durch 0 und 0′ gehen und die Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6 berühren.

Es giebt also 128 Kegel, welche durch zwei gegebene Punkte gehen und 6 gegebene gerade Linien berühren.

§ 13.

Die Spitzen der Kegel, welche durch zwei Punkte 0 und 0′ gehen, und vier Linien 1, 2, 3, 4 berühren, bilden als zweifach unendliche Schaar eine Oberfläche, deren Gleichung in einer übersichtlichen Form abzuleiten bedeutende Schwierigkeiten zu überwinden erfordert.

Man überzeugt sich leicht auf geometrischem Wege, dass sowohl die Verbindungslinie der Punkte 0 und 0′, als die gegebenen Geraden 1, 2, 3, 4 auf der Fläche liegen müssen, weil alle ihre Punkte Spitzen von Kegeln sein können, welche den gestellten Bedingungen genügen, und zwar entsprechen den Punkten von 00′ uneigentliche Kegel dieser Art. Die Geraden 1, 2, 3, 4 und 00′ werden vielfache Linien der Fläche sein.

Die beiden Transversalen von 1, 2, 3, 4 dagegen liegen nicht auf der Fläche, weil man von den Punkten dieser Linien keine eigentlichen oder uneigentlichen Kegel den gegebenen Bedingungen gemäss construiren kann, wohl aber die Transversalen von 0 0′ und je drei der Geraden 1, 2, 3, 4.

Wir betrachten nun zwei solche Flächen, entsprechend

$$1, 2, 3, 4 \quad ; \quad 0, 0'$$

und

$$1, 2, 3, 5 \quad ; \quad 0, 0'.$$

Der Durchschnitt beider enthält den Ort der Punkte, von welchen man Berührungskegel an 1, 2, 3, 4, 5 legen kann, die zugleich durch 0 und 0′ gehen. Dieser Ort ist nach § 12 eine Curve der 76^ten^ Ordnung.

Wenn x die Ordnung der beiden Flächen bezeichnet, auf welchen die gegebenen Geraden $z$fache Linien sein mögen, so schneidet die Linie 5 die erste Fläche in x Punkten, welche $z$fache Punkte der Curve 76^ter^ Ordnung sein müssen. Diese Curve hat folglich auf jeder der Geraden 1, 2, 3, 4, fünf xzfache Punkte.

Unter den Schnittpunkten dieser Curve mit der Fläche achter Ordnung (6) befinden sich die Spitzen derjenigen Kegel, welche die Geraden 1, 2, ... 6 berühren und durch 0 und 0′ gehen. Nach § 12 ist die Anzahl dieser Kegel 128. Da die Linien 1, 2, 3, 4, 5 Dop-

pellinien der Fläche (6) sind, so ist diese Zahl andrerseits auch

$$8.76 - 5.2.xz$$

und aus der Gleichung

$$128 = 8.76 - 5.2.xz$$

folgt $xz = 48$.

Betrachten wir jetzt die Schnittpunkte der Curve 76ter Ordnung mit derjenigen Fläche 14ter Ordnung, welche aus (11) entsteht, wenn man für 0 einen dritten Punkt 0″ setzt. Da diese Fläche jede der Geraden 1, 2, 3, 4, 5 zu vierfachen Linien hat, so ist die Anzahl derjenigen Schnittpunkte, welche ausserhalb dieser Geraden liegen

$$14.76 - 4.5.xz = 104.$$

Man hat daher den Satz:

Es giebt 104 Kegel, welche durch drei gegebene Punkte gehen und fünf gegebene gerade Linien berühren.

Dieser Satz ist das letzte Resultat, welches aus unsern Hauptgleichungen (6) und (11) abgeleitet werden kann.

§ 14.

In allen vorhergehenden Untersuchungen treten wenigstens fünf berührende gerade Linien auf, welche ausreichen, um einen Kegel von gegebener Spitze eindeutig zu bestimmen.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung von Kegeln, welche mindestens durch fünf Punkte gehen, und können hierbei einen dem vorher befolgten ganz ähnlichen Weg einschlagen. Die Entwickelungen gestalten sich viel einfacher, weil an die Stelle der geraden Linien Punkte, an Stelle der Hyperboloide Ebenen treten.

Die Spitzen der Kegel, welche durch sechs gegebene Punkte gehen, bilden eine Oberfläche, deren Gleichung wir zunächst ableiten wollen. Die gegebenen Punkte

$$x_1^{(i)} \quad x_2^{(i)} \quad x_3^{(i)} \quad x_4^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

verbinden wir durch gerade Linien mit einem beliebigen Punkte

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$$

des Raumes, und drücken aus, dass die Durchschnittspunkte der sechs Geraden mit der Ebene $x_4 = 0$ auf einem Kegelschnitte liegen. Diese Durchschnittspunkte haben die Coordinaten

$$x_1 x_4^{(i)} - x_4 x_1^{(i)}\,,\; x_2 x_4^{(i)} - x_4 x_2^{(i)}\,,\; x_3 x_4^{(i)} - x_4 x_3^{(i)} \quad (i = 1, 2 \ldots 6)$$

und liegen auf einem Kegelschnitte, wenn

$$(123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0,$$

wo $(\varkappa\lambda\mu)$ die Determinante bezeichnet

$$\begin{vmatrix} x_1 x_4^{(\varkappa)} - x_4 x_1^{(\varkappa)} & x_2 x_4^{(\varkappa)} - x_4 x_2^{(\varkappa)} & x_3 x_4^{(\varkappa)} - x_4 x_3^{(\varkappa)} \\ x_1 x_4^{(\lambda)} - x_4 x_1^{(\lambda)} & x_2 x_4^{(\lambda)} - x_4 x_2^{(\lambda)} & x_3 x_4^{(\lambda)} - x_4 x_3^{(\lambda)} \\ x_1 x_4^{(\mu)} - x_4 x_1^{(\mu)} & x_2 x_4^{(\mu)} - x_4 x_2^{(\mu)} & x_3 x_4^{(\mu)} - x_4 x_3^{(\mu)} \end{vmatrix},$$

welche identisch ist mit

$$- x_4^2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^{(\varkappa)} & x_2^{(\varkappa)} & x_3^{(\varkappa)} & x_4^{(\varkappa)} \\ x_1^{(\lambda)} & x_2^{(\lambda)} & x_3^{(\lambda)} & x_4^{(\lambda)} \\ x_1^{(\mu)} & x_2^{(\mu)} & x_3^{(\mu)} & x_4^{(\mu)} \end{vmatrix}.$$

Wir wollen von nun an unter $(\varkappa\lambda\mu)$ den Factor von $-x_4^2$ verstehen. Es stellt, gleich Null gesetzt, die durch die Punkte $\varkappa$, λ, μ bestimmte Ebene dar. Nun ist

$$(12) \qquad (123)(145)(625)(634) - (125)(134)(623)(645) = 0$$

die Gleichung der Fläche der Kegelspitzen, frei von jedem überflüssigen Factor. Diese Gleichung ist der Form nach identisch mit (6). Aber in der letztern bedeuten 1, 2, ... 6 gerade Linien und $(\varkappa\,\lambda\,\mu)$ Hyperboloide, während in (12) diese Zeichen für Punkte und Ebenen gesetzt sind.

Aus Gleichung (12) können wir sofort den Satz ablesen:

Die Spitzen der Kegel, welche durch sechs gegebene Punkte gehen, bilden eine Oberfläche der vierten Ordnung, welche diese Punkte zu Doppelpunkten hat. Auf ihr liegen die 15 Verbindungslinien von je zweien der sechs Punkte und die Schnittlinien der 10 Ebenenpaare, welche man durch die sechs Punkte hindurchlegen kann.

Wir nehmen nun, analog den Betrachtungen in § 4., zu der Fläche (12) eine zweite, gleichgebildete Fläche hinzu, in welcher der Punkt 6 durch einen weitern gegebenen Punkt 7 ersetzt ist. Beide Flächen haben die zehn Verbindungslinien der Punkte 1, 2, ... 5 gemein und schneiden sich ausserdem noch in einer Curve der sechsten Ordnung. Von den vier Schnittpunkten der ersten Fläche mit der Verbindungslinie von 5 und 7 fallen zwei in den Punkt 5; die beiden andern liegen auf der Curve sechster Ordnung.

So ergiebt sich der Satz:

Die Spitzen der Kegel, welche durch sieben gegebene Punkte hindurchgehen, bilden eine Curve der sechsten Ordnung, welche die Verbindungslinien dieser Punkte zu Sehnen hat.

Von den 24 Schnittpunkten dieser Curve mit einer dritten, den Punkten 3, 4, 5, 6, 7, 8 entsprechenden Fläche vierter Ordnung liegen 20 auf den Verbindungslinien der Punkte 3, 4, 5, 6, 7.

Es giebt daher vier Kegel, welche durch acht Punkte gehen, wie bekannt.

§ 15.

Wir haben in § 8. an die Stelle einer der gegebenen Geraden einen Punkt treten lassen; in ähnlicher Weise können wir jetzt einen der gegebenen Punkte durch eine Gerade ersetzen und den Ort der Spitzen der Kegel untersuchen, welche durch fünf gegebene Punkte gehen und eine gegebene gerade Linie berühren.

Es mögen

$$x_1^{(i)} \quad x_2^{(i)} \quad x_3^{(i)} \quad x_4^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots 5)$$

die Coordinaten der gegebenen Punkte, und

$$y_1 \; y_2 \; y_3 \; y_4 \quad , \quad z_1 \; z_2 \; z_3 \; z_4$$

die Coordinaten von irgend zwei Punkten der gegebenen Geraden sein.

Wir haben weiter nichts zu thun, als in Gleichung (12) an Stelle des Punktes $x^{(6)}$ irgend einen Punkt

$$y_1 - \lambda z_1, \quad y_2 - \lambda z_2, \quad y_3 - \lambda z_3, \quad y_4 - \lambda z_4$$

der gegebenen Geraden zu setzen und die nach λ gebildete Discriminante der Gleichung (12) mit Null zu vergleichen.

Bezeichnen wir wie in § 8. die Producte (123) (145) und (123) (134) mit φ und ψ und setzen

$$f_{ik}(u) = \Sigma \pm x_1 u_2 x_3^{(i)} x_4^{(k)},$$

so erhalten wir aus (12) die Gleichung

$$\varphi \left\{ M + 2N\lambda + P\lambda^2 \right\} - \psi \left\{ M' + 2N'\lambda + P'\lambda^2 \right\} = 0,$$

wo die M, N, P, M', N', P' ganz wie in § 8., Seite 575 aus den $f_{ik}(y)$ und $f_{ik}(z)$ zusammengesetzt sind.

Bilden wir jetzt die Discriminante und definiren die Ausdrücke A_{ik} durch die Gleichungen

$$f_{ik}(u) = u_1 A'_{ik} + u_2 A''_{ik} + u_3 A'''_{ik} + u_4 A''''_{ik},$$

so erhalten wir als Gleichung der Fläche der Kegelspitzen:

$$\begin{aligned} & \varphi^2 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} A_{25} \\ A_{31} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \right\}^2 \\ (13) \quad & + 2\varphi\psi \cdot \left\{ \begin{vmatrix} A_{25} \\ A_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \right\} \\ & + \psi^2 \left\{ \begin{vmatrix} A_{23} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \right\}^2 = 0, \end{aligned}$$

welche der Form nach mit (11) vollkommen übereinstimmt.

Wie Gleichung (11) so gestattet auch Gleichung (13) eine doppelte Interpretation. Betrachtet man nämlich die in φ, ψ und den A_{ik} vorkommenden Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 als Constanten und die Determinanten des Systems

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix},$$

welche wir in passender Reihenfolge mit passenden Zeichen durch

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots \quad v_6$$

bezeichnen wollen, als Veränderliche, welche der Gleichung

$$v_1 v_4 + v_2 v_5 + v_3 v_6 = 0$$

genügen, so stellt Gleichung (13) den Kegel in Liniencoordinaten dar, welcher den Punkt x zur Spitze hat und durch die Punkte $1, 2, \ldots 5$ geht.

Betrachten wir dagegen die x als die Veränderlichen, so ist (13) die Gleichung des gesuchten Ortes der Kegelspitzen und wir können aus ihr sofort den Satz ablesen:

Die Spitzen der Kegel, welche durch fünf gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade berühren, bilden eine Fläche achter Ordnung, welche sowohl die gegebene Gerade als die zehn Verbindungslinien der fünf Punkte zu Doppellinien hat.

§ 16.

Mit Hülfe der Gleichungen (12) und (13) kann man in ähnlicher Weise wie mit den Gleichungen (6) und (11) eine Reihe von Abzählungen machen. Wir führen darunter folgende an:

Die Spitzen der Kegel, welche durch sechs Punkte gehen und eine Gerade berühren, bilden eine Curve der zwölften Ordnung mit vier Doppelpunkten auf der gegebenen Geraden und vier einfachen Punkten auf jeder Verbindungslinie der gegebenen Punkte.

Es giebt acht Kegel, welche durch sieben Punkte gehen und eine Gerade berühren.

Die Spitzen der Kegel, welche durch fünf Punkte gehen und zwei gerade Linien berühren, bilden eine Curve der 24ten Ordnung mit acht Doppelpunkten auf jeder der gegebenen Geraden.

Es giebt 16 Kegel, welche durch sechs Punkte gehen und zwei gerade Linien berühren.

Es giebt acht Kegel, welche durch fünf Punkte gehen, eine Ebene und eine gerade Linie berühren.

Es giebt vier Kegel, welche durch sechs Punkte gehen und eine Ebene berühren.

U. s. w.

Die im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen reichen aus für alle Abzählungen von Kegeln, zu deren Bestimmung entweder mindestens fünf Punkte, oder mindestens fünf gerade Linien gegeben sind.

Wir behalten uns vor, in einer spätern Arbeit auf diesen Gegenstand zurückzukommen, und auch die geringe Zahl der übrigen Fälle zu behandeln.

Carlsruhe im December 1869.

Untersuchungen über einige Punkte aus der allgemeinen Theorie der Flächen.

Von A. Enneper in Göttingen.

Die analytische Behandlung geometrischer Probleme, welche sich auf Flächen und Curven derselben beziehen, basirt, nach dem Vorgange von Gauss, auf zwei Liniensystemen, welche auf einer Fläche angenommen werden und für die Bestimmung der Lage eines Punktes eine ähnliche Bedeutung haben, wie die gerad- oder krummlinigen Coordinatensysteme der Ebene. Zwischen den Elementen, durch welche die Krümmung einer Fläche und die Länge eines Bogenelements definirt werden, finden eine Anzahl fundamentaler Gleichungen statt, welche, je nach der Wahl der beiden Curvensysteme, mehr oder minder einfache Formen annehmen. Wenn auch im Folgenden ein System von Flächencoordinaten besonders zur Anwendung kommt, so scheint es für das leichtere Verständniss der zu entwickelnden Gleichungen gut zu sein, zuerst einige allgemeine Relationen in möglichster Kürze darzustellen. Es ist dabei versucht durch eine geringe Anzahl von Beziehungen die Uebersicht der Formeln zu erleichtern.

I.

Die orthogonalen Coordinaten x, y, z eines Punktes einer Fläche seien Functionen zweier Variabeln u und v. Setzt man:

$$(1)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=E,\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=G,\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=F,$$

so ist das Bogenelement ∂s einer Curve der Fläche durch die Gleichung gegeben:

$$(\partial s)^2 = E(\partial u)^2 + 2F\,\partial u\,\partial v + G(\partial v)^2.$$

Aus den Gleichungen (1) erhält man unmittelbar:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}, \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, & \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \end{cases}$$

Die Gleichungen der Hauptkrümmungshalbmesser — welche im Folgenden durch r' und r'' bezeichnet werden sollen — enthalten ausser E, F, G noch drei Determinanten A, B, C, für welche die Gleichungen stattfinden:

$$(3)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = B, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = C.$$

Für r' und r'' bestehen die beiden Relationen:

$$(4)\quad \frac{AG + BE - 2\,CF}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}, \quad \frac{AB - C^2}{(EG - F^2)^2} = \frac{1}{r'\,r''}.$$

Nimmt man:

$$(5)\quad \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = A_0, \quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = B_0, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = C_0,$$

so lassen sich die Gleichungen (3) auch auf folgende Weise schreiben:

$$(6)\quad \begin{cases} A_0\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C_0\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = A, \\ A_0\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C_0\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = B, \\ A_0\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + B_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + C_0\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = C. \end{cases}$$

Die Gleichungen 1) und 5) geben:

$$A_0\,\frac{\partial x}{\partial u} + B_0\,\frac{\partial y}{\partial u} + C_0\,\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad A_0\,\frac{\partial x}{\partial v} + B_0\,\frac{\partial y}{\partial v} + C_0\,\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$
$$A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 = EG - F^2.$$

Differentiirt man die vorstehenden Gleichungen nach u und v, so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichungen 6):

$$(7)\quad \begin{cases} A_0\frac{\partial A_0}{\partial u} + B_0\frac{\partial B_0}{\partial u} + C_0\frac{\partial C_0}{\partial u} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial (EG - F^2)}{\partial u}, \quad A_0\frac{\partial A_0}{\partial v} + B_0\frac{\partial B_0}{\partial v} + C_0\frac{\partial C_0}{\partial v} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial (EG - F^2)}{\partial v}, \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial A_0}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial B_0}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial C_0}{\partial u} = -A, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial A_0}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial B_0}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial C_0}{\partial v} = -C, \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial A_0}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial B_0}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial C_0}{\partial u} = -C, \quad \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial A_0}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial B_0}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial C_0}{\partial v} = -B. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 1) und 5) folgt:

$$(8)\quad \begin{vmatrix} A_0, & B_0, & C_0, \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v}, \end{vmatrix} = EG - F^2$$

Mit Hülfe der Gleichungen (2) und (6) lassen sich die zweiten Differentialquotienten von x, y, z nach u und v durch ihre ersten Differentialquotienten, die ersten Differentialquotienten von E, F, G und durch die Quantitäten A_0, B_0, C_0 darstellen. Da diese Differentialquotienten

in Beziehung auf x, y, z und A_0, B_0, C_0 symmetrisch sind, so wird es hinreichen dieselben nur für eine der Coordinaten aufzustellen. Ebenso sollen aus (7) nur die Differentialquotienten von A_0 nach u und v bemerkt werden. Aus den angegebenen Gleichungen findet man:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{A_0}{\sqrt{(EG-F^2)}} = -\dfrac{AG-CF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{CE-AF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{A_0}{\sqrt{(EG-F^2)}} = -\dfrac{CG-BF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{BE-CF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} (EG-F^2)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial x}{\partial u}\right) = \dfrac{AA_0}{\sqrt{E}} + \dfrac{\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial F}{\partial u}}{\sqrt{E}}\left(\dfrac{F}{E}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\right), \\[3ex] (EG-F^2)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial x}{\partial u}\right) = \dfrac{CA_0}{\sqrt{E}} - \dfrac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2\sqrt{E}}\left(\dfrac{F}{E}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\right), \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} (EG-F^2)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) = \dfrac{CA_1}{\sqrt{G}} - \dfrac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2\sqrt{G}}\left(\dfrac{F}{G}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}\right), \\[3ex] (EG-F^2)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) = \dfrac{BA_0}{\sqrt{G}} + \dfrac{\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} - G\frac{\partial F}{\partial v}}{2\sqrt{G}}\left(\dfrac{F}{G}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}\right). \end{cases}$$

Durch Bildung der doppelten Werthe von $\dfrac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)$ etc. lassen sich aus den vorstehenden Gleichungen drei Gleichungen ableiten, deren eine in Beziehung auf A, B, C algebraisch ist, während die beiden andern die Differentialquotienten von A, B, C enthalten. Diese beiden letzteren Gleichungen lassen sich einfacher auf folgende Art herstellen. Aus den Gleichungen (3) findet man:

$$\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u} = 2\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\[1ex] \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\[1ex] \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\[1ex] \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\[1ex] \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}.$$

Nach 2) und 6) ist nun:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\[1ex] \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\[1ex] \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_0, & B_0, & C_0, \\[1ex] \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\[1ex] \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A, & C, & 0 \\[1ex] \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, & F \\[1ex] \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, & G \end{vmatrix}.$$

Auf ganz dieselbe Art lässt sich leicht die zweite Determinante in $\dfrac{\partial A}{\partial v} - \dfrac{\partial C}{\partial u}$ durch B, C und E, F, G nebst deren Differentialquotienten

ausdrücken. Man verificirt so ohne Mühe die beiden folgenden Gleichungen:

$$(12)\left\{\begin{aligned}&(EG-F^2)\left(\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial C}{\partial u}\right)=A\left(G\,\frac{\partial E}{\partial v}+\tfrac{1}{2}\,E\frac{\partial G}{\partial v}-F\frac{\partial F}{\partial v}-\tfrac{1}{2}\,F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\\ &\quad+B\left(\tfrac{1}{2}\,E\,\frac{\partial E}{\partial v}+\tfrac{1}{2}\,F\frac{\partial E}{\partial u}-E\frac{\partial F}{\partial u}\right)+C\left(2\,F\,\frac{\partial F}{\partial u}-G\,\frac{\partial E}{\partial u}-F\,\frac{\partial E}{\partial v}\right),\\ &(EG-F^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u}-\frac{\partial C}{\partial v}\right)=B\left(E\frac{\partial G}{\partial u}+\tfrac{1}{2}\,G\,\frac{\partial E}{\partial u}-F\,\frac{\partial F}{\partial u}-\tfrac{1}{2}\,F\,\frac{\partial E}{\partial v}\right)\\ &\quad+A\left(\tfrac{1}{2}\,G\,\frac{\partial G}{\partial u}+\tfrac{1}{2}\,F\frac{\partial G}{\partial v}-G\frac{\partial F}{\partial v}\right)+C\left(2\,F\,\frac{\partial F}{\partial v}-E\,\frac{\partial G}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}\right).\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen (9), (10) und (11) lassen sich etwas übersichtlicher durch Einführung der folgenden Grössen darstellen. Seien a, b, c die Winkel, welche die Normale im Punkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, die Tangente zur Curve, für welche u allein variirt, bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel a_1, b_1, c_1; analoge Bedeutungen mögen a_2, b_2, c_2 für die Curve haben, für welche v allein variabel ist. Mit Rücksicht auf die Werthe von A_0, B_0, C_0 aus 5) finden die Gleichungen statt:

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\cos a}{A_0}=\frac{\cos b}{B_0}=\frac{\cos c}{C_0}=\frac{1}{\sqrt{(EG-F^2)}},\\ &\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial x}{\partial u}=\cos a_1,\ \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial y}{\partial u}=\cos b_1,\ \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial z}{\partial u}=\cos c_1,\\ &\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial x}{\partial v}=\cos a_2,\ \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial y}{\partial v}=\cos b_2,\ \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial z}{\partial v}=\cos c_2,\end{aligned}\right.$$

Zur Abkürzung werde ferner gesetzt:

$$(14)\left\{\begin{aligned}&\cos a_1\cos a_2+\cos b_1\cos b_2+\cos c_1\cos c_2=\cos\psi=\frac{F}{\sqrt{(EG)}},\ \sin\psi=\frac{\sqrt{(EG-F^2)}}{\sqrt{(EG)}},\\ &\tfrac{1}{2}\,\frac{G\,\frac{\partial E}{\partial v}-F\,\frac{\partial G}{\partial u}}{G\sqrt{(EG-F^2)}}=M,\ \tfrac{1}{2}\,\frac{E\,\frac{\partial G}{\partial u}-F\,\frac{\partial E}{\partial v}}{E\sqrt{(EG-F^2)}}=N.\end{aligned}\right.$$

Mittelst der Gleichungen (13) und (14) lassen sich die Gleichungen (8), (9), (10) und (11) auf folgende Formen bringen:

$$(15)\quad\begin{vmatrix}\cos a, & \cos b, & \cos c,\\ \cos a_1, & \cos b_1, & \cos c_1,\\ \cos a_2, & \cos b_2, & \cos c_2,\end{vmatrix}=\sin\,\psi.$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\cos a}{\partial u}=-\frac{AG-CF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{E}\cos a_1-\frac{CE-AF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{G}\cos a_2\,,\\ &\frac{\partial\cos a}{\partial v}=-\frac{CG-BF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{E}\cos a_1-\frac{BE-CF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{G}\cos a_2\,,\\ &\frac{\partial\cos a_1}{\partial u}=\frac{A}{\sqrt{E}\cdot\sqrt{(EG-F^2)}}\cos\,a+\frac{M+\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sin\psi}\,(\cos\,a_1\,\cos\,\psi-\cos\,a_2),\end{aligned}\right.$$

$$(16)\begin{cases} \dfrac{\partial \cos a_1}{\partial v} = \dfrac{C}{\sqrt{E}.\sqrt{(EG-F^2)}}\cos a - \dfrac{N}{\sin\psi}(\cos a_1\cos\psi - \cos a_2), \\ \dfrac{\partial \cos a_2}{\partial u} = \dfrac{C}{\sqrt{G}.\sqrt{(EG-F^2)}}\cos a - \dfrac{M}{\sin\psi}(\cos a_2\cos\psi - \cos a_1), \\ \dfrac{\partial \cos a_2}{\partial v} = \dfrac{B}{\sqrt{G}.\sqrt{(EG-F^2)}}\cos a + \dfrac{N+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}{\sin\psi}(\cos a_2\cos\psi - \cos a_1). \end{cases}$$

Die Gleichungen 13) und 14) geben:

$$(17)\begin{cases} \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1, \; \cos a_1 \cos a_2 + \cos b_1 \cos b_2 + \cos c_1 \cos c_2 = \cos\psi, \\ \cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1, \; \cos a \cos a_2 + \cos b \cos b_2 + \cos c \cos c_2 = 0, \\ \cos^2 a_2 + \cos^2 b_2 + \cos^2 c_2 = 1, \; \cos a \cos a_1 + \cos b \cos b_1 + \cos c \cos c_1 = 0, \end{cases}$$

Sind die Gleichungen gegeben:

$$(18)\begin{cases} H\cos a + H_1\cos a_1 + H_2\cos a_2 = 0, \; H\cos b + H_1\cos b_1 + H_2\cos b_2 = 0, \\ \qquad H\cos c + H_1\cos c_1 + H_2\cos c_2 = 0, \end{cases}$$

so folgt nach 15), dass diese Gleichungen nur bestehen können für $H = 0$, $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, da $\sin\psi$ nicht verschwinden kann. Bildet man nun aus 16) die doppelten Werthe von:

$$\frac{\partial^2 \cos a}{\partial u\,\partial v}, \quad \frac{\partial^2 \cos a_1}{\partial u\,\partial v}, \quad \frac{\partial^2 \cos a_2}{\partial u\,\partial v},$$

so ergeben sich drei Gleichungen, von denen jede einzelne wieder ein System von Gleichungen von der Art der Gleichungen (18) repräsentirt. Hierdurch ergeben sich neun Bedingungsgleichungen, die sich factisch auf drei reduciren. Sechs dieser Gleichungen sind in den beiden Gleichungen (12) enthalten, die drei übrigen reduciren sich auf die folgende:

$$(19)\qquad \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial N}{\partial v} + \frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} + \frac{AB - C^2}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

oder nach 4):

$$(20)\qquad \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial N}{\partial v} + \frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\sqrt{(EG-F^2)}}{r'\,r''} = 0.$$

Setzt man hierin für M, N, ψ ihre Werthe aus (14) und (15), so ergiebt sich der bekannte Satz von Gauss, dass das Krümmungsmaass nur von den Quantitäten E, F, G und deren Differentialquotienten abhängt.

Mittelst der Gleichungen (16) lässt sich unmittelbar zeigen, dass für gegebene E, F, G jede der Coordinaten x, y, z derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Aus (15) und (17) findet man:

$$\cos a \sin\psi = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, \\ \cos a_1, & \cos b_1, & \cos c_1 \\ \cos a_2, & \cos b_2, & \cos c_2 \end{vmatrix}, \quad \cos^2 a \sin^2\psi = \begin{vmatrix} 1, & \cos a_1, & \cos a_2 \\ \cos a_1, & 1, & \cos\psi \\ \cos a_2, & \cos\psi, & 1 \end{vmatrix}.$$

Die vorstehende Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (16) und (20) giebt:

$$\left\{\frac{\partial\cos a_1}{\partial u} - \frac{M+\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sin\psi}(\cos a_1\cos\psi-\cos a_2)\right\}\left\{\frac{\partial\cos a_2}{\partial v} - \frac{N+\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\sin\psi}(\cos a_2\cos\psi-\cos a_1)\right\}$$
$$-\left\{\frac{\partial\cos a_1}{\partial v}+\frac{N}{\sin\psi}(\cos a_1\cos\psi-\cos a_2)\right\}\left\{\frac{\partial\cos a_2}{\partial u}+\frac{M}{\sin\psi}(\cos a_2\cos\psi-\cos a_1)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{EG}}{r'r''}(\sin^2\psi-\cos^2 a_1-\cos^2 a_2+2\cos a_1\cos a_2\cos\psi)=0.$$

Sind E, F, G in einem bestimmten System von Flächencoordinaten gegeben, so lässt sich die vorstehende nicht lineare, partielle Differentialgleichung wegen der Gleichungen (12) und (19) auf zwei lineare, partielle Differentialgleichungen reduciren.

II.

Die Ebene:

$$(X-x)\cos l+(Y-y)\cos m+(Z-z)\cos n=0,$$

gehe durch die Normale des Punktes (x, y, z), sei $\partial\sigma$ das Bogenelement der planen Schnittcurve, ferner ϱ_τ ihr Krümmungshalbmesser im Punkte (x, y, z). Man hat dann folgende Gleichungen:

$$(1)\quad \cos a\frac{\partial x}{\partial\sigma}+\cos b\frac{\partial y}{\partial\sigma}+\cos c\frac{\partial z}{\partial\sigma}=0,\quad \cos l\frac{\partial x}{\partial\sigma}+\cos m\frac{\partial y}{\partial\sigma}+\cos n\frac{\partial z}{\partial\sigma}=0,$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\sigma}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)^2=1,$$
$$\cos a\cos l+\cos b\cos m+\cos c\cos n=0,\quad \frac{1}{\varrho_\tau}=\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\sigma^2}\right)^2\right\}}.$$

Aus diesen Gleichungen findet man unmittelbar:

$$\begin{vmatrix}\cos a, & \cos b, & \cos c\\ \cos l, & \cos m, & \cos n\\ \frac{\partial x}{\partial\sigma}, & \frac{\partial y}{\partial\sigma}, & \frac{\partial z}{\partial\sigma}\end{vmatrix}^2=1.$$

Die Gleichungen (1) nach σ differentiirt geben:

$$\cos a\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma^2}+\cos b\frac{\partial^2 y}{\partial\sigma^2}+\cos c\frac{\partial^2 z}{\partial\sigma^2}=-\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\frac{\partial\cos a}{\partial\sigma}+\frac{\partial y}{\partial\sigma}\frac{\partial\cos b}{\partial\sigma}+\frac{\partial z}{\partial\sigma}\frac{\partial\cos c}{\partial\sigma}\right),$$
$$\cos l\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma^2}+\cos m\frac{\partial^2 y}{\partial\sigma^2}+\cos n\frac{\partial^2 z}{\partial\sigma^2}=0,\quad \frac{\partial x}{\partial\sigma}\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial y}{\partial\sigma}\frac{\partial^2 y}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial z}{\partial\sigma}\frac{\partial^2 z}{\partial\sigma^2}=0.$$

Setzt man hieraus die Werthe von $\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma^2}$ etc. in die Gleichung für ϱ_τ, nimmt die Quadratwurzel negativ, so folgt:

$$(2)\qquad \frac{1}{\varrho_\tau}=-\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\frac{\partial\cos a}{\partial\sigma}+\frac{\partial y}{\partial\sigma}\frac{\partial\cos b}{\partial\sigma}+\frac{\partial z}{\partial\sigma}\frac{\partial\cos c}{\partial\sigma}\right).$$

Längs der Schnittcurve kann man u und v als Functionen von σ ansehn, es ist dann:

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \cos a}{\partial \sigma} = \frac{\partial \cos a}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial \cos a}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \sigma} \text{ etc.}$$

Mittelst der Gleichungen (13), (14) und (16) von I. nimmt die Gleichung (2) folgende Form an:

$$(3) \qquad \frac{\sqrt{(EG-F^2)}}{\varrho_\tau} = A\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\,C\frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial v}{\partial \sigma} + B\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right)^2.$$

Im Punkte (x, y, z) der Curve, für welche u allein variirt, sei $\varrho_\iota = \varrho_u^*$, für die andere Curve sei $\varrho_\tau = \varrho_v^*$. Im ersten Falle hat man in 3) zu setzen $\sqrt{E}\cdot\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial \sigma} = 0$, im zweiten Falle ist: $\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0, \sqrt{G}\frac{\partial v}{\partial \sigma} = 1$, da allgemein die Gleichung besteht:

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\,F\frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial v}{\partial \sigma} + G\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right)^2 = 1.$$

Man erhält so:

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho_u^*} = \frac{A}{E\sqrt{(EG-F^2)}}, \quad \frac{1}{\varrho_v^*} = \frac{B}{G\sqrt{(EG-F^2)}}.$$

In vielen Fällen ist die Anwendung eines Systems schiefwinkliger Flächencoordinaten zu complicirt, im Folgenden soll zur Vereinfachung $F = 0$, also $\cos\psi = 0$ und $\sin\psi = 1$ angenommen werden. Die Gleichungen 14) von I. geben dann:

$$M = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad N = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

An die Stelle der Gleichungen (15), (16), (12) und (20) von I. treten die folgenden:

$$(5)\begin{cases} \frac{\partial \cos a}{\partial u} = -\frac{A}{E\sqrt{G}}\cos a_1 - \frac{C}{G\sqrt{E}}\cos a_2, & \frac{\partial \cos a}{\partial v} = -\frac{C}{E\sqrt{G}}\cos a_1 - \frac{B}{G\sqrt{E}}\cos a_2, \\ \frac{\partial \cos a_1}{\partial u} = \frac{A}{E\sqrt{G}}\cos a - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos a_2, & \frac{\partial \cos a_1}{\partial v} = \frac{C}{E\sqrt{G}}\cos a + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos a_2, \\ \frac{\partial \cos a_2}{\partial u} = \frac{C}{G\sqrt{E}}\cos a + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos a_1, & \frac{\partial \cos a_2}{\partial v} = \frac{B}{G\sqrt{E}}\cos a - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos a_2, \end{cases}$$

$$(6)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v}\frac{A}{E\sqrt{G}} = \frac{B}{G\sqrt{E}}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{C}{E}, \\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{B}{G\sqrt{E}} = \frac{A}{E\sqrt{G}}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{C}{G}, \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\sqrt{(EG)}}{r'r''} = 0 \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \cos a_1, & \cos b_1, & \cos c_1 \\ \cos a_2, & \cos b_2, & \cos c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen (4) und die Gleichungen für die Hauptkrümmungshalbmesser werden:

$$(8)\quad \frac{1}{\varrho_u^*} = \frac{A}{E\sqrt{(EG)}}, \quad \frac{1}{\varrho_v^*} = \frac{B}{G\sqrt{(EG)}}, \quad \frac{1}{\varrho_u^*} + \frac{1}{\varrho_v^*} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}, \quad \frac{AB-C^2}{(EG)^2} = \frac{1}{r'\,r''},$$

Die Gleichungen 5), 6), 7) und 8) enthalten für orthogonale Flächencoordinaten die fundamentalen Relationen, welche bei Untersuchung von Flächen zur Anwendung kommen, es bleibt noch übrig für eine Curve, welche auf einer Fläche liegt, die wichtigsten Gleichungen herzustellen.

Für eine beliebige Raumcurve bilde die Tangente im Punkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ. Seien ferner λ, μ, ν und l, m, n die Winkel, welche respective die Hauptnormale und die Normale zur Krümmungsebene mit den Axen einschliessen. Bezeichnet man durch ∂s das Bogenelement, durch $\partial \varepsilon$ den Winkel zweier successiven Tangenten, durch $\partial \omega$ den Winkel zweier successiven osculatorischen Ebenen, so sind durch die Gleichungen:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\partial \omega}{\partial s},$$

der Krümmungsradius ϱ und der Torsionsradius r definirt. Längs der Curve besteht zwischen u und v eine Gleichung, man kann folglich jede dieser Variabelen als Function einer dritten Variabelen ansehn, für welche der Einfachheit halber s genommen werde. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\left(\sqrt{E}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\sqrt{G}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 = 1,$$

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} = \sqrt{E}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}\cos\alpha_1 + \sqrt{G}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}\cos\alpha_2.$$

Ist Θ der Winkel, welchen die Tangente zur Curve im Punkte (x,y,z) mit der Curve bildet, für welche u allein variirt, so kann man setzen:

$$(9)\qquad \sqrt{E}\cdot\frac{\partial u}{\partial s} = \cos\Theta, \quad \sqrt{G}\cdot\frac{\partial v}{\partial s} = \sin\Theta,$$

folglich:

$$(10)\qquad \cos\alpha = \cos\Theta\,\cos\alpha_1 + \sin\Theta\,\cos\alpha_2.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 5) und 9) folgt:

$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial s} = \frac{\cos\lambda}{\varrho} = H\cos\alpha + H_1\,(\cos\alpha_2\,\cos\Theta - \cos\alpha_1\,\sin\Theta),$$

wo:

$$(11)\left\{\begin{aligned} H &= \left(\frac{A}{E}\cos^2\Theta + 2\frac{C}{\sqrt{(EG)}}\sin\Theta\cos\Theta + \frac{B}{G}\sin^2\Theta\right)\frac{1}{\sqrt{(EG)}} \\ H_1 &= \frac{\partial\Theta}{\partial s} - \frac{1}{\sqrt{(EG)}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\Theta + \frac{1}{\sqrt{(EG)}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sin\Theta. \end{aligned}\right.$$

Nimmt man:

$$(12) \qquad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{(H^2 + H_1^2)},$$

so ist:

$$(13) \qquad \cos\lambda = \frac{H\cos a + H_1(\cos a_2 \cos\Theta - \cos a_1 \sin\Theta)}{\sqrt{(H^2 + H_1^2)}}$$

Setzt man in der Gleichung:

$$-\frac{\cos l}{r} = \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} + \frac{\cos\alpha}{\varrho}$$

für $\cos\alpha$, $\frac{1}{\varrho}$, $\cos\lambda$ ihre Werthe aus (10), (12) und (13), so folgt mittelst der Gleichungen (6) und (9):

$$\frac{\cos l}{r} = \frac{H_1 \cos a - H(\cos a_2 \cos\Theta - \cos a_1 \sin\Theta)}{\sqrt{(H^2 + H_1^2)}} \left\{ \frac{H\frac{\partial H_1}{\partial s} - H_1 \frac{\partial H}{\partial s}}{H^2 + H_1^2} + \left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta \right\}.$$

Nimmt man:

$$(14) \qquad \frac{1}{r} = \frac{H\frac{\partial H_1}{\partial s} - H_1\frac{\partial H}{\partial s}}{H^2 + H_1^2} + \left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta,$$

so ist:

$$(15) \qquad \cos l = \frac{H_1\cos a - H(\cos a_2 \cos\Theta - \cos a_1 \sin\Theta)}{\sqrt{(H^2 + H_1^2)}}.$$

Ist (ξ, η, ζ) der Mittelpunkt der osculatorischen Kugelfläche, R ihr Radius, so bestehen die Gleichungen:

$$\xi = x + \varrho\cos\lambda - r\frac{\partial\varrho}{\partial s}\cos l, \quad R^2 = \varrho^2 + \left(r\frac{\partial\varrho}{\partial s}\right)^2,$$

folglich nach (12), (13), (14) und (15):

$$(16) \quad \begin{cases} (\xi - x)\left\{ \frac{H\frac{\partial H_1}{\partial s} - H_1\frac{\partial H}{\partial s}}{H_1^2 + H^2} + \left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta \right\} = \\ \quad \frac{\cos a}{(H^2 + H_1^2)}\left\{ \frac{\partial H_1}{\partial s} + H\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - H\frac{C}{EG}\cos 2\Theta \right\} \\ -\frac{\cos a_2 \cos\Theta - \cos a_1 \sin\Theta}{(H^2 + H_1^2)}\left\{ \frac{\partial H}{\partial s} - H_1\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} + H_1\frac{C}{EG}\cos 2\Theta \right\}, \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} \left\{ \frac{H\frac{\partial H_1}{\partial s} - H_1\frac{\partial H}{\partial s}}{H^2 + H_1^2} + \left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta \right\}^2 R^2 \\ = \frac{1}{(H^2 + H_1^2)^2}\left\{ \frac{\partial H_1}{\partial s} + H\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - H\frac{C}{EG}\cos 2\Theta \right\}^2 \\ + \frac{1}{(H^2 + H_1^2)^2}\left\{ \frac{\partial H}{\partial s} - H_1\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} + H_1\frac{C}{EG}\cos 2\Theta \right\}^2. \end{cases}$$

Der Ausdruck von H in (11) sowie die Quantität

$$\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta$$

der Gleichungen (14), (16) und (17) lassen sich auf folgende Weise darstellen. Ist φ der Winkel, welchen die Curve, für welche u allein variirt, mit dem Hauptschnitt bildet, dessen Krümmungshalbmesser r' ist, so hat man bekanntlich:

$$\frac{1}{\varrho_u^*} = \frac{\cos^2\varphi}{r'} + \frac{\sin^2\varphi}{r''}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (8) giebt:

$$\frac{A}{E\sqrt{(EG)}} = \frac{\cos^2\varphi}{r'} + \frac{\sin^2\varphi}{r''}, \quad \frac{B}{G\sqrt{(EG)}} = \frac{\sin^2\varphi}{r'} + \frac{\cos^2\varphi}{r''},$$

$$\left(\frac{C}{EG}\right)^2 = \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi.$$

Nimmt man:

$$(18) \qquad \frac{C}{EG} = \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) \sin\varphi \cos\varphi,$$

so folgt:

$$H = \frac{\cos^2(\Theta - \varphi)}{r'} + \frac{\sin^2(\Theta - \varphi)}{r''},$$

$$\left(\frac{A}{E} - \frac{B}{G}\right)\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{(EG)}} - \frac{C}{EG}\cos 2\Theta = \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)\sin(\Theta - \varphi)\cos(\Theta - \varphi) \text{*)}.$$

III.

Die Tangenten zu den Hauptschnitten hüllen zwei Systeme von Curven ein, die nach Monge Krümmungslinien heissen. Lässt man ein orthogonales System von Flächencoordinaten mit den Krümmungslinien zusammenfallen, so hat man in der Gleichung (18) von II. entweder $\sin\varphi = 0$ oder $\cos\varphi = 0$, also $C = 0$. Die Krümmungshalbmesser ϱ_u^* und ϱ_v^* sind dann mit r' und r'' identisch. Sei $\varrho_u^* = r'$ und $\varrho_v^* = r''$. Die Gleichungen (8) und (6) von II. geben dann:

$$(1) \qquad \frac{A}{E\sqrt{(EG)}} = \frac{1}{r'}, \quad \frac{B}{G\sqrt{(EG)}} = \frac{1}{r''}.$$

---

*) Unter den verschiedenen Theoremen zu welchen die vorhergehenden Formeln Veranlassung geben, möge nur das folgende hervorgehoben werden. Haben r' und r'' entgegengesetzte Zeichen, so existiren auf der Fläche zwei Systeme von Curven, bestimmt durch die Gleichung $H = 0$, welche die Eigenschaft haben, dass der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts, welcher durch eine ihrer Tangenten geht, unendlich gross ist. Diese Linien heissen bekanntlich nach Dupin asymptotische Linsen. Setzt man in den Gleichungen (11) und (14) $H = 0$, so folgt durch Elimination von Θ:

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{AB - C^2}{(EG)^2} \text{ d. i. } r^2 = -r'r''.$$

Das Quadrat des Torsionsradius einer asymptotischen Linie in einem Punkte einer Fläche ist also gleich dem negativen Product der beiden Hauptkrümmungshalbmesser in diesem Punkte. Ist für eine Fläche das Krümmungsmaass negativ constant, so existiren auf derselben zwei Systeme von Curven von constantem Torsionsradius.

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{1}{r''}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1}{r'}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} \left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}\right)\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'} \\ \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r''} \end{matrix}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\sqrt{(EG)}}{r'\,r''} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r'}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r'}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r''}\right) + \frac{\sqrt{(EG)}}{r'\,r''} = 0. \end{cases}$$

Die zweite der vorstehenden Gleichungen folgt unmittelbar aus der ersten durch Zuziehung der Gleichungen (2). Für den vorliegenden Fall mögen a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 übergehn in a', b', c' und a'', b'', c''. Es ist dann:

$$(4)\quad \frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\,.\cos a', \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,.\cos a''.$$

Wegen der Gleichungen (1) und $C = 0$ treten an die Stelle der Gleichungen (5) von II. die folgenden:

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{\partial \cos a}{\partial u} = -\frac{\sqrt{E}}{r'}\cos a', & \frac{\partial \cos a}{\partial v} = -\frac{\sqrt{G}}{r''}\cos a'' \\ \frac{\partial \cos a'}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{r'}\cos a - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\cos a'', & \frac{\partial \cos a'}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\cos a'' \\ \frac{\partial \cos a''}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\cos a', & \frac{\partial \cos a''}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r''}\cos a - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\cos a'. \end{cases}$$

Es ist ferner:

$$(6)\quad \begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \cos a', & \cos b', & \cos c' \\ \cos a'', & \cos b'', & \cos c'' \end{vmatrix} = 1$$

Für die Krümmungslinie, längs welcher v allein variirt, sollen die Quantitäten $\alpha, \varrho, \lambda, l, r, \xi, R$ der Gleichungen (10) und (12)—(17) von II. mit dem Index v versehen werden. Man findet dann:

$$(7)\quad \begin{cases} \cos \alpha_v = \cos a'', \; \cos \lambda_v = \dfrac{\frac{\cos a}{r''} + h\cos a'}{\sqrt{\left(\frac{1}{r''^2} + h^2\right)}}, \; \cos l_v = \dfrac{h\cos a - \frac{\cos a'}{r''}}{\sqrt{\left(\frac{1}{r''^2} + h^2\right)}}, \\ \left(\frac{1}{r''}\frac{\partial h}{\partial v} - h\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r''}\right)(\xi_v - x) = \frac{\partial h}{\partial v}\cos a - \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r''}\,.\cos a', \\ h = -\frac{1}{\sqrt{(EG)}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \; \frac{1}{\varrho_v} = \sqrt{\left(\frac{1}{r''^2} + h^2\right)}, \; \frac{1}{r_v} = \frac{\partial \operatorname{arctang}(r''\,h)}{\partial v}, \\ \frac{1}{R_v^2} = \dfrac{\left(\frac{1}{r''}\frac{\partial h}{\partial v} - h\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r''}\right)^2}{\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r''}\right)^2}. \end{cases}$$

Ist ein System von Krümmungslinien plan, z. B. das System, für welches v variirt, so ist:

$$r'' h = -\frac{r''}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{r' r''}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{G}}{r''}$$

unabhängig von v, also auch $\cos l_v$, da $\cos a'' \cos l_v + \cos b'' \cos m_v + \cos c'' \cos n_v = 0$, so ist $x \cos l_v + y \cos m_v + z \cos n_v$ nur von u abhängig. Bedeutet also Ω eine Function von u allein, so hat man:

$$(h r'' \cos a - \cos a') x + (h r'' \cos b - \cos b') y + (h r'' \cos c - \cos c') z = \sqrt{(1 + h^2 r''^2)} \,.\, \Omega,$$

oder $h r'' = \cot \sigma$ gesetzt:

$$(8) \qquad (\cos a \cos \sigma - \cos a' \sin \sigma) x + (\cos b \cos \sigma - \cos b' \sin \sigma) y + (\cos c \cos \sigma - \cos c' \sin \sigma) z = \Omega.$$

In der vorstehenden Gleichung ist σ der Winkel unter welchem die Ebene der planen Krümmungslinie die Fläche schneidet.

Die Gleichungen (5) geben:

$$\frac{\sqrt{G}}{r''} \frac{\partial \cos a'}{\partial u} - \frac{1}{r'} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cos a' = \frac{\sqrt{E}}{r'} \frac{\partial \cos a''}{\partial v} - \frac{1}{r''} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cos a'',$$

$$\frac{\partial \cos a'}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cos a'',$$

d. i. nach (2) und (4):

$$(9) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r''}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r'}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial x}{\partial v}\right), \\ 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

Sind E, G, r', r'' als Functionen von u und v gegeben, so genügt jede der Coordinaten x, y, z zwei partiellen Differentialgleichungen von der Form der Gleichungen (9). Denkt man sich eine dieser Gleichungen integrirt, so wird die zweite Gleichung zwischen den beiden willkührlichen Functionen, welche die Integration involvirt, eine Relation geben. Ferner müssen die gefundenen Werthe von x, y, z den Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E, \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

genügen. Hieraus folgt, dass x, y, z keine willkürlichen Functionen enthalten, wenn E, G, r', r'' gegeben sind, also einem bestimmten System dieser Quantitäten nur eine Fläche entspricht. Mittelst der Gleichungen (2) lässt sich sehr einfach zeigen, dass nur E und G als gegeben anzunehmen nöthig sind, indem dann die Bestimmung von r' und r'' von einer quadratischen Gleichung abhängt. Setzt man:

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) = S \sqrt{(EG)},$$

so ist nach (3):

$$S = -\frac{1}{r'\,r''}, \quad S^2 = \frac{1}{(r'\,r'')^2} \tag{11}$$

Bedeutet T eine näher zu bestimmende Grösse, so kann man offenbar setzen:

$$\frac{1}{r'^2} = T\,.\,S, \quad \frac{1}{r''^2} = \frac{S}{T}. \tag{12}$$

Wegen der Gleichung (11) ist dann:

$$T = -\frac{r''}{r'}. \tag{13}$$

Multiplicirt man die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}\right)\frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v} = 2\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{1}{r'}$$

mit $\frac{1}{r'}$ und die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)\frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u} = 2\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{1}{r''}$$

mit $\frac{1}{r''}$, so folgt:

$$\left(\frac{1}{r'\,r''} - \frac{1}{r'^2}\right)\frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{1}{r'^2}, \quad \left(\frac{1}{r'\,r''} - \frac{1}{r''^2}\right)\frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{1}{r''^2},$$

oder nach (11) und (12):

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{\partial T}{\partial v} &= \left(\frac{1}{S}\,\frac{\partial S}{\partial v} + \frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right) T + \frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v}, \\ \frac{\partial T}{\partial u} &= \left(\frac{1}{S}\,\frac{\partial S}{\partial u} + \frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right) T + \frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u}\,T^2. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Bildet man hieraus den doppelten Werth von $\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}$, substituirt für $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$ ihre Werthe, so erhält man für T die quadratische Gleichung:

$$L\,T^2 - 2\,M\,T + N = 0, \tag{15}$$

wo L, M, N folgende Bedeutungen haben:

$$\left\{\begin{aligned} L &= \left(\frac{1}{S}\,\frac{\partial S}{\partial v} + \frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right)\frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right) = -\,S E\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{SEG}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right), \\ N &= \left(\frac{1}{S}\,\frac{\partial S}{\partial u} + \frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right) = -\,S G\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{SEG}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right), \\ M &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{S}\,\frac{\partial S}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right) - \frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u} = \\ &\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \log S^2EG}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Von den beiden Wurzeln der Gleichung (15) ist diejenige zu nehmen, welche die Gleichungen (14) identisch macht, da dieses für beide Wurzeln nicht allgemein der Fall ist, noch dieselben einander gleich sind. Die Gleichung (15) giebt:

$$2\,(LT - M)\frac{\partial T}{\partial v} + T^2\frac{\partial L}{\partial v} - 2\,T\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial v} = 0,$$

$$2\left(\frac{N}{T} - M\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T} + \frac{1}{T^2}\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{2}{T}\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial u} = 0.$$

Setzt man hierin aus (14) den Werth von $\frac{\partial T}{\partial v}$ und:

$$-\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T} = \left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial u} + \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{1}{T} + \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}$$

so erhält man:

$$(17)\quad\begin{cases}\left(\frac{2L}{SE}\frac{\partial SE}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial v}\right)T^2 - 2\left(\frac{M}{SE}\frac{\partial SE}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{L}{E}\frac{\partial E}{\partial v}\right)T - 2\frac{M}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial v} = 0, \\ \left(\frac{2N}{SG}\frac{\partial SG}{\partial u} - \frac{\partial N}{\partial u}\right)\frac{1}{T^2} - 2\left(\frac{M}{SG}\frac{\partial SG}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial u} - \frac{N}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{1}{T} - 2\frac{M}{G}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0.\end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen muss mit der Gleichung (15) eine Wurzel gemein haben, es ergeben sich durch Elimination von T zwei Differentialgleichungen für E und G, d. h. die allgemeinsten Gleichungen zur Bestimmung von E und G, wenn u und v die Argumente der Krümmungslinien sind. Da die betreffenden Gleichungen ziemlich weitläufig sind, so sollen sie hier nicht weiter angeführt werden.

Im Vorhergehenden ist stillschweigend vorausgesetzt, dass r' und r'' endliche Werthe haben, die Flächen, welche sich in der Ebene ausbreiten lassen, sollen in den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen bleiben.

IV.

Zur Erläuterung der in III. aufgestellten Gleichungen seien folgende Werthe von E und G gegeben:

$$(1)\quad\begin{cases}\frac{E}{k^2} = \frac{(\sin^2 p + \sin^2 q)\sin^2 p\,\sin^2 q}{D}, \quad \frac{G}{2k^2} = \frac{\sin^2 p + \sin^2 q - \sin^2 p\,\sin^2 q}{D}\cos^2 p\,\cos^2 q, \\ D = \sin^2 p\,\cos^2 q + \sin^2 q\,\cos^2 p,\end{cases}$$

wo k eine Constante bedeutet und p, q in Function von u und v durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$(2)\qquad \frac{\sin p}{\sin q} = e^{u}, \quad \cos p\,\cos q = e^{-v},$$

oder:

$$\log\sin p - \log\sin q = u, \qquad \log\cos p + \log\cos q = -v.$$

Die vorstehenden Gleichungen geben:

$$(3)\quad\begin{aligned}&\cot p\frac{\partial p}{\partial u} - \cot q\frac{\partial q}{\partial u} = 1, \quad \operatorname{tang} p\frac{\partial p}{\partial u} + \operatorname{tang} q\frac{\partial q}{\partial u} = 0, \\ &\cot p\frac{\partial p}{\partial v} - \cot q\frac{\partial q}{\partial v} = 0, \quad \operatorname{tang} p\frac{\partial p}{\partial v} + \operatorname{tang} q\frac{\partial q}{\partial v} = 1.\end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(4)\qquad \sin p\,\sin q = w,$$

so folgt mittelst der Gleichungen (3):

$$(5)\qquad \frac{\partial w}{\partial u} = -w\,\frac{\sin^2 p - \sin^2 q}{D}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = w\,\frac{\cos^2 p \cos^2 q}{D},$$

wo D dieselbe Bedeutung wie in (1) hat. Die Gleichungen (2) und (4) geben:

$$\cos p \cos q = e^{-v},\; 1 + w^2 - e^{-2v} = \sin^2 p + \sin^2 q,\; 2 - w^2 - e^{-2v} = D,$$
$$(\sin^2 p - \sin^2 q)(e^u + e^{-u}) = (\sin^2 p + \sin^2 q)(e^u - e^{-u}).$$

Hierdurch gehn die Gleichungen (1) und (5) über in:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &E = k^2 w^2\,\frac{1 + w^2 - e^{-2v}}{1 - w^2 - e^{-2v}}, \quad G = 2k^2\,\frac{(1 - e^{-2v})\,e^{-2v}}{1 - w^2 - e^{-2v}}, \\ &\frac{\partial w}{\partial u} = -w\,\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\,\frac{1 + w^2 - e^{-2v}}{1 - w^2 - e^{-2v}}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = w\,\frac{e^{-2v}}{1 - w^2 - e^{-2v}}. \end{aligned}\right.$$

Mit Hülfe der vorstehenden Gleichungen giebt die Gleichung (10) von III.:

$$(7)\qquad -k^2 S = \frac{1}{(e^u + e^{-u})^2}\,\frac{1}{1 - e^{-2v}}.$$

Setzt man aus (6) und (7) die Werthe von E, G und S in die Gleichung (15) von III., so folgt:

$$(8)\qquad T = -\frac{2}{w^2}\,\frac{(1 - e^{-2v})^2}{1 + w^2 - e^{-2v}},$$

oder:

$$T = \frac{1 - e^{-2v}}{w^2}\,\frac{1 - e^{-2v} - 3w^2}{1 + w^2 - e^{-2v}}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (6) und (7) findet man, dass der zweite Werth von T nur der ersten der Gleichungen (14) genügt, nicht aber der zweiten, während der in (8) gegebene Werth beiden Gleichungen genügt. Da:

$$S = -\frac{1}{r' r''}, \quad T = -\frac{r''}{r'}$$

so erhält man aus (7) und (8):

$$\frac{k}{r'} = \pm\frac{\sqrt{2}}{w}\,\frac{1}{e^u + e^{-u}}\sqrt{\left(\frac{1 - e^{-2v}}{1 + w^2 - e^{-2v}}\right)}, \quad \frac{k}{r''} = \pm\frac{w}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{e^u + e^{-u}}\,\frac{\sqrt{(1 + w^2 - e^{-2v})}}{(1 - e^{-2v})^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man hierin für e^u, e^{-v} und w ihre Werthe aus (2) und (4), so folgt:

$$(9)\qquad \frac{k}{r'} = \pm\sqrt{2}\,.\,\frac{(1 - \cos^2 p \cos^2 q)^{\frac{1}{2}}}{(\sin^2 p + \sin^2 q)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{k}{r''} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(\sin p \sin q)^2}{(\sin^2 p + \sin^2 q)^{\frac{1}{2}}(1 - \cos^2 p \cos^2 q)^{\frac{3}{2}}}.$$

Führt man in die Gleichungen (9) von III. p und q statt u und v mittelst der Gleichungen (2) oder (3) als unabhängige Variabeln ein, berücksichtigt die Werthe von E, G, r' und r'' aus (1) und (9), so folgt:

$$\left\{D\sin^2 q-(\sin^2 p+\sin^2 q)\cos^2 q\right\}\left\{\sin^2 p\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}-\sin p\cos p\frac{\partial x}{\partial p}+\operatorname{tang}p\operatorname{tang}q\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right\}$$
$$=-\left\{D\sin^2 p-(\sin^2 p+\sin^2 q)\cos^2 p\right\}\left\{\sin^2 q\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}-\sin q\cos q\frac{\partial x}{\partial q}+\operatorname{tang}p\operatorname{tang}q\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right\}$$

$$\sin q\left(\sin p\,\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}-\cos p\,\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{1}{\cos p}\operatorname{tang}q\,\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}\right)$$
$$=\sin p\left(\sin q\,\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}-\cos q\,\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{1}{\cos q}\operatorname{tang}p\,\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}\right),$$

oder:

$$\sin p\,\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}-\cos p\,\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{1}{\cos p}\operatorname{tang}q\,\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}=0,$$
$$\sin q\,\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}-\cos q\,\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{1}{\cos q}\operatorname{tang}p\,\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}=0.$$

Schreibt man diese Gleichungen auf folgende Weise:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\sin p}\frac{\partial x}{\partial p}\right)}{\partial\log\cot p}=\frac{\partial\left(\frac{1}{\sin p}\frac{\partial x}{\partial p}\right)}{\partial\log\sin q},\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{\sin q}\frac{\partial x}{\partial q}\right)}{\partial\log\sin p}=\frac{\partial\left(\frac{1}{\sin q}\frac{\partial x}{\partial q}\right)}{\partial\log\cot q},$$

so erhält man unmittelbar:

$$\frac{1}{\sin p}\frac{\partial x}{\partial p}=\Phi_1\,(\log\cot p+\log\sin q),\quad \frac{1}{\sin q}\frac{\partial x}{\partial q}=\Psi_1\,(\log\cot q+\log\sin p),$$

oder:

$$(10)\qquad \frac{1}{\sin p}\frac{\partial x}{\partial p}=\Phi\,(\sin q\,\cot p),\quad \frac{1}{\sin q}\frac{\partial x}{\partial q}=\Psi\,(\sin p\,\cot q),$$

wo Φ, Ψ beliebige Functionen ihrer Argumente sind. Eliminirt man x zwischen den vorstehenden Gleichungen, so folgt:

$$\Phi'\,(\sin q\,\cot p)=\Psi'\,(\sin p\,\cot q),$$

welche Gleichung nur bestehen kann, wenn jede ihrer Seiten gleich einer Constanten ist. Bezeichnet man dieselbe durch n_0, so ist:

$$\Phi'\,(\sin q\,\cot p)=n_0,\qquad \Psi'\,(\sin p\,\cot q)=n_0,$$

also:

$$\Phi\,(\sin q\cot p)=-l_0+n_0\sin q\cot p,\ \Psi\,(\sin p\cot q)=-m_0+n_0\sin p\cot q,$$

wo l_0, m_0 Constanten sind. Die Gleichungen (10) werden hierdurch:

$$\frac{\partial x}{\partial p}=-l_0\sin p+n_0\sin q\cos p,\quad \frac{\partial x}{\partial q}=-m_0\sin q+n_0\sin p\cos q.$$

Mit Weglassung einer unnöthigen Constanten folgt:

$$x=l_0\cos p+m_0\cos q+n_0\sin p\sin q.$$

Für x, y, z ergeben sich die Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} x=l_0\cos p+m_0\cos q+n_0\sin p\sin q,\\ y=l_1\cos p+m_1\cos q+n_1\sin p\sin q,\\ z=l_2\cos p+m_2\cos q+n_2\sin p\sin q.\end{cases}$$

Setzt man:

$$(12)\ \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=E_1,\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2=G_1,\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}=F_1,$$

so ist:

$$E = E_1 \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + G_1 \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + 2 F_1 \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial u},$$

$$G = E_1 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + G_1 \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 + 2 F_1 \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial v},$$

$$0 = E_1 \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + G_1 \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} + F_1 \left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right).$$

Mittelst der Gleichungen (1) und (3) findet man:

$$E_1 = k^2\,(2 \sin^2 p + \cos^2 p \sin^2 q),\quad G_1 = k^2\,(2 \sin^2 q + \sin^2 p \cos^2 q),$$
$$F_1 = k^2 \sin p \sin q \cos p \cos q.$$

Die Gleichungen (11) und (12) geben für E_1, G_1 und F_1 ein zweites System von Werthen, vergleicht man dieselben mit den vorhergehenden, so folgt:

$$\begin{aligned} l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 &= 2k^2, & m_0 n_0 + m_1 n_1 + m_2 n_2 &= 0,\\ m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 &= 2k^2, & l_0 n_0 + l_1 n_1 + l_2 n_2 &= 0,\\ n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 &= k^2, & l_0 m_0 + l_1 m_1 + l_2 m_2 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass sich die Constanten l_0, m_0, n_0 etc. nur auf eine Drehung des Coordinatensystems beziehn. Man kann also setzen:

$$l_0 = k\sqrt{2},\ l_1 = 0,\ l_2 = 0,\ m_0 = 0,\ m_1 = k\sqrt{2},\ m_2 = 0,\ n_0 = 0,\ n_1 = 0,\ n_2 = k.$$

Die Gleichungen (11) werden dann:

(13) $\quad x = k\sqrt{2}\,.\cos p,\ y = k\sqrt{2}\,.\cos q,\ z = k \sin p \sin q.$

Hieraus folgt:

(14) $\quad (2k^2 - x^2)\,(2k^2 - y^2) = 4\,k^2 z^2.$

Die Fläche, repräsentirt durch die vorstehende Gleichung, hat bekanntlich die Eigenschaft, dass die Summe oder Differenz der Distanzen eines ihrer Punkte von zwei festen Geraden, welche sich orthogonal schneiden, constant ist. In der Gleichung (14) ist die Ebene der beiden Geraden zur xy-Ebene und die Halbirungslinie des rechten Winkels zur Achse der x genommen. Die vorkommende Constante ist durch $2k$ bezeichnet. Da nach (13) x, y, z immer endliche Werthe haben, so bezieht sich die Gleichung (14) auf eine constante Summe der Distanzen. Ist die Differenz der Distanzen constant, so treten an die Stelle der Gleichungen (13) die folgenden:

$$x = k\sqrt{2}\cos pi,\ y = k\sqrt{2}\cos qi,\ z = -\,k \sin pi \sin qi,$$

wo $i = \sqrt{(-1)}$. *)

*) Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, dass die Fläche, repräsentirt durch die Gleichung (14), vier Umbilici, aber nicht eine sogenannte Linie sphärischer Krümmung hat, d. h. eine Curve längs welcher $r' = r''$ ist. (Mém. couronnés de l'Ac. Belgique t. XXXII). Die Bedingung $r' = r''$ giebt $2 \sin^2 p + \sin^2 q + \sin^2 q \cos^2 p = 0$, welche Gleichung nur bestehen kann, wenn p und q einen der Werthe 0 oder 180°

V.

Zu Folge der Gleichungen (11), (13), (15) und (16) von III. ist:

$$(1)\qquad S = -\frac{1}{r' r''},\quad T = -\frac{r''}{r'},$$

$$(2)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial T}{\partial v} = \left(\dfrac{1}{S}\dfrac{\partial S}{\partial v} + \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial v}\right) T + \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{1}{T} = \left(\dfrac{1}{S}\dfrac{\partial S}{\partial u} + \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial G}{\partial u}\right)\dfrac{1}{T} + \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial G}{\partial u} \end{cases}$$

$$(3)\qquad L T^2 - 2 M T + N = 0,$$

wo, mit Rücksicht auf den Werth von S und die Gleichungen (2) von III., L, M, N folgende Bedeutungen haben:

$$(4)\qquad \begin{cases} L = -SE\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{SEG}\dfrac{\partial G}{\partial u}\right) = -2\dfrac{\sqrt{(EG)}}{r' r''}\dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\dfrac{r' r''}{\sqrt{(EG)}}\dfrac{r'}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\sqrt{G}}{r''}\right\}\cdot\sqrt{\dfrac{E}{G}}, \\ N = -SG\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{SEG}\dfrac{\partial E}{\partial v}\right) = -2\dfrac{\sqrt{(EG)}}{r' r''}\dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\dfrac{r' r''}{\sqrt{(EG)}}\dfrac{r''}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\right\}\cdot\sqrt{\dfrac{G}{E}}, \\ M = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\dfrac{\sqrt{(EG)}}{r' r''}\right)^2 - 4\dfrac{r' r''}{\sqrt{(EG)}}\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\sqrt{G}}{r''}. \end{cases}$$

Genügen für gegebene Werthe von E und G beide Wurzeln der Gleichung (3) den beiden Gleichungen (2), so ergeben sich zwei Flächen, die auf einander abwickelbar sind. Die Aufsuchung dieser Flächen kommt darauf hinaus, die Flächen zu finden, welche sich so biegen lassen, dass ihre Krümmungslinien nach der Biegung Krümmungslinien bleiben. Da die Gleichung (3) quadratisch ist, so lässt sich eine derartige Biegung nur auf eine Weise ausführen. Ein besonderer Fall ist noch zu bemerken, wenn die Gleichung (3) identisch besteht, d. h. die Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ stattfinden. Sind U_1 und V_1 resp. Functionen von u und v allein, so geben die beiden Gleichungen $L = 0$ und $N = 0$:

---

haben. Diesen Werthen entsprechen vier Punkte in der xy-Ebene. Der Begriff einer Linie sphärischer Krümmung wird gewöhnlich nach Monge angeführt, ohne dass, soweit dem Verfasser bekannt, derselbe sich durch irgend ein Beispiel erläutert findet. Aus diesem Grunde mögen die beiden folgenden Sätze hier angeführt werden. Existirt auf einer Fläche eine Linie sphärischer Krümmung, so liegt dieselbe auf einer Kugelfläche, welche die erstere Fläche längs der bemerkten Curve berührt. Soll eine Rotationsfläche Linien sphärischer Krümmung enthalten, so muss die Evolute der Meridiancurve in der Ebene des Meridians die Rotationsaxe schneiden, der Anzahl der Schnittpunkte entspricht eine gleiche Anzahl Linien sphärischer Krümmung. Diesen Satz verificirt man leicht, wenn für x, y, z folgende Gleichungen genommen werden:

$$x = (V' \cos v + V \sin v)\cos u,\quad y = (V' \cos v + V \sin v)\sin u,$$
$$z = V' \sin v - V \cos v,$$

wo V eine beliebige Function von v und V' die Derivirte bedeutet.

(5) $$\frac{1}{SEG}\frac{\partial G}{\partial u} = 2\,U_1,\ \frac{1}{SEG}\frac{\partial E}{\partial v} = 2\,V_1.$$

Die Gleichung $M = 0$ d. i.:

$$\frac{\partial^2 \log S^2 EG}{\partial u\,\partial v} = \frac{2}{EG}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}$$

geht dann über in:

$$\frac{\partial^2 \log S^2 EG}{\partial u\,\partial v} = 8\,U_1\,V_1\,S^2\,EG.$$

Hieraus folgt:

(6) $$S^2\,E\,G = \frac{1}{8}\frac{U'\,V'}{(U+V)^2}\frac{1}{U_1\,V_1},$$

wo U nur von u, V nur von v abhängt. Verschwindet keine der Functionen U_1 oder V_1, so kann in (6) keine der Functionen U oder V constant sein. Die Gleichungen (5) lassen sich schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = U_1 S\sqrt{(EG)},\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = V_1\,S\,\sqrt{(EG)}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen geht die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) = -\frac{\sqrt{(EG)}}{r'\,r''} = S\,\sqrt{(EG)}$$

über in:

$$V_1\frac{\partial \log S\sqrt{EG}}{\partial v} + U_1\frac{\partial \log S\sqrt{(EG)}}{\partial u} + \frac{\partial V_1}{\partial v} + \frac{\partial U_1}{\partial u} = 1,$$

d. i. nach (6):

(7) $$\frac{1}{2\,U'}\frac{\partial(U_1 U')}{\partial u} + \frac{1}{2\,V'}\frac{\partial(V_1 V')}{\partial v} - \frac{U_1 U' + V_1 V'}{U+V} = 1.$$

Da U und V nicht constant sein sollen, so kann man in $U_1\,U'$ und $V_1\,V'$ resp. u und v durch U und V ausdrücken und demgemäss setzen:

$$U_1\,U' = \Phi(U),\quad V_1\,V' = \Psi(V).$$

Die Gleichung (7) wird dann:

(8) $$\Phi'(U) + \Psi'(V) - \frac{\Phi(U)+\Psi(V)}{U+V} = 1.$$

Diese Gleichung ist aber unmöglich, differentiirt man dieselbe zuerst nach U und dann nach V, so folgt:

$$\Phi'(U) + \Psi'(V) - \frac{\Phi(U)+\Psi(V)}{U+V} = 0,$$

welche Gleichung mit der Gleichung (8) im Widerspruch steht. Die Gleichung (8) kann nur möglich sein, wenn eine der beiden Functionen U oder V constant ist, dann muss aber nach (6) eine der Functionen U_1 oder V_1 verschwinden, d. h. es ist nach (5):

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \text{ oder } \frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

In dem einen wie in dem andern Falle ist ein System von Krümmungslinien plan, die Ebenen derselben schneiden die Fläche orthogonal, die Krümmungslinien sind gleichzeitig kürzeste Linien. Die Flächen, welche den Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ entsprechen, sind schon von Bour (Journ. de l'éc. polytechn. t. XXII. p. 89) untersucht worden, weshalb eine weitere Ausführung derselben hier unterbleiben soll. Nur sei bemerkt, dass eine solche Fläche die Enveloppe einer Rotationsfläche ist, welche sich so bewegt, dass ein fester Punkt der Rotationsaxe eine plane Curve beschreibt, deren Ebene zur Rotationsaxe senkrecht ist. Im Folgenden sollen diese Flächen ausgeschlossen bleiben, also angenommen werden, dass keine der Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial v} = 0$$

stattfindet.

Um die Bedingung aufzustellen, welche ausdrückt, dass beide Wurzeln der Gleichung (3) den Gleichungen (2) genügt, scheint es am einfachsten zu sein, auf folgende Weise zu verfahren. Dem Punkte (x, y, z) einer Fläche F entspreche der Punkt (x_1, y_1, z_1) einer Fläche F_1 so, dass E und G in beiden Punkten dieselben Werthe haben. Für beide Flächen sind u und v die Argumente der Krümmungslinien, ferner sollen r_1' und r_1'' für den Punkt (x_1, y_1, z_1) dieselbe Bedeutung haben, wie r' und r'' für den Punkt (x, y, z). Man hat dann die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{1}{r''}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1}{r'}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{1}{r_1''}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r_1''} = \frac{1}{r_1'}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Diese Gleichungen geben:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{r_1''}{r''}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{r_1''}{r''}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r'}{r_1'}\frac{\sqrt{E}}{r'}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{r_1'}{r'}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r_1''} = \frac{r_1'}{r'}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r''}{r_1''}\frac{\sqrt{G}}{r''}\right),$$

oder:

$$(9) \quad \left\{\begin{array}{l} \left(1 - \frac{r_1'' r'}{r'' r_1'}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\log\frac{\sqrt{E}}{r'}\right) = \frac{r_1''}{r''}\frac{\partial}{\partial v}\frac{r'}{r_1'}, \\ \left(1 - \frac{r_1' r''}{r' r_1''}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\log\frac{\sqrt{G}}{r''}\right) = \frac{r_1'}{r'}\frac{\partial}{\partial u}\frac{r''}{r_1''}. \end{array}\right.$$

Da S für beide Flächen in entsprechenden Punkten gleiche Werthe hat, so ist $r_1' r_1'' = r' r''$. Diese Gleichung lässt sich ersetzen durch:

$$(10) \quad \frac{r_1'}{r'} = \frac{1-w}{1+w}, \quad \frac{r_1''}{r''} = \frac{1+w}{1-w},$$

wo w eine näher zu bestimmende Function von u und v ist. Mittelst der Gleichungen (9) gehen die Gleichungen (9) über in:

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{E}}{r'} = -\frac{1}{2w} \frac{1+w}{1-w} \frac{\partial w}{\partial v} = -\left(\frac{1}{1-w} + \frac{1}{2w}\right) \frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\sqrt{G}}{r''} = -\frac{1}{2w} \frac{1-w}{1+w} \frac{\partial w}{\partial u} = \left(\frac{1}{1+w} - \frac{1}{2w}\right) \frac{\partial w}{\partial u}.$$

Diese Gleichungen integrirt geben:

$$\text{(11)} \qquad \frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}} u_1', \quad \frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}} v_1',$$

wo u_1 nur von u, v_1 nur von v abhängt und

$$u_1' = \frac{\partial u_1}{\partial u}, \quad v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial v}$$

ist. Aus den Gleichungen (11) folgt:

$$\text{(12)} \qquad \left(\frac{1}{v_1'} \frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 - \left(\frac{1}{u_1'} \frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 = 1.$$

Mittelst der Gleichungen (11) geht die zweite Gleichung (3) von III. über in:

$$\frac{1}{v_1'} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v_1'} \frac{\partial \log w}{\partial v}\right) + \frac{1}{u_1'} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u_1'} \frac{\partial \log w}{\partial u}\right) = \frac{1-w^2}{2w}.$$

Nimmt man u_1 und v_1 als unabhängige Veränderliche, so ist:

$$\text{(13)} \qquad \frac{\partial^2 \log w}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \log w}{\partial v_1^2} = \frac{1-w^2}{2w}.$$

Man kann immer $u_1 = u$, $v_1 = v$ also $u_1' = v_1' = 1$ setzen, wie aus folgenden Betrachtungen erhellt. Führt man u_1, v_1 als unabhängige Variabeln ein, so gehen $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ über in $u_1' \sqrt{E}$, $v_1' \sqrt{G}$. Die Gleichung:

$$\frac{E\sqrt{(EG)}}{r'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

bleibt dann unverändert, wenn direct $u = u_1$, $v = v_1$ gesetzt wird. Hieraus folgt, dass die beiden Gleichungen (9) von III. ungeändert bleiben, wenn direct $u = u_1$ und $v = v_1$ gesetzt wird. Nimmt man in den Gleichungen (11), (12) und (13) $u_1 = u$ und $v_1 = v$, so erhält man in Verbindung mit (10):

$$\text{(14)} \qquad \frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}}, \quad \frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}}, \quad \frac{\sqrt{G}}{r_1''} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}}, \quad \frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}}.$$

$$\text{(15)} \qquad \left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{\sqrt{E}}{r_1'}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{G}}{r_1''}\right)^2 = 1.$$

$$\text{(16)} \qquad \frac{\partial^2 \log w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log w}{\partial v^2} = \frac{1-w^2}{2w}.$$

Die Gleichungen (9) von III. gehen nach (14) über in:

$$
(17)\quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ (1+w)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial x}{\partial u}\right) + \dfrac{1-w}{2w}\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial x}{\partial u} = \\ (1-w)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) + \dfrac{1+w}{2w}\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}
$$

Um die entsprechenden Gleichungen für x_1 zu erhalten, hat man nur nöthig, in den Gleichungen (17) $x = x_1$ und $-w$ statt w zu setzen. Ist w bekannt, so ergeben sich E und G mittelst der Gleichungen:

$$
(18)\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{r'} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \log w}{\partial v},\quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \log w}{\partial u}.
$$

Es lässt sich leicht verificiren, dass die Gleichung:

$$
\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 = 1
$$

die nöthige und hinreichende Bedingung ist, dass beide Wurzeln der Gleichung (3) den Differentialgleichungen (2) genügen. Ersetzt man diese Gleichung durch:

$$
(19)\quad \frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}},\quad \frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}},
$$

so geben die Gleichungen (4)

$$
L = \frac{1-w^2}{w} J\sqrt{\frac{E}{G}},\quad N = \frac{1-w^2}{w} J\sqrt{\frac{G}{E}},\quad M = -\frac{1+w^2}{w} J,
$$

wo:

$$
J = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{1+w}{1-w}.
$$

Die Gleichung (2) hat in diesem Falle die beiden Wurzeln:

$$
T = -\frac{1-w}{1+w}\sqrt{\frac{G}{E}},\quad T = -\frac{1+w}{1-w}\sqrt{\frac{G}{E}}
$$

d. i. nach (19):

$$
T = -\frac{r''}{r'},\quad T = -\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2\frac{r''}{r'}.
$$

Die erste dieser Wurzeln genügt den Gleichungen (2), substituirt man die zweite Wurzel, so findet man mittelst der Gleichungen (19), dass dieselbe ebenfalls die Gleichungen (2) identisch macht.

Da:

$$
\left(\frac{\partial\cos a}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos b}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos c}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2,\quad \left(\frac{\partial\cos a}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos b}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos c}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2,
$$

so bleiben

$$
\frac{\sqrt{E}}{r'},\quad \frac{\sqrt{G}}{r''}
$$

für eine Parallelfläche zu einer gegebenen Fläche unverändert. Bekanntlich entsprechen den Krümmungslinien einer Fläche wieder Krümmungslinien einer ihrer Parallelflächen. Lässt sich also eine Fläche so biegen, dass die Krümmungslinien Curven derselben Art werden, so ist dieses auch mit einer Parallelfläche derselben der Fall.

Findet zwischen r' und r'' eine Relation statt, so kann man r' und r'' als Functionen einer Variabeln t ansehen, die Gleichungen (2) in III. zeigen dann, dass E und G ebenfalls Functionen von t sind. Sollen die Gleichungen (14) stattfinden, so ist auch w Function von t. Die Gleichungen (18) geben dann:

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial t} = -\frac{1}{2w}\frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t} = -\frac{1}{2w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

oder einfacher:

$$2w\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial w} + \sqrt{G} = 0, \quad 2w\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial w} + \sqrt{E} = 0.$$

Sind k und k_0 Constanten, so geben die vorstehenden Gleichungen integrirt:

$$\sqrt{E} = k\,\frac{2k_0+1+w}{2\sqrt{w}}, \quad \sqrt{G} = k\,\frac{2k_0+1-w}{2\sqrt{w}}.$$

Setzt man diese Werthe von $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ in die beiden ersten Gleichungen (14), so folgt:

$$k(2k_0+1-w) = r''(1+w), \quad k(2k_0+1+w) = r'(1-w).$$

Die Elimination von w giebt:

$$(r' - kk_0)(r'' - kk_0) = k^2(1+k_0)^2.$$

Durch diese Gleichung ist eine Parallelfläche zu der Fläche charakterisirt, für welche $r'r'' = k^2$ ist. Nimmt man in der Gleichung (3) S constant, so ist eine Wurzel derselben gleich -1, also $r' = r''$, welchem Falle die Kugelfläche entspricht, die Gleichungen (2) verschwinden dann identisch, die zweite Wurzel giebt Flächen von constantem Krümmungsmaass. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich:

> Lässt sich eine Fläche so biegen, dass die Krümmungslinien nach der Biegung Krümmungslinien bleiben, so kann dieses auf unendlich viele Arten geschehen, wenn ein System von Krümmungslinien gleichzeitig kürzeste Linien bildet, in allen andern Fällen nur auf eine Weise. Hat eine Fläche die bemerkte Eigenschaft, so ist dieses auch mit einer ihrer Parallelflächen der Fall. Findet zwischen den Hauptkrümmungshalbmessern eine Relation statt, so ist, abgesehen von den Rotationsflächen, entweder ihr Product oder die Summe ihrer reciproken Werthe gleich einer positiven Constanten.

VI.

Die in V. gefundenen Gleichungen:

(1) $$\frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}},\quad \frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}},\quad \frac{\sqrt{G}}{r_1''} = \frac{1-w}{2\sqrt{w}},\quad \frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{1+w}{2\sqrt{w}},$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{1}{2w}\frac{\partial w}{\partial u},\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{1}{2w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

(3) $$\frac{\partial^2 \log w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log w}{\partial v^2} = \frac{1-w^2}{2w},$$

scheinen sich allgemein nicht weiter behandeln zu lassen, da die vollständige Integration der Gleichungen (2) und (3) auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst. Um daher zu einigen Resultaten zu gelangen, wird es am einfachsten sein, den umgekehrten Weg einzuschlagen, also einzelne Flächen oder eine Gattung von Flächen zu betrachten und die in ihren Gleichungen vorkommenden Constanten oder Functionen so zu bestimmen, dass die Gleichungen (1) erfüllt werden.

Die Gleichungen (2) lassen sich in einem Falle leicht integriren, wenn nämlich E und G Functionen von w sind, dann zeigen aber die Gleichungen (1), dass zwischen r' und r'' eine Relation stattfindet; man erhält wieder das in V. gefundene Resultat.

Die Flächen, für welche die Gleichung (3) von V. identisch verschwindet, gehören zu einer allgemeinen Gattung von Flächen, für welche ein System von Krümmungslinien plan ist; es ergiebt sich hier die Aufgabe, die Flächen mit einem System planer Krümmungslinien zu finden, deren Gleichungen den Gleichungen (1) genügen.

Sei das System der Krümmungslinien, für welches v allein variirt, plan, dann ist der Ausdruck:

$$\frac{r''}{\sqrt{(EG)}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{r'r''}{\sqrt{(EG)}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{r''}$$

unabhängig von v, nach (1) und (2) ist also:

$$\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{1}{1+w}\frac{\partial w}{\partial u} = 2\frac{\partial \operatorname{arc\,tang}\sqrt{w}}{\partial u}$$

nur von u abhängig. Bezeichnet p eine Function von u, so kann man setzen:

$$2\frac{\partial \operatorname{arc\,tang}\sqrt{w}}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial u}.$$

Hieraus folgt:

(4) $$\sqrt{w} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p+q),$$

wo q eine näher zu bestimmende Function von v ist. Zur Vereinfachung werde gesetzt:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = p',\quad \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} = p'', \text{ etc.}$$

Setzt man den Werth von w aus (4) in die Gleichung (3), so folgt:

$$(5)\qquad (p'' + q'') \sin (p+q) = (1 + p'^2 + q'^2) \cos (p+q).$$

Von den beiden Functionen p und q soll keine constant sein also der Fall, dass eine der Quantitäten

$$\frac{\partial E}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial G}{\partial u}$$

verschwindet, soll hier nicht in Betracht kommen.

Die Gleichung (5) nach u differentiirt, giebt:

$$p''' \sin (p+q) = p' (p'' - q'') \cos (p+q) - p' (1 + p'^2 + q'^2) \sin (p+q),$$

oder rechts nach (5):

$$1 + p'^2 + q'^2 = (p'' + q'') \operatorname{tang} (p+q)$$

gesetzt:

$$\tfrac{1}{2} \sin 2 (p+q) \cdot \frac{p'''}{p'} = p'' \cos 2 (p+q) - q''.$$

Diese Gleichung nach u differentiirt giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{p'''}{p'} + 4\, p'\, p'' = 0.$$

Multiplicirt man die vorstehende Gleichung mit $\frac{p'''}{p'}$, so folgt durch Integration:

$$\left(\frac{p'''}{p'}\right)^2 + 4 p''^2 = 4 f^2,$$

wo f eine Constante bedeutet. Setzt man:

$$\frac{p'''}{\sqrt{(f^2 - p''^2)}} = -2p',$$

multiplicirt diese Gleichung mit p'', so folgt durch Integration:

$$\sqrt{f^2 - p''^2} = g + p'^2\,.$$

oder:

$$(6)\qquad (f - g - p'^2)(f + g + p'^2) = p''^2.$$

Eine einfache Betrachtung zeigt, dass für reelle Werthe von p, man f und g positiv, ferner $f > g$ annehmen kann. Alle andern Annahmen, durch welche p eine logarithmische oder trigonometrische Function von u wird, geben für q imaginäre Werthe. Nimmt man in der Gleichung (6):

$$2f = n^2,\ \frac{f-g}{2f} = k^2,\ \ p' = \sqrt{(f-g)} \cos \varphi = kn \,.\cos \varphi,$$

so folgt: $n^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi) = \varphi'^2$, also $\varphi = \operatorname{am} (nu + u_0)$, wo u_0 eine Constante ist. Man kann unbeschadet der Allgemeinheit $u_0 = 0$ setzen, also $\varphi = \operatorname{am} nu$, und:

$$p' = kn \cos \operatorname{am} nu = \frac{\partial \arcsin (k \sin \operatorname{am} nu)}{\partial n}\,.$$

Bezeichnet p_0 eine Constante, so ist

$$\sin(p + p_0) = k \sin \operatorname{am} nu.$$

Man kann offenbar $p_0 = 0$ setzen; die Gleichung (5) giebt nämlich den Werth von $q - p_0$, da nun nach (4) $\sqrt{w}$ nur von $p + q$ abhängt, so fällt die Constante p_0 in $\sqrt{w}$ heraus. Setzt man also

$$\sin p = k \sin \operatorname{am} nu, \quad \cos p = \Delta \operatorname{am} nu,$$

so geht die Gleichung (5) über in:

$$\{(1 + q'^2 - n^2 + k^2 n^2) \sin q + q'' \cos q\} \; k \sin \operatorname{am} nu =$$
$$\{(1 + q'^2 + k^2 n^2) \cos q - q'' \sin q\} \; \Delta \operatorname{am} nu.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden folgenden:

$$(1+q'^2-n^2+k^2n^2)\sin q + q''\cos q = 0, \quad (1+q'^2+k^2n^2)\cos q - q''\sin q = 0,$$

oder:

$$q'^2 = n^2 \sin^2 q - 1 - n^2 k^2, \quad q'' = n^2 \sin q \,.\, \cos q.$$

Die Gleichung für q'' ist nichts weiter wie der Differentialquotient der Gleichung für q'^2 nach v. Es ist: $q'^2 = n^2(1-k^2) - 1 - n^2 \cos^2 q$. Nimmt man also: $n^2(1 - k^2) - 1 = n^2 l^2$, so folgt: $q'^2 = n^2(l^2 - \cos^2 q)$. Mit Weglassung einer unnöthigen Constanten erhält man hieraus:

$$\cos q = l \sin \operatorname{am}(nv, l).$$

Die Moduli k und l sind durch die Gleichung verbunden:

$$(7) \qquad 1 = n^2(1 - k^2 - l^2).$$

Der Einfachheit halber sollen die Moduli k und l unter der Bezeichnung der Amplitudo weggelassen werden, wobei dann stillschweigend vorausgesetzt wird, dass die elliptischen Functionen mit dem Argumente nu den Modul k haben und l der Modul der Functionen vom Argumente nv ist. Die Complemente von k^2 und l^2 sind durch k'^2 und l'^2 bezeichnet, so dass also $k^2 + k'^2 = 1$ und $l^2 + l'^2 = 1$. Aus dem Vorstehenden folgt:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \sin p &= k \sin \operatorname{am} nu, & \cos p &= \Delta \operatorname{am} nu, \\ \sin q &= \Delta \operatorname{am} nv, & \cos q &= l \sin \operatorname{am} nv. \end{aligned}$$

Ist σ der Winkel, unter welchem die Ebene der planen Krümmungslinie die Fläche im Punkte (x, y, z) schneidet, so hat man nach den Entwicklungen von III.:

$$-\frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \cot \sigma.$$

Mittelst der Gleichungen (1) und (8) findet man:

$$(9) \qquad \cot \sigma = \frac{\partial p}{\partial u} = kn \cos \operatorname{am} nu.$$

Setzt man den Werth von $\sqrt{w}$ aus (4) in die Gleichungen (1), so folgt:

$$(10)\quad \frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1}{\sin(p+q)},\ \frac{\sqrt{E}}{r'} = \cot(p+q),\ \frac{\sqrt{G}}{r_1''} = \cot(p+q),\ \frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{1}{\sin(p+q)}.$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Ebene der planen Krümmungslinie mit den Coordinatenaxen bildet, so ist nach den Gleichungen (7) von III. $\alpha = l_v$, $\beta = m_v$, $\gamma = n_v$, folglich:

$$(11)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \cos a \cos\sigma - \cos a' \sin\sigma, \\ \dfrac{\partial \cos\alpha}{\partial u} = -\left(\cos a \sin\sigma + \cos a' \cos\sigma\right)\left(\dfrac{\sqrt{E}}{r'} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right) + \cos a'' \sin\sigma \dfrac{r''}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial}{\partial v} \dfrac{\sqrt{E}}{r'}. \end{cases}$$

Setzt man:

$$\left(\frac{\partial \cos\alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \cos\beta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \cos\gamma}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}\right)^2,$$

so ist nach (11):

$$(12)\quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2 + \left(\sin\sigma \frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2$$

Mittelst der Gleichungen (8), (9) und (10) folgt:

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}\right)^2 = \frac{(1+k^2n^2)(n^2-1+k^2n^2)}{(1+k^2n^2-n^2\sin^2 p)^2} = \frac{(1+k^2n^2)(n^2-1+k^2n^2)}{(1+k^2n^2\cos^2 \operatorname{am} nu)^2}.$$

Setzt man hierin nach (7) $1 + k^2n^2 = n^2 l'^2$, $n^2 - 1 + k^2 n^2 = n^2 l^2$, so ist einfacher:

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{ll'}{l'^2 - \sin^2 p}\right)^2 = \left(\frac{n^2 ll'}{1 + k^2 n^2 \cos^2 \operatorname{am} nu}\right)^2.$$

Wird die Quadratwurzel positiv genommen, so folgt:

$$(13)\quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial u} = \frac{ll'}{l'^2 - \sin^2 p} = \frac{n^2 ll'}{1 + k^2 n^2 \cos^2 \operatorname{am} nu}.$$

Die Gleichung (12) lässt sich durch die beiden folgenden ersetzen:

$$(14)\quad \frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{\partial\sigma}{\partial u} = \sin\varphi \frac{\partial\varepsilon}{\partial u},\quad \sin\sigma \frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{r'} = \cos\varphi \frac{\partial\varepsilon}{\partial u}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (8), (9) und (10) geben die vorstehenden Gleichungen durch Division:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{l'^2 \sin \operatorname{am} nv\, \Delta \operatorname{am} nu + kl\, \Delta \operatorname{am} nv \sin \operatorname{am} nu}{\cos \operatorname{am} nv \sqrt{(l'^2 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} nu)}}.$$

Hieraus folgt:

$$(15)\quad \begin{cases} l' \cos\varphi = \dfrac{\cos \operatorname{am} nv \sqrt{(l'^2 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} nu)}}{\Delta \operatorname{am} nv\, \Delta \operatorname{am} nu + kl \sin \operatorname{am} nv \sin \operatorname{am} nu}, \\ l' \sin\varphi = \dfrac{l'^2 \sin \operatorname{am} nv\, \Delta \operatorname{am} nu + kl\, \Delta \operatorname{am} nv \sin \operatorname{am} nu}{\Delta \operatorname{am} nv\, \Delta \operatorname{am} nu + kl \sin \operatorname{am} nv \sin \operatorname{am} nu}, \\ \dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \dfrac{l'\, \Delta \operatorname{am} nu + kl \sin \operatorname{am} nu}{l'\, \Delta \operatorname{am} nu - kl \sin \operatorname{am} nu} \cdot \dfrac{\Delta \operatorname{am} nv + l' \sin \operatorname{am} nv}{\Delta \operatorname{am} nv - l' \sin \operatorname{am} nv}. \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung (15) erhält man unmittelbar:

$$(16)\quad \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{kll' n^3 \cos \operatorname{am} nu}{1 + k^2 n^2 \cos^2 \operatorname{am} nu},\quad \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{l' n}{\cos \operatorname{am} nv}.$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen in Verbindung mit (13) giebt:

$$\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} = kn \cos \operatorname{am} nu\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}\,.$$

Da nun $kn \cos \operatorname{am} nu = \cot\sigma$, so ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = \cos\varphi \cot\sigma. \tag{17}$$

Die zweite Gleichung (11) lässt sich nach (14) einfacher schreiben:

$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\varepsilon} = -(\cos a \sin\sigma + \cos a' \cos\sigma)\sin\varphi + \cos a'' \cos\varphi. \tag{18}$$

Diese Gleichung nach u differentiirt, giebt, mit Rücksicht auf (14) und (17):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\varepsilon}\right) = -(\cos a\cos\sigma - \cos a' \sin\sigma)\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}\,,$$

d. i. nach (11):

$$\frac{\partial^2\cos\alpha}{\partial\varepsilon^2} + \cos\alpha = 0.$$

Analoge Gleichungen finden für $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ statt. Diese Gleichungen integrirt geben:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos A\cos\varepsilon + \cos A_1 \sin\varepsilon,\\ \cos\beta &= \cos B\cos\varepsilon + \cos B_1 \sin\varepsilon,\\ \cos\gamma &= \cos C\cos\varepsilon + \cos C_1 \sin\varepsilon,\end{aligned}$$

wo zwischen den constanten Winkeln A, B, C, A_1, B_1, C_1 die Gleichungen bestehen:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,\ \cos^2 A_1 + \cos^2 B_1 + \cos^2 C_1 = 1,$$
$$\cos A\cos A_1 + \cos B\cos B_1 + \cos C\cos C_1 = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die festen Richtungen, bestimmt durch die Winkel A, B, C und A_1, B_1, C_1 zu einander orthogonal sind. Nimmt man die Richtungen zu Coordinatenaxen, so kann man setzen: $\cos A = 0$, $\cos A_1 = 1$, $\cos B = -1$, $\cos B_1 = 0$, $\cos C = 0$, $\cos C_1 = 0$, folglich:

$$\left\{\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos a\cos\sigma - \cos a' \sin\sigma = \sin\varepsilon,\\ \cos\beta &= \cos b\cos\sigma - \cos b' \sin\sigma = -\cos\varepsilon,\\ \cos\gamma &= \cos c\cos\sigma - \cos c' \sin\sigma = 0.\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Die Gleichungen (18) und (19) geben:

$$\begin{aligned}&\cos a' \cos\alpha + \cos b' \cos\beta + \cos c' \cos\gamma = -\sin\sigma,\\ &\cos a'' \cos\alpha + \cos b'' \cos\beta + \cos c'' \cos\gamma = 0,\\ &\cos a' \,\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\varepsilon} + \cos b' \,\frac{\partial\cos\beta}{\partial\varepsilon} + \cos c' \,\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\varepsilon} = -\cos\sigma\sin\varphi,\end{aligned}$$

d. i.

$$\left\{\begin{aligned}&\cos a' \sin\varepsilon - \cos b' \cos\varepsilon = -\sin\sigma,\ \cos a' \cos\varepsilon + \cos b' \sin\varepsilon = -\cos\sigma\sin\varphi,\\ &\cos a'' \sin\varepsilon - \cos b'' \cos\varepsilon = 0.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Aus den Gleichungen (19) findet man:

$$\cos\alpha\cos b' - \cos\beta\cos a' = (\cos a\cos b' - \cos b\cos a')\cos\sigma$$
$$= \sin\varepsilon\cos b' + \cos\varepsilon\cos a'.$$

Nun ist $\cos a\cos b' - \cos b\cos a' = \cos c''$

und nach (24) $\sin\varepsilon\cos b' + \cos\varepsilon\cos a' = -\cos\sigma\sin\varphi$, also: $\cos c'' = -\sin\varphi$. Diese Gleichung in Verbindung mit

$$\cos\gamma = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\cos\gamma}{\partial\varepsilon} = 0$$

giebt

$$\cos c' = -\cos\sigma\cos\varphi.$$

Die Gleichungen (19) geben:

$$\cos b''\sin\varepsilon + \cos a''\cos\varepsilon =$$
$$(\cos a\cos b'' - \cos b\cos a'')\cos\sigma - (\cos a'\cos b'' - \cos b'\cos a'')\sin\sigma$$
$$= -(\cos c'\cos\sigma + \cos c\sin\sigma) = \cos\varphi.$$

Es ist also:

(21)
$$\cos a''\cos\varepsilon + \cos b''\sin\varepsilon = \cos\varphi,$$
$$\cos c' = -\cos\sigma\cos\varphi,\ \cos c'' = -\sin\varphi.$$

Nach III. ist die Gleichung der Ebene der planen Krümmungslinie im Punkte (x, y, z):

$$(\cos a\cos\sigma - \cos a'\sin\sigma)\,x + (\cos b\cos\sigma - \cos b'\sin\sigma)\,y$$
$$+ (\cos c\cos\sigma - \cos c'\sin\sigma)\,z = \Omega,$$

wo Ω nur von u abhängt. Nach (19) reducirt sich diese Gleichung auf:

(22)
$$x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = \Omega.$$

Die Ebenen der planen Krümmungslinien sind also einer festen Geraden parallel, welche zur Axe der z genommen ist. Die Gleichung (22) nach u differentiirt giebt:

$$(x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} + (\sin\varepsilon\cos a' - \cos\varepsilon\cos b')\sqrt{E} = \frac{\partial\Omega}{\partial u}.$$

Wegen der ersten Gleichung (20) folgt:

(23)
$$x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = \frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + \frac{\sin\sigma.\sqrt{E}}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}}.$$

Differentiirt man diese Gleichung wieder nach u, so findet man wegen der zweiten Gleichung (20):

$$-x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon = \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\sin\sigma\sqrt{E}}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}}\right) + \frac{\sqrt{E}\cos\sigma}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}}\sin\varphi.$$

Setzt man rechts nach (17):

$$\cos\sigma = \frac{\sin\sigma}{\cos\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon},$$

so folgt:

$$-x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\sin \sigma . \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} \right).$$

Diese Gleichung zur Gleichung (22) addirt giebt:

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\sin \sigma \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} \right) = - \left(\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} \right),$$

folglich:

$$\text{(24)} \qquad \frac{\sin \sigma . \sqrt{E}}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} = \cos \varphi \left\{ V - \int \frac{\partial \varepsilon}{\cos \varphi} \left(\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} \right) \right\},$$

wo V eine Function von v bedeutet. Differentiirt man die Gleichung (23) nach v, so geht die linke Seite nach (21) über in

$$(\cos a'' \cos \varepsilon + \cos b'' \sin \varepsilon) \sqrt{G} = \cos \varphi \sqrt{G}.$$

Mittelst der Gleichungen (16) und (24) folgt:

$$\text{(25)} \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{G} = V' + \frac{l'n}{\cos \operatorname{am} nv} \Big\{ & - V \sin \varphi + \sin \varphi \int \frac{\partial \varepsilon}{\cos \varphi} \left(\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} \right) \\ & - \int \partial \varepsilon \cdot \operatorname{tang} \varphi \left(\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} \right) \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Der Werth von z ergiebt sich einfach auf folgende Weise. Es ist:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{E} . \cos c',$$

oder wegen (21)

$$- \frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{E} \cos \sigma \cos \varphi = \sqrt{E} \sin \sigma . \cot \sigma \cos \varphi.$$

Diese Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$- \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{\sin \sigma \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} \cot \sigma \cos^2 \varphi .$$

Nun ist nach (19)

$$\cot \sigma \cos^2 \varphi = \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \sin \varphi}{\partial \varepsilon},$$

folglich:

$$- \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{\sin \sigma \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} \frac{\partial \sin \varphi}{\partial \varepsilon} .$$

Bedeutet $F(v)$ eine näher zu bestimmende Function von v, so giebt die vorstehende Gleichung:

$$z = F(v) - \sin \varphi \frac{\sin \sigma \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} + \int \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\sin \sigma \sqrt{E}}{\cos \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}} \right) \partial \varepsilon,$$

d. i. nach (24):

$$(26)\quad \begin{aligned} z = F(v) - \sin\varphi \left\{ V - \int \frac{\partial\varepsilon}{\cos\varphi}\left(\Omega + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2}\right)\right\} \\ - \int \operatorname{tang}\varphi \left(\Omega + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2}\right)\partial\varepsilon. \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{G}\,\cos c''.$$

Setzt man links für z seinen Werth aus (26), rechts für $\cos c''$ und $\sqrt{G}$ ihre Werthe aus (21) und (25), so ergiebt sich:

$$(27)\quad \frac{\partial F(v)}{\partial v} = V\,\frac{l'n}{\cos\operatorname{am} nv},\ F(v) = \int V\,\frac{l'n}{\cos\operatorname{am} nv}\,\partial v.$$

Nach (7), (9) und (13) ist:

$$\frac{1}{\sin\sigma}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} = \frac{n^2ll'}{\sqrt{(1+k^2n^2\cos^2\operatorname{am} nu)}} = \frac{nll'}{\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}}.$$

Mittelst dieser Gleichung, der Gleichungen (25) und (27) geben die Gleichungen (22), (23) und (26):

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} & x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = \Omega, \\ & x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = \frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + \frac{\sqrt{E}}{n}\cdot\frac{\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu}}{ll'}, \\ & z = \int\frac{Vl'n}{\cos\operatorname{am} nv}\,\partial v + (\sqrt{G} - V')\,\frac{\cos\operatorname{am} nv}{nl'}. \end{aligned}\right.$$

Setzt man ferner:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial\varepsilon}{\partial u} = \frac{n^2ll'}{1+k^2n^2\cos^2\operatorname{am} nu} = \frac{ll'}{l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu} \\ & \int\frac{\Delta\operatorname{am} nu}{\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2}+\Omega\right)\partial\varepsilon = P, \\ & \int\frac{\sin\operatorname{am} nu}{\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2}+\Omega\right)\partial\varepsilon = P_1, \end{aligned}\right.$$

so ergeben sich, durch Substitution der Werthe von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ aus (15) in (24) und (25), für $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ folgende Gleichungen:

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} & (\Delta\operatorname{am} nu\,\Delta\operatorname{am} nv + kl\sin\operatorname{am} nu\sin\operatorname{am} nv)\,\frac{\sqrt{E}}{n} = \\ & \qquad lV\cos\operatorname{am} nv - ll'\,(P\Delta\operatorname{am} nv + P_1\,kl\sin\operatorname{am} nv)', \\ & (\Delta\operatorname{am} nu\,\Delta\operatorname{am} nv + kl\sin\operatorname{am} nu\sin\operatorname{am} nv)\,\frac{\sqrt{G}}{n} = \\ & \qquad \left(\frac{V'}{n}\,\Delta\operatorname{am} nv - Vl'^2\,\frac{\sin\operatorname{am} nv}{\cos\operatorname{am} nv} - kll'\,P_1\right)\Delta\operatorname{am} nu \\ & \qquad + \left(\frac{V'}{n}\,\sin\operatorname{am} nv - V\,\frac{\Delta\operatorname{am} nv}{\cos\operatorname{am} nv} + l'\,P\right)kl\sin\operatorname{am} nu. \end{aligned}\right.$$

Der Fläche, bestimmt durch die Gleichungen (28), entspricht eine andere Fläche, welche als Biegung der ersteren angesehen werden kann. Für einen Punkt (x_1, y_1, z_1) dieser zweiten Fläche sollen

$$a_1,\, b_1,\, c_1;\quad a_1',\, b_1',\, c_1';\quad a_1'',\, b_1'',\, c_2'';\quad r_1' \text{ und } r_1''$$

analoge Bedeutungen haben, wie a, b, c etc. für den Punkt (x, y, z) der ersten Fläche. Zu Folge der Gleichungen (10) ist:

$$\frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{1}{\sin(p+q)}, \quad \frac{\sqrt{G}}{r_1''} = \cot(p+q),$$

folglich:

$$\frac{r_1' r_1''}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{r_1'} = \frac{r_1'}{\sqrt{(EG)}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{\partial q}{\partial v}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das System der Krümmungslinien, für welches u allein variirt, plan ist. Da die analytischen Entwicklungen denen des vorhergehenden Falles analog sind, so sollen dieselben nur kurz angedeutet werden. Ist τ der Winkel, unter welchem die Ebene der planen Krümmungslinie die Fläche schneidet, so kann man setzen:

$$\cot\tau = \frac{\partial q}{\partial v} = -\, ln \cos \operatorname{am} nv.$$

Den Gleichungen (11), (13) und (14) entsprechen die folgenden:

$$\cos\alpha_1 = \cos a_1 \cos\tau - \cos a_1'' \sin\tau,$$

$$\frac{\partial \cos\alpha_1}{\partial v} = -(\cos a_1 \sin\tau + \cos a_1'' \cos\tau)\left(\frac{\sqrt{G}}{r''} + \frac{\partial\tau}{\partial v}\right)$$
$$+ \cos a_1' \sin\tau \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial v} = \frac{-n^2 k k'}{i + l^2 n^2 \cos^2 \operatorname{am} nv} = \frac{-kk'}{k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv},$$

$$\frac{\sqrt{G}}{r_1''} + \frac{\partial\tau}{\partial v} = \sin\psi \frac{\partial\eta}{\partial v}, \quad \sin\tau \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \cos\psi \frac{\partial\eta}{\partial v}.$$

Die letzten Gleichungen geben:

$$k' \cos\psi = \frac{\cos \operatorname{am} nu \sqrt{(k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv)}}{\Delta \operatorname{am} nu\, \Delta \operatorname{am} nv + kl \sin \operatorname{am} nu \sin \operatorname{am} nv},$$

$$k' \sin\psi = \frac{k'^2 \sin \operatorname{am} nu\, \Delta \operatorname{am} nv + kl \sin \operatorname{am} uv\, \Delta \operatorname{am} nu}{\Delta \operatorname{am} nu\, \Delta \operatorname{am} nv + kl \sin \operatorname{am} nu \sin \operatorname{am} nv}.$$

Man findet wieder, dass die Ebenen des planen Systems einer festen Geraden parallel sind. Nimmt man:

$$\cos a_1 \cos\tau - \cos a_1'' \sin\tau = \sin\eta,$$
$$\cos b_1 \cos\tau - \cos b_1'' \sin\tau = -\cos\eta,$$
$$\cos c_1 \cos\tau - \cos c_1'' \sin\tau = 0,$$

so ist die Gleichung der Ebene der planen Krümmungslinie:

$$x_1 \sin\eta - y_1 \cos\eta = \Phi,$$

wo Φ eine Function von v bedeutet. Mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen und der folgenden:

$$\frac{1}{\cos\psi} \frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{k' n}{\cos \operatorname{am} nu}, \quad \frac{1}{\cos\psi} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \cot\tau, \ \cos c_1 = \cos\psi \sin\tau,$$

$$\cos c_1' = \sin\psi,\ \cos c_1'' = \cos\psi \cos\tau,\ \cos a_1'' \sin\eta - \cos b_1'' \cos\eta = -\sin\tau,$$
$$\cos a_1'' \cos\eta + \cos b_1'' \sin\eta = -\sin\psi \cos\tau,\ \cos a_1' \cos\eta + \cos b_1' \cos\eta = \cos\psi,$$

lassen sich die entsprechenden Gleichungen zu den Gleichungen (28), (29) und (30) herleiten. Diese Gleichungen sind folgende, in denen U eine Function von u bedeutet:

$$
(31)\quad \begin{cases}
x_1 \sin\eta - y_1 \cos\eta = \Phi, \\
x_1 \cos\eta + y_1 \sin\eta = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \dfrac{\sqrt{G}}{n} \cdot \dfrac{\sqrt{(k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} uv)}}{kk'}, \\
\qquad\qquad - z_1 = \displaystyle\int \frac{Uk'n}{\cos \operatorname{am} nu}\, \partial u + (\sqrt{E} - U')\, \frac{\cos \operatorname{am} nu}{nk'}.
\end{cases}
$$

$$
(32)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\eta}{\partial v} = \dfrac{-n^2 kk'}{1 + l^2 n^2 \cos^2 \operatorname{am} nv} = \dfrac{-kk'}{k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv}, \\
\displaystyle\int \frac{\Delta \operatorname{am} nv}{\sqrt{(k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv)}} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} + \Phi\right) \partial\eta = Q, \\
\displaystyle\int \frac{\sin \operatorname{am} nv}{\sqrt{(k'^2 - l^2 \sin^2 \operatorname{am} nv)}} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} + \Phi\right) \partial\eta = Q_1.
\end{cases}
$$

$$
(33)\quad \begin{cases}
(\Delta \operatorname{am} nu\, \Delta \operatorname{am} nv + kl \sin \operatorname{am} nu \sin \operatorname{am} nv) \dfrac{\sqrt{E}}{n} = \\
\qquad \left(\dfrac{U'}{n}\, \Delta \operatorname{am} nu - Uk'^2 \dfrac{\sin \operatorname{am} nu}{\cos \operatorname{am} nu} - lkk' Q_1\right) \Delta \operatorname{am} nv \\
+ \left(\dfrac{U'}{n} \sin \operatorname{am} nu - U \dfrac{\Delta \operatorname{am} nu}{\cos \operatorname{am} nu} + k' Q\right) kl \sin \operatorname{am} nv, \\
(\Delta \operatorname{am} nu\, \Delta \operatorname{am} nv + kl \sin \operatorname{am} nu \sin \operatorname{am} nv) \dfrac{\sqrt{G}}{n} \\
= -\, kU \cos \operatorname{am} nu + kk' \,(Q\, \Delta \operatorname{am} nu + Q_1 kl \sin \operatorname{am} nu).
\end{cases}
$$

Die vorstehenden Gleichungen enthalten die beiden Functionen Φ und U, welche mit den Functionen Ω und V auf folgende Weise zusammenhängen. Vergleicht man die Werthe von $\frac{\sqrt{G}}{n}$ aus (30) und (33), so folgt:

$$
\begin{aligned}
&kU \cos \operatorname{am} nu + kll' \,(-P_1\, \Delta \operatorname{am} nu + P \sin \operatorname{am} nu) = \\
&\left(-\frac{V'}{n}\, \Delta \operatorname{am} nv + Vl'^2 \frac{\sin \operatorname{am} nv}{\cos \operatorname{am} nv} + kk'\, Q\right) \Delta \operatorname{am} nu \\
+ &\left(-\frac{V'}{n} \sin \operatorname{am} nv + V \frac{\Delta \operatorname{am} nv}{\cos \operatorname{am} nv} + kk'\, Q_1\right) kl \sin \operatorname{am} nu.
\end{aligned}
$$

Da nun V, Q, Q_1 nur von v abhängen, so müssen die Factoren von $\Delta \operatorname{am} nu$ und $\sin \operatorname{am} nu$ auf der rechten Seite constant sein. Sind λ und μ Constanten, so ist:

$$
(34)\quad \begin{cases}
kk'\, Q - \dfrac{V'}{n}\, \Delta \operatorname{am} nv + Vl'^2 \dfrac{\sin \operatorname{am} nv}{\cos \operatorname{am} nv} = \lambda k, \\
kk'\, Q_1 - \dfrac{V'}{n} \sin \operatorname{am} nv + V \dfrac{\Delta \operatorname{am} nv}{\cos \operatorname{am} nv} = \mu,
\end{cases}
$$

$$
U \cos \operatorname{am} nu + ll' \,(-P_1\, \Delta \operatorname{am} nu + P \sin \operatorname{am} nu) = \lambda\, \Delta \operatorname{am} nu + \mu l \sin \operatorname{am} nu.
$$

Differentiirt man die vorstehende Gleichung nach u, berücksichtigt die Werthe von

$$\frac{\partial P}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial P_1}{\partial u}$$

aus (29), so erhält man eine zweite Gleichung zwischen P und P_1. Diese Gleichungen geben:

$$(35) \quad \begin{cases} ll'\, P + \dfrac{U'}{n}\, \Delta\, \mathrm{am}\, nu - Uk'^2\, \dfrac{\sin \mathrm{am}\, nu}{\cos \mathrm{am}\, nu} = \mu l, \\ ll'\, P_1 + \dfrac{U'}{n} \sin \mathrm{am}\, nu - U\, \dfrac{\Delta\, \mathrm{am}\, nu}{\cos \mathrm{am}\, nu} = -\lambda. \end{cases}$$

Da Ω und Φ verschwinden können, also auch P, P_1 und Q, Q_1, so ist es am zweckmässigsten, die Werthe von V und U aus den Gleichungen (34) und (35) darzustellen und dieselben in die Gleichungen (30) oder (33) zu substituiren. Man erhält dann für $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ die Gleichungen:

$$(36) \quad \begin{cases} (\Delta\, \mathrm{am}\, nu\, \Delta\, \mathrm{am}\, nv + kl \sin \mathrm{am}\, nu \sin \mathrm{am}\, nv)\, \dfrac{\sqrt{E}}{n} = \\ -(kk'\, Q_1 - \mu + l'P)\, l\Delta\, \mathrm{am}\, nv + (k'Q - \lambda - ll'P_1)\, kl \sin \mathrm{am}\, nv, \\ (\Delta\, \mathrm{am}\, nu\, \Delta\, \mathrm{am}\, nv + kl \sin \mathrm{am}\, nu \sin \mathrm{am}\, nv)\, \dfrac{\sqrt{G}}{n} = \\ -(ll'P_1 + \lambda - k'Q)\, k\, \Delta\, \mathrm{am}\, nu + (l'P - \mu + kk'Q_1)\, kl \sin \mathrm{am}\, nu. \end{cases}$$

Die Gleichungen (35) geben:

$$\frac{k'nU}{\cos \mathrm{am}\, nu} = (ll'P_1 + \lambda)k' \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sin \mathrm{am}\, nu}{\cos \mathrm{am}\, nu} - \frac{ll'P - \mu l}{k'} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\Delta\, \mathrm{am}\, nu}{\cos \mathrm{am}\, nu},$$

$$\frac{U' \cos \mathrm{am}\, nu}{nk'} = (ll'P_1 + \lambda)\, k' \frac{\sin \mathrm{am}\, nu}{\cos \mathrm{am}\, nu} - \frac{ll'P - \mu l}{k'} \frac{\Delta\, \mathrm{am}\, nu}{\cos \mathrm{am}\, nu}.$$

Hieraus erhält man durch partielle Integration:

$$\int \frac{k'nU}{\cos \mathrm{am}\, nu}\, \partial u - \frac{U' \cos \mathrm{am}\, nu}{nk'} =$$

$$ll' \int \frac{\partial u}{\cos \mathrm{am}\, nu} \left(\frac{\Delta\, \mathrm{am}\, nu}{k'} \frac{\partial P}{\partial u} - k' \sin \mathrm{am}\, nu\, \frac{\partial P'}{\partial u} \right).$$

Die Differentialquotienten von P und P_1 nach u ergeben sich leicht mittelst der Gleichungen (29). Auf diese Art findet man:

$$(37) \quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{k'nU}{\cos \mathrm{am}\, nu}\, \partial u - \frac{U' \cos \mathrm{am}\, nu}{nk'} = \\ \displaystyle\qquad \frac{ll'}{k'} \int \frac{\cos \mathrm{am}\, nu}{\sqrt{(l'^2 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, nu)}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} + \Omega \right) \partial \varepsilon, \\ \displaystyle\int \frac{l'nV}{\cos \mathrm{am}\, nv}\, \partial v - \frac{V' \cos \mathrm{am}\, nv}{nl'} = \\ \displaystyle\qquad -\frac{kk'}{l'} \int \frac{\cos \mathrm{am}\, nv}{\sqrt{(k'^2 - l^2 \sin^2 \mathrm{am}\, nv)}} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \Phi \right) \partial \eta. \end{cases}$$

Die Functionen P, P_1, Q, Q_1, welche in $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ vorkommen, sowie die Integrale (37) in den Gleichungen für z und z_1, las-

sen sich leicht durch Einführung von zwei neuen Functionen an die Stelle von Ω und Φ durch Functionen ohne Integralzeichen darstellen. Durch partielle Integration folgt:

$$\int H\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2}+\Omega\right)\partial\varepsilon = H\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial H}{\partial\varepsilon}\Omega+\int\Omega\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\varepsilon^2}+H\right)\partial\varepsilon.$$

Wegen:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}=\frac{ll'}{l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu}\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}=\frac{l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu}{ll'},$$

ist:

$$(38)\qquad \int\Omega\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\varepsilon^2}+H\right)\partial\varepsilon=\int\frac{ll'\,\Omega}{l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\varepsilon^2}+H\right)\partial u.$$

Für:

$$H=\frac{\sin\operatorname{am} nu}{\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}}$$

folgt:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varepsilon^2}+H=\frac{n^2\sin^2\operatorname{am} nu}{\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu}}\left\{\frac{1}{n^2}+k^2\cos^2\operatorname{am} nu-\right.$$
$$\left.\frac{l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu}{l^2}\Delta^2\operatorname{am} nu\right\}.$$

Da $\frac{1}{n^2}=1-k^2-l^2=l'^2-k^2$, so ist:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varepsilon^2}+H=-\frac{n^2}{l^2}\sin\operatorname{am} nu\cdot(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu)^{-\frac{3}{2}}.$$

Je nachdem $H\cdot\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}$ einen der Werthe

$$\sin\operatorname{am} nu\;,\;\cos\operatorname{am} nu\;,\;\Delta\operatorname{am} nu$$

hat, findet man für:

$$\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial\varepsilon^2}+H}{(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu)^{\frac{3}{2}}}$$

die Werthe:

$$-\frac{n^2}{l^2}\sin\operatorname{am} nu,\;-\frac{\cos\operatorname{am} nu}{(ll')^2},\;\frac{n^2}{l'^2}\Delta\operatorname{am} nu.$$

Die Reduction eines Integrals von der Form des Integrals (38) besteht in der Ausführung der Integrale:

$$\int\Omega\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}\;\Theta\cdot\partial u,$$

wo Θ eine der Functionen $\sin\operatorname{am} nu$, $\cos\operatorname{am} nu$, $\Delta\operatorname{am} nu$ ist. Diese Integrale lassen sich sämmtlich ausführen, wenn man setzt:

$$\Omega\sqrt{(l'^2-k^2\sin^2\operatorname{am} nu)}=\frac{1}{n}\frac{\partial^2 U_1'\,\Delta\operatorname{am} nu}{\partial u^2}+n\,U_1'\,\Delta^3\operatorname{am} nu$$
$$-k^2\frac{\partial\,U_1'\sin\operatorname{am} nu\cos\operatorname{am} nu}{\partial u},$$

wo U_1 eine beliebige Function von u und $U_1'=\frac{\partial U_1}{\partial u}$ ist. Genau dasselbe Verfahren lässt sich auf die Integrale in Beziehung auf v an-

wenden. Da die Gleichungen durch diese Reductionen an Einfachheit verlieren, so sollen dieselben nicht weiter ausgeführt werden.

Ist für die Fläche, definirt durch die Gleichungen (28), das System der Krümmungslinien, für welches u allein variirt, sphärisch, so findet die Gleichung statt:

$$\sqrt{E} = \frac{\sqrt{E}}{r'} F_1(v) + \frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{r'} F(v),$$

wo $F(v)$ und $F_1(v)$ Functionen von v sind. Mittelst der Gleichungen (8), (10) und (30) geht die vorstehende Gleichung über in:

$$(39)\left\{\begin{aligned}\{F(v)-V\}\, ln \cos \operatorname{am} nv + \{F_1(v)\,\Delta \operatorname{am} nu + nkll' P_1\}\, l \sin \operatorname{am} nv \\ = \{k F_1(v) \sin \operatorname{am} nu - nll' P\}\, \Delta \operatorname{am} nv.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung nach u differentiirt giebt nach (29):

$$k F_1(v) \cos \operatorname{am} nu = \frac{ll'\left(\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2}\right)}{\sqrt{(l'^2 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} nu)}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass $F_1(v)$ constant ist. Die Fläche ist also eine Parallelfläche zu derjenigen, für welche $F_1(v) = 0$ ist.

Nimmt man $F_1(v) = 0$, so ist:

$$\Omega + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} = 0,$$

d. h. $\Omega = x_0 \sin \varepsilon - y_0 \cos \varepsilon$, wo x_0, y_0 Constanten sind. Dieser Werth von Ω in Verbindung mit den beiden ersten Gleichungen (28) zeigt, dass sich die Constanten x_0, y_0 nur auf eine Verschiebung des Anfangspunktes der Coordinaten beziehen. Nimmt man also $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, so ist auch $\Omega = 0$. Die erste Gleichung (28) giebt dann

$$x \sin \varepsilon - y \cos \varepsilon = 0 \quad \text{und} \quad \cos a'' \sin \varepsilon - \cos b'' \cos \varepsilon = 0,$$

folglich:

$$(40) \qquad (x - V \cos a'') \sin \varepsilon - (y - V \cos b'') \cos \varepsilon = 0.$$

Wegen $F_1(v) = 0$, $P = 0$, $P_1 = 0$ erhält man aus (39) $F(v) = V$. Ist (ξ, η, ζ) der Mittelpunkt der osculatorischen Kugelfläche im Punkte (x, y, z) der sphärischen Krümmungslinie, so hat man, wegen

$$F_1(v) = 0 \quad \text{und} \quad F(v) = V:$$

$$\xi = x - V \cos a'', \ \eta = y - V \cos b'', \ \zeta = z - V \cos c''.$$

Hierdurch geht die Gleichung (40) über in: $\xi \sin \varepsilon - \eta \cos \varepsilon = 0$. Da nun ε nicht constant sein kann, ferner ξ, η, ζ nur von v abhängen, so ist die Gleichung $\xi \sin \varepsilon - \eta \cos \varepsilon = 0$ nicht anders möglich, als für $\xi = 0$, $\eta = 0$, der Mittelpunkt der osculatorischen Kugelfläche liegt auf der Axe der z. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich:

Lässt sich eine Fläche mit einem System planer Krümmungslinien so biegen, dass dieselben nach der Biegung Krümmungslinien bleiben, so sind die Ebenen des planen Systems einer festen Geraden parallel; dasselbe findet für die deformirte Fläche statt. Ist das zweite System der Krümmungslinien der primitiven Fläche sphärisch, so ist dieselbe eine Parallelfläche zu derjenigen, für welche die Ebenen des planen Systems sämmtlich durch eine feste Gerade gehen. Diese feste Gerade enthält gleichzeitig die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen des sphärischen Systems.

Integration der Gleichung

$$x^{m+\frac{1}{2}} \frac{\partial^{2m+1} y}{\partial x^{2m+1}} \mp y = 0$$

durch Bessel'sche Functionen.

Von E. Lommel in Erlangen.

---

1. In meinem Schriftchen über die Bessel'schen Functionen*) bilden die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial^m \left(z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{\nu+m}{2}} \overset{\nu+m}{J}_{(\sqrt{z})}$$

und

$$\frac{\partial^m \left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{\frac{\nu-m}{2}} \overset{\nu-m}{J}_{(\sqrt{z})},$$

in welchen ν eine *beliebige reelle* Zahl vorstellt, die Grundlage der Untersuchung. Schreibt man in der ersten $-\nu$ statt ν, so lauten sie

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^m \left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{-\nu}{J}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{m-\nu}{2}} \overset{m-\nu}{J}_{(\sqrt{z})},$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial^m \left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{m-\nu}{2}} \overset{-(m-\nu)}{J}_{(\sqrt{z})}.$$

Nun werde $2m+1$ statt m und $\frac{2m+1}{2}$ statt ν gesetzt; dann hat man

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial^{2m+1} \left(z^{\frac{2m+1}{4}} \overset{-\frac{2m+1}{2}}{J}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{2m+1}} = -(\tfrac{1}{2})^{2m+1} \cdot z^{-\frac{2m+1}{4}} \overset{\frac{2m+1}{2}}{J}_{(\sqrt{z})},$$

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial^{2m+1} \left(z^{\frac{2m+1}{4}} \overset{\frac{2m+1}{2}}{J}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{2m+1}} = (\tfrac{1}{2})^{2m+1} \cdot z^{-\frac{2m+1}{4}} \overset{-\frac{2m+1}{2}}{J}_{(\sqrt{z})}.$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, nachdem man die letztere mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt hat, so erhält man:

---

*) Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig, 1868.

$$(5)\qquad \frac{\partial^{2m+1}}{\partial z^{2m+1}}\left(z^{\frac{2m+1}{4}}\left[J_{(\sqrt{z})}^{-\frac{2m+1}{2}}+i\,J_{(\sqrt{z})}^{\frac{2m+1}{4}}\right]\right)= i\,(\tfrac{1}{2})^{2m+1}\cdot z^{-\frac{2m+1}{4}}\left[J_{(\sqrt{z})}^{-\frac{2m+1}{2}}+i\,J_{(\sqrt{z})}^{\frac{2m+1}{2}}\right].$$

Wird nun in dieser Gleichung

$$z^{\frac{2m+1}{4}}\left[J_{(\sqrt{z})}^{-\frac{2m+1}{2}}+i\,J_{(\sqrt{z})}^{\frac{2m+1}{2}}\right]=y$$

gesetzt, so verwandelt sie sich in die Differentialgleichung

$$z^{\frac{2m+1}{2}}\;\frac{\partial^{2m+1}y}{\partial z^{2m+1}}=\frac{i}{2^{2m+1}}\;y,$$

welcher sonach der vorstehende Werth von y als particuläres Integral genügt. Durch die Substitution $z=px$ geht sie zunächst in folgende über

$$x^{\frac{2m+1}{2}}\cdot\frac{\partial^{2m+1}y}{\partial x^{2m+1}}=\frac{ip^{\frac{2m+1}{2}}}{2^{2m+1}}\cdot y.$$

Bestimmen wir nun p aus der Gleichung

$$\frac{ip^{\frac{2m+1}{2}}}{2^{2m+1}}=\pm 1,$$

so gelangen wir zur Differentialgleichung

$$x^{m+\frac{1}{2}}\;\frac{\partial^{2m+1}y}{\partial x^{2m+1}}=\pm\,y.$$

Für p aber findet man

$$p^{\frac{1}{2}}=2\,(\mp i)^{\frac{1}{2m+1}}.$$

Da nun, wenn unter i durchaus ein und der nämliche Werth von $\sqrt{-1}$ verstanden wird, die $(2m+1)^{\text{te}}$ Wurzel aus $\mp i$ $2m+1$ verschiedene Werthe hat, so liefert der obige Ausdruck von y, nach Einführung von $z=px$, $2m+1$ verschiedene particuläre Integrale der letzten Differentialgleichung, und wir sind sonach im Stande, deren vollständiges Integral anzugeben.

Das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$(6)\qquad x^{m+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial^{2m+1}y}{\partial x^{2m+1}}\mp y=0$$

heisst:

$$(7)\qquad y=x^{\frac{2m+1}{4}}\sum_{p=0}^{p=2m}C_p\left[J_{(2\alpha_p\sqrt{x})}^{-m-\frac{1}{2}}+i\,J_{(2\alpha_p\sqrt{x})}^{m+\frac{1}{2}}\right],$$

wenn unter $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{2m}$ *die* $2m+1$ *Wurzelwerthe der Gleichung* $\alpha^{2m+1}=\mp i$, *und unter* $C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_{2m}$ $2m+1$ *willkürliche Constante verstanden werden.*

Die Subtraction der Gleichungen (3) und (4) würde zu demselben Resultate, nur mit Vertauschung von $+i$ mit $-i$, geführt haben.

2. Das Integral der Differentialgleichung (6) ist also darstellbar durch *Bessel'sche Functionen mit gebrochenem Index.* Wenn aber, wie hier, der Index ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist, so lässt sich die entsprechende Bessel'sche Function in geschlossener Form durch endliche Reihen, welche noch mit Exponentialgrössen oder Sinus und Cosinus multiplicirt sind, ausdrücken. Man hat nämlich*)

$$(8)\qquad \overset{m+\frac{1}{2}}{J}(z) = (-1)^{m+1}\, i^{m+1} \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\, \Sigma\, \frac{(m+1)^{q/1}\, m^{q/-1}}{2^{q/2}} \cdot \frac{i^q}{z^q}$$
$$+\, i^{m+1} \cdot \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\, \Sigma\, (-1)^q \cdot \frac{(m+1)^{q/1}\, m^{q/-1}}{2^{q/2}} \cdot \frac{i^q}{z^q},$$

wo die Summenzeichen andeuten, dass dem q nach und nach alle positiv ganzen Werthe von 0 bis m beizulegen sind.

Um einen ähnlichen Ausdruck für

$$\overset{-m-\frac{1}{2}}{J}(z)$$

zu erhalten, *stellen wir die Vermuthung auf*, dass diese unter der Voraussetzung eines positiv ganzen m entwickelte Formel auch noch für negativ ganze m giltig bleibe. Schreibt man also $-m-1$ statt m, so würde

$$(9)\qquad \overset{-m-\frac{1}{2}}{J}(z) = i^m \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\, \Sigma\, \frac{(m+1)^{q/1}\, m^{q/-1}}{2^{q/2}} \cdot \frac{i^q}{z^q}$$
$$+\, (-1)^m\, i^m \cdot \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\, \Sigma\, (-1)^q \frac{(m+1)^{q/1} m^{q/-1}}{2^{q/2}} \cdot \frac{i^q}{z^q}$$

sein. Durch Addition dieser beiden Gleichungen, nachdem die erstere noch mit i multiplicirt worden, ergibt sich zunächst:

$$\overset{-m-\frac{1}{2}}{J}(z) + i\, \overset{m+\frac{1}{2}}{J}(z) = \left[1 + (-1)^m\right] i^m \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\quad \Sigma\, \frac{(m+1)^{q/1}\, m^{q/-1}}{2^{q/2}} \cdot \frac{i^q}{z^q}$$
$$-\left[1 - (-1)^m\right] i^m \cdot \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\, \Sigma\, (-1)^q \cdot \frac{(m+1)^{q/1} m^{q/-1}}{2^{q/2}} \cdot \frac{i^q}{z^q},$$

woraus erhellt, dass die Fälle eines geraden und ungeraden m bei der weiteren Behandlung getrennt werden müssen. Setzen wir demgemäss zuerst $2m$, dann $2m+1$ statt m, so erhalten wir:

$$(10)\quad \overset{-2m-\frac{1}{2}}{J}(z) + i\, \overset{2m+\frac{1}{2}}{J}(z) = 2\,(-1)^m \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\, \Sigma\, \frac{(2m+1)^{q/1}\, 2m^{q/-1}}{2^{q/2}} \cdot \frac{i^q}{z^q}$$

$$(11)\qquad \overset{-2m-\frac{3}{2}}{J}(z) + i\, \overset{2m+\frac{3}{2}}{J}(z)$$
$$= -\,2\,(-1)^m\, i \cdot \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\, \Sigma\, (-1)^q \cdot \frac{(2m+2)^{q/1}\, (2m+1)^{q/-1}}{2^{q/2}} \cdot \frac{i^q}{z^q}.$$

---

*) L. c. § 16.

Führen wir jetzt diese Ausdrücke in die Formel (7) ein, so erhalten wir das Integral der Differentialgleichung (6) in vollständig entwickelter Form wie folgt:

Der Differentialgleichung

$$x^{2m+\frac{1}{2}} \frac{\partial^{4m+1} y}{\partial x^{4m+1}} \mp y = 0 \tag{12}$$

genügt als vollständiges Integral

$$y = x^m \sum_{p=0}^{p=4m} C_p \, e^{2i\alpha_p \sqrt{x}} \sum_{q=0}^{q=2m} \frac{(2m+1)^{q/1} \, 2m^{q/-1}}{4^{q/4}} \cdot \left(\frac{i}{\alpha_p \sqrt{x}}\right)^q, \tag{13}$$

wenn $\alpha^{4m+1} = \mp i$ *ist.*

Der Differentialgleichung

$$x^{2m+\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial^{4m+3} y}{\partial x^{4m+3}} \mp y = 0 \tag{14}$$

genügt als vollständiges Integral

$$y = x^{m+\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{p=4m+2} C_p \, e^{-2i\alpha_p \sqrt{x}} \sum_{q=0}^{q=2m+1} \frac{(2m+2)^{q/1}(2m+1)^{q/-1}}{4^{q/4}} \left(\frac{i}{\alpha_p \sqrt{x}}\right)^q, \tag{15}$$

wenn $\alpha^{4m+3} = \mp i$ *ist.*

3. Um die oben aufgestellte Vermuthung, dass die Entwickelung (8) von

$$\overset{m+\frac{1}{2}}{J}(z)$$

auch für negative m gelte, zur Gewissheit zu erheben, verfahren wir wie folgt:

In dem oben citirten Werkchen sind die Bessel'schen Functionen mit negativem Index definirt durch die Gleichung

$$\overset{\nu}{J}(z) = (-1)^m \cdot \sum_{p=0}^{p=m} (-2)^p \cdot \frac{m^{p/-1} \, (m+\nu)^{p/-1}}{p!} \cdot z^{-p} \cdot \overset{2m+\nu-p}{J}(z),$$

durch welche es gelingt, jede Function mit negativem Index durch solche mit positivem Index auszudrücken. Wir erhalten daraus z. B.

$$\left\{ \begin{array}{l} J^{-\frac{1}{2}} = - J^{\frac{3}{2}} + \dfrac{J^{\frac{1}{2}}}{z} \\ J^{-\frac{3}{2}} = J^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot \dfrac{J^{\frac{3}{2}}}{z} - \dfrac{J^{\frac{1}{2}}}{z^2} \\ J^{-\frac{5}{2}} = - J^{\frac{7}{2}} + 3 \cdot \dfrac{J^{\frac{5}{2}}}{z} + 3 \cdot \dfrac{J^{\frac{3}{2}}}{z^2} + 3 \cdot \dfrac{J^{\frac{1}{2}}}{z^3}. \end{array} \right. \tag{16}$$

. . . .

Aus unserer Formel (8) aber ergiebt sich

$$\left| \begin{array}{l} J^{\frac{1}{2}} = - i \cdot \dfrac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} + i \cdot \dfrac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}} \\ J^{\frac{3}{2}} = - \dfrac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 + \dfrac{i}{z}\right) - \dfrac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \dfrac{i}{z}\right) \end{array} \right.$$

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
J^{\frac{5}{2}} &= i \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\left(1+\frac{3i}{z}-\frac{3}{z^2}\right) - i\,\frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\left(1-\frac{3i}{z}-\frac{3}{z^2}\right)\\
J^{\frac{7}{2}} &= \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\left(1+\frac{6i}{z}-\frac{15}{z^2}-\frac{15i}{z^3}\right)\\
&\quad + \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\left(1-\frac{6i}{z}-\frac{15}{z^2}+\frac{15i}{z^3}\right).\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}\right.
$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichungen (16) findet man

$$
(18)\quad \left\{\begin{aligned}
J^{-\frac{1}{2}} &= \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} + \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\\
J^{-\frac{3}{2}} &= i \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\left(1+\frac{i}{z}\right) - i \cdot \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\left(1-\frac{i}{z}\right)\\
J^{-\frac{5}{2}} &= -\frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\left(1+\frac{3i}{z}-\frac{3}{z^2}\right) - \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\left(1-\frac{3i}{z}-\frac{3}{z^2}\right),\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}\right.
$$

und kann sich jetzt leicht überzeugen, dass diese Gleichungen genau ebenso aus der Formel (9) hervorgehen, dass diese also jedenfalls für $m = 0$, 1 und 2 giltig ist. Um ihre allgemeine Geltung ausser Zweifel zu setzen, bleibt jetzt noch übrig zu zeigen, dass die Formel (9), wenn sie für zwei aufeinanderfolgende Werthe von m zutrifft, jedesmal auch noch für den nächsthöheren Werth von m giltig sein muss. Um diesen Inductionsbeweis zu führen, wenden wir uns an die für jedes reelle ν giltige Recursionsformel

$$\overset{\nu}{J}(z) = \frac{2(\nu-1)}{z}\,\overset{\nu-1}{J}(z) - \overset{\nu-2}{J}(z)\,.$$

Ihr zufolge muss

$$\overset{-m-2-\frac{1}{2}}{J(z)} = -\frac{2m+3}{z}\,\overset{-m-1-\frac{1}{2}}{J(z)} - \overset{-m-\frac{1}{2}}{J(z)}$$

sein. Gemäss (9) aber ist

$$
\begin{aligned}
-\frac{2m+3}{z}\cdot\overset{-m-1-\frac{1}{2}}{J(z)} &= -i^m\cdot(2m+3)\,\frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\,\Sigma\,\frac{(m+2)^{q/1}\,(m+1)^{q/-1}}{2^{q/2}}\cdot\frac{i^{q+1}}{z^{q+1}}\\
&\quad + (-1)^m\, i^m\,(2m+3)\,\frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\,\Sigma\,(-1)^q\,\frac{(m+2)^{q/1}\,(m+1)^{q/-1}}{2^{q/2}}\cdot\frac{i^{q+1}}{z^{q+1}}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
-\overset{-m-\frac{1}{2}}{J(z)} &= -i^m\cdot\frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} - (-1)^m\, i^m\cdot\frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\\
&\quad - i^m\cdot\frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\,\Sigma\,\frac{(m+1)^{q+1/1}\,m^{q+1/-1}}{2^{q+1/2}}\cdot\frac{i^{q+1}}{z^{q+1}}\\
&\quad - (-1)^m\cdot i^m\cdot\frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\,\Sigma\,(-1)^{q+1}\,\frac{(m+1)^{q+1/1}\,m^{q+1/-1}}{2^{q+1/2}}\cdot\frac{i^{q+1}}{z^{q+1}},
\end{aligned}
$$

welcher letztere Ausdruck sich von dem sub (9) nur dadurch unterscheidet, dass die ersten Glieder der Summen abgesondert wurden, indem man zuerst $q = 0$, und dann $q + 1$ statt q setzte. Fassen wir nun die beiden mit e^{iz} behafteten Summen in eine einzige zusammen, so erhalten wir zunächst

$$-i^m \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \Sigma \left[\frac{(m+2)^{q/1}(m+1)^{q/-1}\cdot(2m+3)}{2^{q/2}} + \frac{(m+1)^{q+1/1}m^{q+1/-1}}{2^{q+1/2}}\right]\cdot\frac{i^{q+1}}{z^{q+1}}\,.$$

Mit dem eingeklammerten Ausdruck kann aber folgende Umformung vorgenommen werden:

$$\frac{(2m+3)(m+2)^{q/1}(m+1)^{q/-1}}{2^{q/2}} + \frac{(m+1)^{q+1/1}m^{q+1/-1}}{2^{q+1/2}}$$

$$= \frac{(2m+3)(m+3)^{q-1/1}(m+2)^{q+1/-1}}{2^{q/2}} + \frac{(m+3)^{q-1/1}(m+2)^{q+1/-1}\cdot(m+1-q)(m-q)}{2^{q/2}\cdot(2q+2)}$$

$$= \frac{(m+3)^{q-1/1}(m+2)^{q+1/-1}}{2^{q/2}}\left(2m+3+\frac{(m+1-q)(m-q)}{2q+2}\right)$$

$$= \frac{(m+3)^{q-1/1}(m+2)^{q+1/-1}}{2^{q/2}}\cdot\frac{(m+2+q)(m+3+q)}{2q+2}$$

$$= \frac{(m+3)^{q+1/1}(m+2)^{q+1/-1}}{2^{q+1/2}}$$

und die obige Summe nimmt folgende Gestalt an:

$$-i^m\cdot\frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\;\Sigma\;\frac{(m+3)^{q+1/1}(m+2)^{q+1/-1}}{2^{q+1/2}}\cdot\frac{i^{q+1}}{z^{q+1}}\,.$$

Fasst man ebenso die beiden mit e^{-iz} behafteten Summen in eine zusammen, so findet man

$$-(-1)^m i^m\cdot\frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\;\Sigma\,(-1)^{q+1}\cdot\frac{(m+3)^{q+1/1}(m+2)^{q+1/-1}}{2^{q+1/2}}\cdot\frac{i^{q+1}}{z^{q+1}}\,.$$

Die vorhin in dem Ausdruck für

$$\overset{-m-\frac{1}{2}}{J}(z)$$

abgetrennten Glieder können als erste Glieder den jetzigen Summen hinzugefügt werden, was einfach dadurch geschieht, dass man in diesen q statt $q+1$ schreibt. Man hat alsdann gefunden

$$\overset{-m-2-\frac{1}{2}}{J}(z) = -i^m\cdot\frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\;\Sigma\;\frac{(m+3)^{q/1}(m+2)^{q/-1}}{2^{q/2}}\cdot\frac{i^q}{z^q}$$

$$-(-1)^m i^m\cdot\frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\;\Sigma\,(-1)^q\cdot\frac{(m+3)^{q/1}(m+2)^{q/-1}}{2^{q/2}}\cdot\frac{i^q}{z^q}\,.$$

Diese Formel unterscheidet sich aber von der Formel (9) nur darin, dass $m+1$ an der Stelle von m steht, und überzeugt uns dadurch, dass der letzteren allgemeine Geltung zukommt.

4. Unsere Gleichungen (10) und (11) führen unmittelbar zu einem bemerkenswerthen Satz über die *Quadratsumme zweier Bessel'schen Functionen*, auf welchen hier im Vorbeigehen aufmerksam gemacht werden soll. Setzt man nämlich in

$$(10)\quad \overset{-2m-\frac12}{J(z)} + i\,\overset{2m+\frac12}{J(z)} = 2\,(-1)^m \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}}\,\Sigma\,\frac{(2m+1)^{p/1}\,2m^{p/-1}}{2^{p/2}}\cdot\frac{i^p}{z^p}$$

$-\,i$ statt i, so erhält man

$$(10^a)\quad \overset{-2m-\frac12}{J(z)} - i\,\overset{2m+\frac12}{J(z)} = 2\,(-1)^m \cdot \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}}\,\Sigma\,(-1)^q\cdot\frac{(2m+1)^{q/1}\,2m^{q/-1}}{2^{q/2}}\cdot\frac{i^q}{z^q}$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so kommt

$$(19)\quad \Big(\overset{-2m-\frac12}{J(z)}\Big)^2 + \Big(\overset{2m+\frac12}{J(z)}\Big)^2$$
$$= \frac{2}{\pi z}\,\Sigma\Sigma(-1)^q\,\frac{(2m+1)^{p/1}\,(2m+1)^{q/1}\,2m^{p/-1}\,2m^{q/-1}}{2^{p/2}\,2^{q/2}}\cdot\frac{i^{p+q}}{z^{p+q}}\,.$$

Verfährt man ebenso mit Gleichung (11), so erhält man

$$(20)\quad \Big(\overset{-2m-\frac32}{J(z)}\Big)^2 + \Big(\overset{2m+\frac32}{J(z)}\Big)^2$$
$$= \frac{2}{\pi z}\,\Sigma\Sigma(-1)^q\cdot\frac{(2m+2)^{p/1}\,(2m+2)^{q/1}\,(2m+1)^{p/-1}(2m+1)^{q/-1}}{2^{p/2}\,2^{q/2}}\cdot\frac{i^{p+q}}{z^{p+p}}\,.$$

Beide Gleichungen (19) und (20) können in die eine

$$\Big(\overset{-m-\frac12}{J(z)}\Big)^2 + \Big(\overset{m+\frac12}{J(z)}\Big)^2$$
$$= \frac{2}{\pi z}\,\Sigma\Sigma(-1)^q\cdot\frac{(m+1)^{p/1}\,(m+1)^{q/1}\,m^{p/-1}\,m^{q/-1}}{2^{p/2}\,2^{q/2}}\cdot\frac{i^{p+q}}{z^{p+q}}$$

zusammengezogen werden, welche sich, weil

$$(m+1)^{p/1}\,m^{q/-1} = (m+1-q)^{p+q/1}$$

und

$$(m+1)^{q/1}\,m^{p/-1} = (m+1-p)^{p+q/1}$$

ist, auch in folgender Weise schreiben lässt:

$$\Big(\overset{-m-\frac12}{J(z)}\Big)^2 + \Big(\overset{m+\frac12}{J(z)}\Big)^2 = \frac{2}{\pi z}\,\Sigma\Sigma(-1)^q\cdot\frac{(m+1-p)^{r/1}\,(m+1-q)^{r/1}}{2^{p/2}\,2^{q/2}}\cdot\frac{i^r}{z^r},$$

wo $p+q=r$ gesetzt wurde. Ist nun r ungerade, so ist in der endlichen Reihe zur Rechten der Coefficient von $\frac{1}{z^r}$ eine Summe aus einer geraden Anzahl von Gliedern, welche paarweise gleich und entgegengesetzt sind, d. h. dieser Coefficient ist Null. Schreiben wir daher lieber 2^r statt r, so haben wir:

$$\Big(\overset{-m-\frac12}{J(z)}\Big)^2 + \Big(\overset{m+\frac12}{J(z)}\Big)^2 = \frac{2}{\pi z}\sum_{r=0}^{r=m}\frac{A_{2r}}{z^{2r}}\,.$$

Dabei wird der Coefficient A_{2r} aus der Gleichung

$$A_{2r} = \Sigma (-1)^{r+q} \cdot \frac{(m+1-p)^{2r/1}\,(m+1-q)^{2r/1}}{2^{p/2}\,2^{q/2}}$$

bestimmt, in welcher für jeden speciellen Werth von r die zusammengehörigen Werthe von p und q stets der Bedingung $p+q=2r$ gemäss gewählt werden müssen. Berücksichtigt man den Umstand, dass weder p noch q den Werth m überschreiten können, ohne das entsprechende Glied der Summe zum Verschwinden zu bringen, und dass je zwei gleichweit von der Mitte abstehende Glieder einander gleich sind, so lässt sich eine wesentliche Verminderung der Gliederzahl erreichen. Giebt man z. B. dem r seinen höchsten Werth m, so dass $p+q=2m$ wird, so kann nur $p=m$ und $q=m$ sein, und die obige Summe reducirt sich auf das einzige Glied

$$A_{2m} = \left(\frac{1^{2m/1}}{2^{m/2}}\right)^2.$$

Ueberhaupt kann durch eine geeignete Umformung, deren Ausführung hier zu weitläufig wäre, jene Summe stets in ein einziges Glied zusammengefasst werden, und zwar hat man, wenn zweckmässiger $m-r$ statt r geschrieben wird

$$A_{2m-2r} = \frac{(2m+1-2r)^{r/1}}{r!}\left(\frac{(m+1-r)^{m-r/1}}{2^{m-r}}\right)^2$$

Wir haben also schliesslich folgenden Satz

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\left(\overset{-m-\frac{1}{2}}{J(z)}\right)^2 + \left(\overset{m+\frac{1}{2}}{J(z)}\right)^2 \\ &\quad = \frac{2}{\pi z}\sum_{r=0}^{r=m} \frac{(2m+1-2r)^{r/1}}{r!}\left(\frac{(m+1-r)^{m-r/1}}{2^{m-r}}\right)^2 \cdot \frac{1}{z^{2m-2r}}, \end{aligned}$$

d. h. *die Summe der Quadrate zweier Bessel'schen Functionen, deren Indices gleich, entgegengesetzt und ungerade Vielfache von*

$$\frac{1}{2}\left(\textit{nämlich } \pm \frac{2m+1}{2}\right)$$

sind, ist rational ausdrückbar durch eine $(m+1)$ *gliedrige nach negativen ungeraden Potenzen des Arguments fortschreitende Reihe.*

Im Einzelnen würde man z. B. erhalten:

$$(21^a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\overset{-\frac{1}{2}}{J}\right)^2 + \left(\overset{\frac{1}{2}}{J}\right)^2 = \frac{2}{\pi z} \\ &\left(\overset{-\frac{3}{2}}{J}\right)^2 + \left(\overset{\frac{3}{2}}{J}\right)^2 = \frac{2}{\pi z}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \\ &\left(\overset{-\frac{5}{2}}{J}\right)^2 + \left(\overset{\frac{5}{2}}{J}\right)^2 = \frac{2}{\pi z}\left(1 + \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^4}\right) \\ &\left(\overset{-\frac{7}{2}}{J}\right)^2 + \left(\overset{\frac{7}{2}}{J}\right)^2 = \frac{2}{\pi z}\left(1 + \frac{6}{z^2} + \frac{45}{z^4} + \frac{225}{z^6}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Die erste dieser Gleichungen erinnert an den Satz

$$(J^{\nu})^2 + (J^{\nu+1})^2 = \frac{2}{\pi z},$$

welcher in § 17 des oben citirten Werkchens für *äusserst grosse Werthe von z* bewiesen worden ist. Dieser Satz lässt eine Erweiterung zu, welche wegen ihres innigen Zusammenhanges mit dem soeben bewiesenen Satze hier nicht übergangen werden darf. Man hat nämlich *für äusserst grosse Werthe von z*, und für jedes reelle ε:

$$\overset{2m+\varepsilon}{J(z)} = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right).$$

$$\overset{2n+1+\varepsilon}{J(z)} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right).$$

Addirt man die Quadrate dieser beiden Gleichungen, so erhält man zunächst

$$\left(\overset{2m+\varepsilon}{J(z)}\right)^2 + \left(\overset{2n+1+\varepsilon}{J(z)}\right)^2 = \frac{2}{\pi z}$$

oder, wenn man

$2m + \varepsilon = \nu$ und $2n+1+\varepsilon = 2(n-m)+1+2m+\varepsilon = 2k+1+\nu$ setzt:

$$\left(\overset{\nu}{J(z)}\right)^2 + \left(\overset{\nu+2k+1}{J(z)}\right)^2 = \frac{2}{\pi z}, \tag{22}$$

d. h. die Summe der Quadrate zweier Bessel'schen Functionen, deren Indices um eine ungerade ganze Zahl verschieden sind, nähert sich bei wachsendem z dem Quotienten $\frac{2}{\pi z}$.

Wie man sieht, kann der Satz (21), *welcher für jeden Werth von z gilt*, bei *äusserst grossem z* als specieller Fall des Satzes (22) betrachtet werden.

5. Anknüpfend an die Resultate des vorigen Paragraphen dürfte hier eine Bemerkung am Platze sein über *Entwickelungen, welche nach Quadraten von Bessel'schen Functionen fortschreiten.* In § 15. des schon mehrfach citirten Werkchens ist folgende Gleichung aufgestellt:

$$\frac{2}{z}\frac{\partial}{\partial z}\Sigma(\nu+2p)\,(J^{\nu+2p})^2 = (J^{\nu-1})^2.$$

Setzt man darin zuerst $\nu = \frac{1}{2}$, dann $\nu = \frac{3}{2}$, so gelangt man zu folgenden zwei Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2}{z}\frac{\partial}{\partial z}\Sigma(2p+\tfrac{1}{2})\,(J^{2p+\frac{1}{2}})^2 = (J^{-\frac{1}{2}})^2 \\ &\frac{2}{z}\frac{\partial}{\partial z}\Sigma(2p+\tfrac{3}{2})\,(J^{2p+\frac{3}{2}})^2 = (J^{\frac{1}{2}})^2. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Addirt man sie unter Rücksicht auf die erste Gleichung (21^a), so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma(2p+\tfrac{1}{2})(J^{2p+\frac{1}{2}})^2 + \frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma(2p+\tfrac{3}{2})(J^{2p+\frac{3}{2}})^2 = \frac{1}{\pi}\cdot$$

Wird nun beiderseits nach z integrirt von 0 bis z, so erhält man

(24) $$\frac{z}{\pi} = \Sigma\,\frac{2p+1}{2}\left(J^{\frac{2p+1}{2}}\right)^2$$

oder

$$\frac{z}{\pi} = \tfrac{1}{2}\left(J^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \tfrac{3}{2}\left(J^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \tfrac{5}{2}\left(J^{\frac{5}{2}}\right)^2 + \cdots$$

Subtrahirt man dagegen die Gleichungen (23) und berücksichtigt, dass

$$\left(J^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(J^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{2}{\pi z}(\cos^2 z - \sin^2 z)$$

$$= \frac{2}{\pi z}\cos 2z$$

ist, so erhält man nach durchgeführter Integration

(25) $$\frac{\sin 2z}{2\pi} = \Sigma(-1)^p\cdot\frac{2p+1}{2}\left(J^{\frac{2p+1}{2}}\right)^2$$

oder

$$\frac{\sin 2z}{2\pi} = \tfrac{1}{2}\left(J^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \tfrac{3}{2}\left(J^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \tfrac{5}{2}\left(J^{\frac{5}{2}}\right)^2 - + \cdots.$$

Die Gleichung (24) bildet ein Seitenstück zu den Gleichungen

$$1 = (J^0)^2 + 2\,(J^1)^2 + 2\,(J^2)^2 + 2\,(J^3)^2 + \cdots$$

$$\frac{z^2}{4} = 1^2(J^1)^2 + 2^2(J^2)^2 + 3^2(J^3)^2 + 4^2(J^4)^2 + \cdots$$

an welche ich in jenem Werkchen die Bemerkung knüpfte, dass überhaupt für stetige und eindeutige Functionen, *wenigstens für solche von geradem Grade*, eine Entwickelung nach Quadraten von Bessel'schen Functionen möglich sein dürfte. Diese Vermuthung hat durch Neumann's Untersuchungen*) ihre Bestätigung gefunden. Aus den gegenwärtigen Formeln (24) und (25) geht aber hervor, *dass auch für Functionen von ungeradem Grade eine Entwickelung nach Quadraten von Bessel'schen Functionen möglich ist*, wenn man nur die Bessel'schen Functionen in dem naturgemäss erweiterten Sinne meines Schriftchens auffasst.

6. Kehren wir jedoch zu unserer Differentialgleichung

$$x^{m+\frac{1}{2}}\frac{\partial^{2m+1}y}{\partial x^{2m+1}} \mp y = 0$$

zurück. Das vollständige Integral derselben wurde von Liouville**) in der Form eines vielfachen Integrals, nämlich

$$y = \int^m \left(C_1 e^{2\lambda_1\sqrt{x}} + C_2 e^{2\lambda_2\sqrt{x}} + \cdots + C_{2m+1} e^{2\lambda_{2m+1}\sqrt{x}}\right) dx^m$$

*) Berichte der K. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. Jahrgang 1869. Pag. 221. Im Auszuge in diesen Annalen Bd. II. Pag. 192.

**) Liouville, Journal de l'école polytechnique. Vol. 15. Cah. 24. 1835.

von Spitzer*) dagegen durch einen Differentialquotienten höherer Ordnung, nämlich

$$y = x^{m+\frac{1}{2}} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} \left(C_1 e^{2\lambda_1 \sqrt{x}} + C_2 e^{2\lambda_2 \sqrt{x}} + \cdots + C_{2m+1} e^{2\lambda_{2m+1} \sqrt{x}}\right)$$

dargestellt. In beiden Formeln bedeuten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{2m+1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^{2m+1} = \pm 1$$

und $C_1, C_2, \ldots C_{2m+1}$ willkürliche Constante. Man kann sich leicht überzeugen, dass beide Formen mit dem oben gegebenen Integral übereinstimmen. Dieses letztere scheint mir jedoch einerseits den Vorzug zu besitzen, dass es, vollständig entwickelt, keine weiteren Rechnungsoperationen mehr erfordert; andrerseits steht es in engem Zusammenhang mit dem von mir**) gegebenen Integral der Differentialgleichung

$$x^m \cdot \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} \mp y = 0. \tag{26}$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung lautet nämlich

$$y = x^{\frac{m}{2}} \sum_{p=0}^{p=m-1} \left(A_p J^m(2i\sqrt{\alpha_p x}) + B_p Y^m(2i\sqrt{\alpha_p x})\right), \tag{27}$$

wenn unter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ die m Wurzelwerthe der Gleichung $\alpha^m = \pm 1$, und unter $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ $2m$ willkürliche Constante verstanden werden. Wenn man bedenkt, dass für ein gebrochenes m die alsdann nicht mehr existirende *Bessel'sche Function zweiter Art* Y^m durch die entsprechende Function erster Art J^{-m} mit negativ gebrochenem Index vertreten wird, so fällt die Analogie des obigen Integrals mit dem in Gleichung (7) gegebenen sofort in die Augen.

Die Gleichung (26) ist ebenfalls sowohl von Liouville als von Spitzer integrirt worden. Nach Liouville lautet ihr Integral

$$y = \int^{m-\frac{1}{2}} \left(C_1 e^{2\lambda_1 \sqrt{x}} + C_2 e^{2\lambda_2 \sqrt{x}} + \cdots + C_{2m} e^{2\lambda_{2m} \sqrt{x}}\right) dx^{m-\frac{1}{2}}, \tag{28}$$

nach Spitzer dagegen:

$$y = x^m \frac{\partial^{m+\frac{1}{2}}}{\partial x^{m+\frac{1}{2}}} \left(C_1 e^{2\lambda_1 \sqrt{x}} + C_2 e^{2\lambda_2 \sqrt{x}} + \cdots + C_{2m} e^{2\lambda_{2m} \sqrt{x}}\right). \tag{29}$$

In beiden Formeln sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2m}$ die $2m$ Wurzeln der Gleichung $\lambda^{2m} = \pm 1$ und $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$ willkürliche Constanten.

Diese mit Integrationen und Differentiationen mit gebrochenem Index behafteten Formen des Integrals müssen nothwendig mit der Form (27) übereinstimmen. Demnach müsste sein:

---

*) Spitzer, Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. Wien, 1860.

**) L. c. § 33.

$$(30)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^{m+\frac{1}{2}}}{\partial x^{m+\frac{1}{2}}} \sum_{p=0}^{p=2m-1} C_{p+1} e^{2\lambda_{p+1}\sqrt{x}} = \\ &x^{-\frac{m}{2}} \sum_{p=0}^{p=m-1} \left(A_p \overset{m}{J}(2i\sqrt{\alpha_p x}) + B_p \overset{m}{Y}(2i\sqrt{\alpha_p x})\right) \end{aligned}$$

und

$$(31)\quad \begin{aligned} &\int^{m-\frac{1}{2}} \left(\sum_{p=0}^{p=2m-1} C_{p+1} e^{2\lambda_{p+1}\sqrt{x}}\right) dx^{m-\frac{1}{2}} = \\ &x^{\frac{m}{2}} \sum_{p=0}^{p=m-1} \left(A_p J^m(2i\sqrt{\alpha_p x}) + B_p Y^m(2i\sqrt{\alpha_p x})\right), \end{aligned}$$

worin $\lambda^{2m+1} = 1$ und $\alpha^m = 1$ zu denken ist.

Aus der ersteren dieser beiden Formeln würde sich z. B. für $m = 0$ ergeben

$$\frac{\partial^{\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{x}}}{\partial x^{\frac{1}{2}}} = a\, J^0(2i\sqrt{x}) + b\; Y^0(2i\sqrt{x}),$$

und aus der zweiten für $m = 1$:

$$\int^{\frac{1}{2}} (ae^{2\sqrt{x}} + be^{-2\sqrt{x}})\, dx^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(A J^1(2i\sqrt{x}) + B\, Y^1(2i\sqrt{x})\right),$$

wo freilich die Constanten a, b, A, B noch zu bestimmen wären. Es mag jedoch für jetzt genügen, darauf hingewiesen zu haben, *dass die Differentiation und Integration mit dem gebrochenen Index* $\frac{2m+1}{2}$ *der Exponentialgrössen und darum auch der goniometrischen Functionen auf Bessel'sche Functionen mit ganzem Index führt.*

Ueber die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen.

Von Meissel in Iserlohn.

Die Methode der Absonderung aller Primzahlen von den natürlichen Zahlen durch Streichung der Vielfachen ist unter dem Namen „Sieb des Eratosthenes“ bekannt. Burckhardt bediente sich derselben zur Construction seiner Factorentafeln, aus denen man durch Abzählung die Menge der Primzahlen innerhalb der ersten drei Millionen aufgefunden hat.

Wie leicht hierbei Versehen stattfinden können, ergiebt sich aus der Menge von Zählungsfehlern, welche in dem zweiten Bande von Gauss Werken pag. 436/7 enthalten sind. Es sind folgende:

Chilias	Gauss	Wahrer Werth	Chilias	Gauss	Wahrer Werth
20	102	104	501	78	79
159	87	77	546	68	69
199	96	86	601	75	76
206	85	83	625	68	78
245	78	88	668	73	74
289	85	77	675	69	73
290	84	85	784	74	75
334	80	81	800	81	71
352	80	81	879	68	78
			985	74	70

Achtzehn dieser Fehler fand ich durch directes Nachzählen; den Fehler in der 501$^{\text{ten}}$ Chiliade aber hatte ich wohl deshalb übersehen, weil mein Zählungsresultat mit dem von Gauss übereinstimmte. Erst später entdeckte ich denselben mittels des folgenden Verfahrens, die Primzahlenmenge innerhalb gegebener Zahlengrenzen zu ermitteln.

Bezeichnungen.

Es sei $p_1 = 2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 5$; $\ldots$ p_n die n^{te} Primzahl; ferner bezeichne $\varphi\,(m)$ die Menge der Primzahlen, welche $\leq m$ sind.

Wird das Product $m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ aufgelöst und jeder Term innerhalb seines Vorzeichens mit dem Zeichen E behaftet (d. h. nach Legendre sein Decimalbruch weggelassen), so erhalten wir eine Function der beiden Elemente m und n, welche durch $\Phi(m, n)$ oder kürzer durch (m, n) bezeichnet werden mag.

---

1. Die Function $\Phi(m, n)$ drückt die Menge derjenigen Zahlen aus, welche innerhalb des Intervalls 1 bis m inclusive durch keine der Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ theilbar sind.
2. Setzt man $n = \varphi(m)$, so folgt $\Phi(m, \varphi m) = 1$.
Denn im Intervall 1 bis m wird die Einheit allein durch keine der ersten $\varphi(m)$ Primzahlen getheilt.
3. Es wird ferner
$$\Phi(m, a + \varphi m) = 1$$
$$\{a \gtreqless 0\} \qquad a \text{ ganz}$$
4. $$\Phi(m, a) = 1 + \varphi m - a$$
$$\varphi m \gtreqless a \geq \varphi\sqrt{m}.$$
Denn das Zeichen $\Phi(m, a)$ drückt die Menge der Zahlen des Intervalls 1 bis m aus, welche durch die ersten a Primzahlen nicht theilbar sind. Das sind ausser der Einheit die Primzahlen von p_{a+1} incl. bis m incl., nämlich $p_{a+1}, p_{a+2}, \ldots, p_{\varphi m}$ und deren Productverbindungen.

Da aber nach der Voraussetzung $p_{a+1} > \sqrt{m}$, so befindet sich im Intervall p_{a+1} bis m keine Productverbindung der Primzahlen desselben. Die Menge der Primzahlen dieses Intervalls ist aber $\varphi(m) - a$; daher
$$\Phi(m, a) = 1 + \varphi m - a$$
$$\{\varphi m \gtreqless a \geq \varphi\sqrt{m}\}.$$
5. $$\Phi(m, n) = \Phi(m, n-1) - \Phi\left(E\frac{m}{p_n}, n-1\right).$$
Durch Auflösung der Functionenzeichen werden beide Seiten identisch gleich.
6. Die Differenz
$$\Phi(m + a, n) - \Phi(m, n)$$
giebt die Menge der Zahlen an, welche im Intervall m excl. bis $m + a$ incl. durch eine der ersten n Primzahlen nicht getheilt werden; ist demnach gleich:

$\varphi(m + a) - \varphi m +$ Menge der zusammengesetzten Zahlen in dem erwähnten Intervall, deren kleinste Factoren $> p_n$ sind.

7. Zum Beweise der für unsere Zwecke wichtigsten Formel

$$\Phi\,(m,\ \varphi\sqrt{m} - a) =$$

$$1 + \varphi m - (a+1)\,\varphi\sqrt{m} + \frac{a\,(a+3)}{2} + \sum_{s=1+\varphi\sqrt[3]{m}-a}^{s=\varphi\sqrt{m}} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\{\varphi\sqrt{m} - \varphi\sqrt[3]{m} \geqq a \geqq 0\}$$

sei

$$\varphi\sqrt{m} = n + \mu$$

$$\varphi\sqrt[3]{m} = n.$$

Schliesst man s innerhalb der Grenzen ein

$$\mu \geqq s \geqq 0,$$

so wird in der aus 5. fliessenden Gleichung

$$(\alpha)\qquad \Phi\,(m,\, n+s) = \Phi\,(m,\, n+s-1) - \Phi\left(E\,\frac{m}{p_{n+s}},\, n+s-1\right)$$

das Argument $n+s-1$ innerhalb der Grenzen liegen,

$$\varphi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) > n+s-1 \gtreqless \varphi\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\,.$$

Denn es nimmt $E\,\dfrac{m}{p_{n+s}}$ ab, $n+s-1$ zu, wenn s wächst;

für $s = 1$ ist aber

$$\frac{m}{p_{n+1}} < \sqrt[3]{m^2}\ , \qquad \sqrt{\frac{m}{p_{n+1}}} < \sqrt[3]{m}\,.$$

Da nun $n = \varphi\sqrt[3]{m}$ ist, so folgt für $s = 1$

$$n+s-1 \geqq \varphi\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\,.$$

Für jeden folgenden Werth von s ist also

$$n+s-1 > \varphi\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\,.$$

Demnach allgemein

$$n+s-1 \geqq \varphi\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\,.$$

Ferner nimmt $n+s-1$ ab, $E\,\dfrac{m}{p_{n+s}}$ zu, wenn s abnimmt;

für $s = \mu$ ist aber $\qquad \dfrac{m}{p_{n+\mu}} \gtreqless \sqrt{m}$

oder $\qquad \varphi\left(\dfrac{m}{p_{n+\mu}}\right) \geqq n+\mu > n+\mu-1.$

Folglich ist für $s \overline{\overline{<}} \mu$

$$\varphi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) > n + s - 1\,.$$

Die Function $\Phi\left(E\,\frac{m}{p_{n+s}},\ n+s-1\right)$ lässt sich in Folge der gewonnenen Grenzeinschliessung

$$\varphi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) > n + s - 1 \geqq \varphi\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}$$

aus 4. berechnen. Man erhält

$$\Phi\left(E\,\frac{m}{p_{n+s}},\ n+s-1\right) = 1 + \varphi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) - (n+s-1)\,,$$

demnach aus (α)

$$\Phi(m, n+s) = \Phi(m, n+s-1) + n + s - 2 - \varphi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right).$$

Setzt man hier für s die a Werthe

$$\mu,\ \mu-1,\ \ldots\ \mu-(a-1) \qquad \{\mu \geqq a \geqq 0\}$$

und addirt, so folgt

$$\Phi(m, \varphi\sqrt{m}) = \Phi(m, \varphi\sqrt{m} - a) + a\,\varphi\sqrt{m} - \frac{a\,(a+3)}{2}$$
$$- \sum_{\mu+1-a}^{\mu} \varphi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right).$$

Für die linke Seite hat man nun den aus 4. sich ergebenden Werth $1 + \varphi m - \varphi\sqrt{m}$ einzuführen, dann erhält man

$$\Phi(m, \varphi\sqrt{m} - a) = 1 + \varphi m - (a+1)\,\varphi\sqrt{m} + \frac{a\,(a+3)}{2}$$
$$+ \sum_{1+\varphi\sqrt{m}-a}^{\varphi\sqrt{m}} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\left\{\mu = \varphi\sqrt{m} - \varphi\sqrt[3]{m} \geqq a \geqq 0\right\}.$$

8. Setzt man, wie vorher

$$n + \mu = \varphi\sqrt{m}$$
$$n = \varphi\sqrt[3]{m}$$

$a = \mu$

und macht in Formel 7. $\sqrt{a} = \mu$, so ergiebt sich die zur Berechnung der Primzahlenmenge im Intervall 1 bis m wichtige Gleichung

$$\varphi(m) = \Phi(m, n) + n(\mu+1) + \frac{\mu(\mu-1)}{2} - 1 - \sum_{1}^{\mu} \varphi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right).$$

9. Noch mag einer Formel gedacht werden, welche die Rechnungen wesentlich abkürzt.

Es sei

$$m = g \cdot p_1\, p_2\, p_3 \cdots p_n + r\,; \qquad \{g, r \textit{ ganz}\}$$

so wird

$$\Phi(m, n) = g \cdot (p_1 - 1)\,(p_2 - 1) \cdots (p_n - 1) + \Phi(r, n).$$

Zur weiteren Abkürzung der Rechnungen construirte ich eine Tafel von $(2-1)\,(3-1)\,(5-1)\,(7-1)\,(11-1) = 480$ Werthen, aus welcher mittels 9. der Werth von $\Phi(m, 5)$ abgelesen werden konnte.

Ferner construirte ich eine Tafel für

$$\Phi(100m, 5n) \text{ bis } m = 800 \text{ und } n = 2 \text{ bis } 6.$$

Ausserdem benutzte ich ein Verzeichniss der 4500 ersten Primzahlen, sowie für weiter ausgedehnte Rechnungen eine selbstverfertigte*) Tafel für $\varphi(100n)$ bis $n = 2000$.

Folgende vier Beispiele werden die Methode erläutern.

Gesucht 1) $\varphi(20000)$
2) $\varphi(500000)$
3) $\varphi(1000000)$
4) $\varphi(10000000)$.

---

1) $m = 20000$

$$\begin{aligned} n + \mu &= 34 \\ n &= 9 \end{aligned}\quad ; \quad \mu = 25$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, n) - 1 + 9 \,.\, 26 + \frac{25 \,.\, 24}{2} - \sum_{10}^{34} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\sum_{10}^{34} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 1547$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, 9) - 1014$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi(m,9) = \Phi(m,8) - \Phi(\;869, 8) &=& (m,8) - 148 \\ (m,8) = \quad (m,7) - \quad (1052, 7) &=& (m,7) - 189 \\ (m,7) = \quad (m,6) - \quad (1176, 6) &=& (m,6) - 224 \\ (m,6) = \quad (m,5) - \quad (1538, 5) &=& (m,5) - 320 \\ \hline \Phi(m,9) = \Phi(m,5) - \qquad\qquad && \qquad\quad 881 \end{array}$$

$$= 4157 - 881 = 3276$$

$$\underline{\varphi(m) = 2262.}$$

---

*) Bei dieser Gelegenheit fand ich in dem dritten Abdruck der Stereotyp-Ausgabe von Hülsse, Sammlung mathematischer Tafeln folgende Fehler:

pag. 431 ist als Primzahl zu löschen $173279 = 241 \,.\, 719$.
pag. 432 fehlt die Primzahl 177347.

2) $m = 500\,000$

$$\begin{matrix} n + \mu = 126 \\ n \quad = \ \ 22 \end{matrix}; \ \mu = 104$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, 22) + 7665 - \sum_{23}^{126} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\sum_{23}^{126} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 28543$$

Φ	(6329, 21)	=	805
	(6849, 20)	=	868
	(7042, 19)	=	901
	(7462, 18)	=	958
	(8196, 17)	=	1069
	(8474, 16)	=	1123
	(9433, 15)	=	1281
	(10638, 14)	=	1481
	(11627, 13)	=	1661
	(12195, 12)	=	1798
	(13513, 11)	=	2056
	(16129, 10)	=	2549
	(17241, 9)	=	2822
	(21739, 8)	=	3722
	(26315, 7)	=	4752
	(29411, 6)	=	5642
	(38461, 5)	=	7994
	Summa	=	41482

$$\Phi(m, 22) = \Phi(m, 5) - \text{Summa}$$

$\Phi(m, 5) = 103898$

Summa $= 41482$

$\Phi(m, 22) = 62416$

$\varphi(m) = 41538$

3) $m = 1\,000\,000$

$$\begin{matrix} n + \mu = 168 \\ n \quad = \ \ 25 \end{matrix}; \ \mu = 143.$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, 25) + 13752 - \sum_{26}^{168} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\sum_{26}^{168} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 56014.$$

Φ	(10309, 24)	=	1245
	(11235, 23)	=	1355
	(12048, 22)	=	1461
	(12658, 21)	=	1554
	(13698, 20)	=	1701
	(14084, 19)	=	1776
	(14925, 18)	=	1911
	(16393, 17)	=	2144
	(16949, 16)	=	2262
	(18867, 15)	=	2576
	(21276, 14)	=	2983
	(23255, 13)	=	3357
	(24390, 12)	=	3618
	(27027, 11)	=	4137
	(32258, 10)	=	5099
	(34482, 9)	=	5647
	(43478, 8)	=	7435
	(52631, 7)	=	9503
	(58823, 6)	=	11284
	(76923, 5)	=	15984
	Summa	=	87032
	$\Phi(m, 5)$	=	207792
	$\Phi(m, 25)$	=	120760

$\varphi(m) = 78498$

4) $m = 10\,000\,000$

$$\begin{matrix} n + \mu = 446 \\ n \quad = \ \ 47 \end{matrix}; \ \mu = 399 \ ; \ \varphi(m) = \Phi(m, 47) + 98200 - \sum_{48}^{446} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right).$$

Φ	(47393, 46)	=	4844	(99009, 25)	=	11711
	(50251, 45)	=	5128	(103092, 24)	=	12359
	(50761, 44)	=	5185	(112359, 23)	=	13669
	(51813, 43)	=	5304	(120481, 22)	=	14877
	(52356, 42)	=	5375	(126582, 21)	=	15872

$\Phi\,(55248, 41) = 5685$		$\Phi\,(136986, 20) = 17468$	
$(55865, 40) = 5772$		$(140845, 19) = 18250$	
$(57803, 39) = 6007$		$(149253, 18) = 19656$	
$(59880, 38) = 6249$		$(163934, 17) = 21976$	
$(61349, 37) = 6433$		$(169491, 16) = 23124$	
$(63694, 36) = 6725$		$(188679, 15) = 26229$	
$(66225, 35) = 7035$		$(212765, 14) = 30206$	
$(67114, 34) = 7182$		$(232558, 13) = 33781$	
$(71942, 33) = 7769$		$(243902, 12) = 36294$	
$(72992, 32) = 7957$		$(270270, 11) = 41318$	
$(76335, 31) = 8399$		$(322580, 10) = 50950$	
$(78740, 30) = 8749$		$(344827, 9) = 56406$	
$(88495, 29) = 9956$		$(434782, 8) = 74357$	
$(91743, 28) = 10452$		$(526315, 7) = 95017$	
$(93457, 27) = 10780$		$(588235, 6) = 112830$	
$(97087, 26) = 11345$		$(769230, 5) = 159840$	
$S_1 = 152331$		$S_2 = 886190$	

$$\Phi(m, 47) = \Phi(m, 5) - (S_1 + S_2) = 2077921 - (S_1 + S_2) = 1039400$$

$$\sum_{48}^{130} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 220747\,;\quad \sum_{131}^{220} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 108791\,;\quad \sum_{221}^{310} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 69826$$

$$\sum_{311}^{400} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 51635\,;\quad \sum_{401}^{446} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 22021\,;\quad \sum_{48}^{446} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 473021$$

$$\varphi(m) = 664579.$$

Die Resultate der folgenden Zusammenstellung sind durch directe Zählung aus den Burckhardt'schen Tafeln und Berechnung nach der obigen Methode übereinstimmend gewonnen.

Es kommen vor bis zur

Chilias.	Primzahlen.	Chilias.	Primzahlen
100	9592	600	49098
200	17984	700	56543
300	25997	800	63951
400	33860	900	71274
500	41538	1000	78498

Hiernach sind die Burckhardt'schen Tafeln in der ersten Million hinsichtlich der vorhandenen Primzahlen correct.

Sobald ich die Berechnung der Primzahlenmenge in den ersten hundert Millionen vollendet habe, werde ich das Resultat bekannt machen.

Iserlohn, den 27. März 1869.

Ueber den stationären Temperaturzustand.

Von Karl VonderMühll in Leipzig.

In der Lehre von der Bewegung der Wärme im Innern fester Körper gilt der allgemeine Satz, dass nach Verfluss einer als unendlich lang zu betrachtenden Zeit der Temperaturzustand des Körpers von dem Anfangszustande unabhängig ist.

Wenn z. B. ein Körper, nachdem er beliebig erwärmt worden, sich abkühlt, während einzelne Theile seiner Oberfläche auf constanten Temperaturen erhalten werden und die Temperatur der Umgebung ungeändert bleibt, so tritt schliesslich ein sogenannter stationärer Temperaturzustand ein; es hat die Temperatur an jeder Stelle des Körpers einen stationären, d. h. mit der Zeit sich nicht ändernden Werth angenommen. Werden namentlich verschiedene Stellen der Oberfläche auf einer und derselben constanten Temperatur erhalten, und hat auch die Temperatur der Umgebung denselben constanten Werth, so nimmt jede Stelle des Körpers schliesslich diese constante Temperatur an. Wird aber die Oberfläche des Körpers periodisch sich ändernden Temperatureinflüssen unterworfen, so wird nach Verfluss einer hinlänglich grossen Zeit die Temperatur an allen Stellen im Innern ebenfalls periodisch. Es wird also immer nach Verfluss einer als unendlich lang zu betrachtenden Zeit der Temperaturzustand unabhängig vom Anfangszustande.

Dieser Satz ist meines Wissens bis jetzt nur in den besonderen Fällen, welche eine theoretische Behandlung gefunden haben, als gültig nachgewiesen, aber nicht als unmittelbare Folge aus den Fourier-schen Gleichungen für den Fall eines beliebigen endlichen Körpers abgeleitet worden; es soll daher im Folgenden diese allgemeine Ableitung gegeben werden. Es hängt dieselbe mit dem Beweis des Satzes, dass der Temperaturzustand durch die Fourier'schen Gleichungen vollständig und eindeutig bestimmt wird, eng zusammen, und dieses Zusammenhangs wegen soll die bekannte Ableitung des letztern Satzes vorausgeschickt werden. —

Es bezeichne v die Temperatur einer Stelle x, y, z im Innern eines endlichen homogenen unkrystallinischen Körpers zur Zeit t; es

sei ferner K die innere Wärmeleitungsfähigkeit, C die specifische Wärme und D die Dichtigkeit des Körpers. Werden die drei Grössen als constant betrachtet, so muss v der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung Genüge leisten:

$$(1) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right).$$

Es muss ferner für jede Stelle an der Oberfläche des Körpers die Gleichung erfüllt sein:

$$(2) \qquad v = u + \frac{K}{H}\,\frac{\partial v}{\partial n},$$

wo ∂n das Element der Normale an die Oberfläche, in das Innere des Körpers positiv gerechnet, u die Temperatur der Umgebung und H die äussere Leitungsfähigkeit bezeichnet. Diese soll als von den Temperaturen v und u unabhängig betrachtet werden; dagegen kann die äussere Leitungsfähigkeit an verschiedenen Stellen der Oberfläche verschiedene Werthe haben, und wir wollen daher H als Function der Stelle an der Oberfläche betrachten; jedoch hat diese Function einen immer positiven Werth, und sie kann nie gleich Null werden. Es ist ferner die Temperatur u der Umgebung im Allgemeinen Function der Zeit und Function der Stelle an der Oberfläche, indem an verschiedenen Stellen die Temperatur der Umgebung einen verschiedenen Werth haben kann. Werden z. B. bestimmte Stellen der Oberfläche auf bestimmten Temperaturen erhalten, so bezeichnet u diese Temperaturen, und es wird H für die betreffenden Stellen unendlich gross, damit $\frac{K}{H}$ verschwinde.

Es muss endlich noch der Anfangszustand bestimmt sein, d. h. es muss für eine bestimmte Zeit, für die Zeit $t = 0$, der Werth der Temperatur an jeder Stelle des Körpers gegeben sein; es findet also noch eine Gleichung von der Form statt:

$$(3) \qquad v = f(x, y, z) \qquad \text{für } t = 0.$$

Es soll nun zunächst bewiesen werden, dass, wenn v und seine Differentialquotienten nach x, y und z endlich und stätig sind, ebenso u und $f(x, y, z)$, der Temperaturzustand durch die drei Gleichungen vollständig und eindeutig bestimmt wird.

Zu diesem Ende nehmen wir an, es gebe zwei verschiedene Werthe v_1 und v_2, welche, für v eingesetzt, den drei Gleichungen Genüge leisten, und weisen nach, dass diese beiden Werthe einander gleich sein müssen, indem ihre Differenz

$$V = v_1 - v_2$$

für jede Stelle des Körpers zu jeder Zeit verschwindet.

Da nämlich v_1 und v_2 den Gleichungen (1), (2) und (3) Genüge leisten sollen, ist V eine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right);$$

es besteht ferner für jede Stelle an der Oberfläche die Gleichung:

$$V = \frac{K}{H}\,\frac{\partial V}{\partial n},$$

und es ist endlich:

$$V = 0 \qquad \text{für} \qquad t = 0.$$

Multipliciren wir nun die partielle Differentialgleichung auf beiden Seiten mit

$$V\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

und integriren wir in Bezug auf das Raumelement $dx\,dy\,dz$ über den ganzen Rauminhalt des Körpers, in Bezug auf das Zeitelement dt über das Intervall von 0 bis t, so ergiebt sich:

$$\int_0^t\!\!\iiint V\,\frac{\partial V}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$\frac{K}{CD}\int_0^t\!\!\iiint V\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz\,dt.$$

Wir können aber auf der linken Seite die Integration nach der Zeit ausführen, und zwar erhalten wir:

$$\int_0^t V\,\frac{\partial V}{\partial t}\,dt = \tfrac{1}{2}\,V^2,$$

da V für $t = 0$ verschwinden soll. Auf der rechten Seite dagegen formen wir das Raumintegral in bekannter Weise durch partielle Integration um und erhalten:

$$\iiint V\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$-\iiint\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\} dx\,dy\,dz - \int V\,\frac{\partial V}{\partial n}\,d\omega,$$

wo das erstere Integral wieder über den ganzen Rauminhalt des Körpers, das Letztere über alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche auszudehnen ist. Wir haben ferner für die Oberfläche

$$V = \frac{K}{H}\,\frac{\partial V}{\partial n};$$

wenn wir also in dem Oberflächenintegral diesen Werth für V einsetzen und alle Glieder der Gleichung auf die linke Seite bringen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \tfrac{1}{2}\iiint V^2\,dx\,dy\,dz \\ & + \frac{K}{CD}\int_0^t\!\!\iiint\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\} dx\,dy\,dz\,dt \\ & + \frac{K}{CD}\int_0^t\!\!\int \frac{K}{H}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 d\omega\,dt. \end{aligned}$$

Nun sind aber die Elemente sämmtlicher Integrale positiv, ebenso die Grössen

$$\frac{K}{CD} \quad \text{und} \quad \frac{K}{H};$$

folglich kann die Summe der drei Integrale nur verschwinden, wenn V an jeder Stelle x, y, z des Körpers zu jeder Zeit t verschwindet.

Folglich ist durch die Gleichungen (1), (2) und (3) die Temperatur v als Function des Orts und der Zeit vollständig und eindeutig bestimmt.

Ebenso kann für den Fall, wo zwei oder beliebig viele endliche Körper gegeben sind, welche in bestimmten Oberflächen an einander grenzen, der Beweis geführt werden, dass der Temperaturzustand durch die allgemeine Differentialgleichung, die Grenzbedingungen und die Anfangsbedingung vollständig und eindeutig bestimmt wird; es muss nur berücksichtigt werden, dass an der gemeinschaftlichen Grenzfläche zweier Körper zwei Grenzbedingungen auftreten. —

Wir gehen nun zu dem Beweis des Satzes über, dass nach unendlich langer Zeit, also für $t = \infty$, der Temperaturzustand von dem Anfangszustande unabhängig ist.

Und zwar wollen wir zunächst den Fall betrachten, wo sich die Temperatur u der Umgebung mit der Zeit nicht ändert. Es sei also

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

und es soll bewiesen werden, dass für $t = \infty$ auch

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

wird.

Zu diesem Ende multipliciren wir die Differentialgleichung (1) auf beiden Seiten mit

$$\frac{\partial v}{\partial t}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

und integriren in derselben Weise, wie oben, über den Rauminhalt des Körpers und über die Zeit von 0 bis t. Dann ergiebt sich nach entsprechender Umformung des auf der rechten Seite stehenden Integrals:

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^t\!\!\iiint \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx\, dy\, dz\, dt \\ + \frac{K}{CD}\int_0^t\!\!\iiint \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial \frac{\partial v}{\partial t}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial \frac{\partial v}{\partial t}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\,\frac{\partial \frac{\partial v}{\partial t}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\, dt \\ + \frac{K}{CD}\int_0^t\!\!\iint \frac{\partial v}{\partial n}\,\frac{\partial v}{\partial t}\, d\omega\, dt. \end{aligned}$$

In dem letzten Integrale aber, welches über alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche zu nehmen ist, kann

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{H} \frac{\partial \frac{\partial v}{\partial n}}{\partial t}$$

gesetzt werden, weil $\frac{\partial u}{\partial t}$ gleich Null ist. Wird ferner, was jetzt möglich ist, die Integration nach der Zeit in dem zweiten und dritten Gliede ausgeführt, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$\int_0^t \int\int\int \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx\, dy\, dz\, dt +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \frac{K}{CD} \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz + \tfrac{1}{2} \frac{K}{CD} \int \frac{K}{H} \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 d\omega$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{K}{CD} \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz + \tfrac{1}{2} \frac{K}{CD} \int \frac{K}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2 d\omega .$$

Nun ist die Summe der beiden Integrale auf der rechten Seite eine Constante von positivem endlichem Werth; ebenso ist die Summe des zweiten und dritten Integrals auf der linken Seite eine immer positive Grösse. Folglich muss das Integral:

$$\int_0^t \int\int\int \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx\, dy\, dz\, dt$$

immer kleiner sein, als eine positive endliche Grösse.

Es nimmt aber mit wachsender Zeit dieses Integral fortwährend zu, da immer neue positive Elemente hinzutreten, und es muss bis ins Unendliche zunehmen, wenn nicht, mit wachsendem t, $\frac{\partial v}{\partial t}$ sich dem Werthe Null unbegrenzt nähert. Da nun die Gleichung auch für unendlich grosse Werthe von t gelten soll, kann das Integral nicht unendlich gross werden; folglich muss

$$\text{für } t = \infty \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

sein, d. h. in dem betrachteten Fall nähert sich der Temperaturzustand unbegrenzt einem stationären.

Es ist noch die Unabhängigkeit dieses stationären Temperaturzustandes, welcher durch v' bezeichnet werde, von dem Anfangszustande nachzuweisen; diese folgt daraus, dass die Grösse v' durch die Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}$$

und durch die Bedingung an der Oberfläche

$$v' = u + \frac{K}{H} \frac{\partial v'}{\partial n}$$

vollständig und eindeutig bestimmt ist. Denn nehmen wir an, es gebe zwei Lösungen v_1' und v_2', so muss die Differenz

$$V' = v_1' - v_2'$$

derselben Differentialgleichung und der Grenzgleichung

$$V' = \frac{K}{H} \frac{\partial V'}{\partial n}$$

Genüge leisten. Folglich ist:

$$0 = \int\int\int V' \left(\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz$$

oder

$$0 = \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz + \int \frac{K}{H} \left(\frac{\partial V'}{\partial n}\right)^2 d\omega.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die partiellen Differentialquotienten von V' nach x, y und z für jede Stelle des Körpers gleich Null sind, wenn also V' gleich einer Constanten ist; aus der Gleichung für die Oberfläche aber folgt, dass diese Constante gleich Null sein muss. Folglich ist:

$$v_1' = v_2',$$

d. h. es wird v' durch die Differentialgleichung und durch die Grenzgleichung vollständig und eindeutig bestimmt.

Nehmen wir endlich an, es sei u nicht nur von der Zeit, sondern auch von der Stelle auf der Oberfläche unabhängig, also u constant gleich c, so leistet

$$v' = c$$

den Gleichungen für den stationären Temperaturzustand Genüge. Folglich ist dies die einzige Lösung, und es wird also in diesem Falle für $t = \infty$ die Temperatur v constant gleich c.

Es lässt sich jetzt auch beweisen, dass in dem allgemeinen Falle, wo die Temperatur u der Umgebung Function der Zeit ist, der Temperaturzustand nach einer als unendlich lang zu betrachtenden Zeit von dem Anfangszustande vollständig unabhängig ist.

Wenn nämlich v_1 eine Lösung der Gleichungen für den Anfangszustand $v_1 = f_1\,(x, y, z)$ bezeichnet, und v_2 eine Lösung für den Anfangszustand $v_2 = f_2\,(x, y, z)$, so muss

$$V = v_1 - v_2$$

der Differentialgleichung Genüge leisten:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right),$$

ferner der Grenzgleichung:

$$V = \frac{K}{H} \frac{\partial V}{\partial n},$$

endlich der Anfangsbedingung:

$$V = f_1(x, y, z) - f_2(x, y, z).$$

Diese Gleichungen sind aber mit denen identisch, welche den Temperaturzustand des Körpers für den Fall bestimmen, dass die Temperatur u der Umgebung constant gleich Null ist. Folglich wird:

$$\text{für } t = \infty: \qquad V = 0, \qquad v_1 = v_2,$$

d. h. der Temperaturzustand zur Zeit $t = \infty$ ist derselbe, welches auch der Anfangszustand gewesen sein mag; jener ist also von diesem unabhängig.

Leipzig; im März 1870.

Verbesserungen.

Seite 476 Z. 6 v. u. statt $N\left(\frac{p}{p,q}\right)$ **lies** $N\left(\frac{n}{p,q}\right)$.

„ 478 „ 20 v. o. „ $(n-p-1).(n-p-2).(n-p-3)$ **lies** $(n-p+1).(n-p+2).(n-p+3)$.

„ 479 „ 2 v. u. „ $-N(n-q-p)$ **lies** $+N(n-q-p)$.

„ 514 „ 4 v. u. und Z. 16 v. u. statt $\frac{\log a}{\log r}$ **ist zu setzen** $\frac{\log r}{\log a}$.

„ 514 „ 4 v. u. statt $\frac{r}{a}$ **ist zu setzen** $\frac{a}{r}$.